

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**Sección Departamental de Física de la Tierra, Astronomía y**  
**Astrofísica (Geofísica y Meteorología)**



**ESTUDIO METODOLÓGICO DEL EFECTO  
OCEÁNICO INDIRECTO Y DESARROLLO DE  
MODELOS DE CARGA OCEÁNICA:  
APLICACIONES GEODÉSICAS PARA LA  
PENÍNSULA IBÉRICA Y CANARIAS.**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**  
**PRESENTADA POR**

**María Teresa Benavent Merchán**

Bajo la dirección del doctor

José Arnoso Sampedro

**Madrid, 2011**

**ISBN: 978-84-694-3115-3**

**© María Teresa Benavent Merchán, 2011**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**SECCIÓN DEPARTAMENTAL DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA**

**ESTUDIO METODOLÓGICO DEL EFECTO OCEÁNICO INDIRECTO  
Y DESARROLLO DE MODELOS DE CARGA OCEÁNICA.  
APLICACIONES GEODÉSICAS PARA  
LA PENÍNSULA IBÉRICA Y CANARIAS**

**TESIS DOCTORAL**

**María Teresa Benavent Merchán**

**Director: José Arnoso Sampedro**

**Madrid, 2010**



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**SECCIÓN DEPARTAMENTAL DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA**

**ESTUDIO METODOLÓGICO DEL EFECTO OCEÁNICO INDIRECTO Y  
DESARROLLO DE MODELOS DE CARGA OCEÁNICA.  
APLICACIONES GEODÉSICAS PARA  
LA PENÍNSULA IBÉRICA Y CANARIAS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**  
**PRESENTADA POR**  
**María Teresa Benavent Merchán**

Bajo la dirección del Doctor  
**José Arnoso Sampedro**

Científico Titular del CSIC. Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM)



**Madrid, 2010**





# Agradecimientos

*En primer lugar quiero expresar mi más sincera gratitud a José Arnoso Sampedro por el esfuerzo y dedicación con que ha dirigido esta tesis. Su ayuda y consejos han sido fundamentales para su elaboración.*

*Deseo agradecer a la Sección Departamental de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Matemáticas (UCM) y al Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM) el apoyo y los medios recibidos durante el tiempo que he desarrollado en ellos mi Doctorado. A lo largo de estos años he contado con la ayuda inestimable y el estímulo de sus miembros (profesores, investigadores, personal administrativo, compañeros y amigos), no es posible enumerarlos a todos, pero deseo expresar mi agradecimiento a cada uno de ellos.*

*Debo un especial reconocimiento al Ministerio de Ciencia e Innovación la concesión de una beca FPI con la cual fue posible iniciar este trabajo, así como las diversas ayudas de movilidad recibidas por el mismo. Agradezco al Observatorio Real de Bélgica y al Prof. Bernard Ducarme la estancia realizada y la supervisión del trabajo durante la misma. Mi gratitud también al Observatorio de Porto, a la Prof.<sup>a</sup> Luisa Bastos y, muy especialmente, al Dr. Machiel Bos por permitirme utilizar su programa CARGA y por sus inestimables consejos.*

*Los trabajos realizados en esta memoria se han llevado a cabo en el marco de diversos proyectos de investigación, a los que debo una mención especial: REN2002-00544/RIES y PIE-2007301029 (CSIC), siendo el Dr. José Arnoso su investigador principal, y los proyectos GR74/07-CCG07-UCM/AMB-2783 y GR58/08-A (CAM-UCM) del grupo Geodesia de la UCM, codirigido por las Doctoras Fuensanta G. Montesinos y Carmen de Toro.*

*Debo manifestar mi agradecimiento a los organismos que han posibilitado el establecimiento de las estaciones de marea gravimétrica presentadas en esta memoria: Al Cabildo de El Hierro (J. Armas) y al I.G.N. de Canarias (M. J. Blanco) la estación AU, al Ayuntamiento de Algodonales y al I.G.N. (J. M. Alcalde y E. Carreño) la estación ALG, al Ministerio de Defensa y el Acto. Millán Astray de la Legión la estación MEL, al IAG y la UCM las estaciones P-IAG y V-ABS. Asimismo, debo mencionar a las personas que han prestado su colaboración en los trabajos realizados en dichas estaciones: J. Quintero, J. L. Montesinos, A. M. Arnoso, E. Vélez y R. Vieira. Hago extensivo este agradecimiento a los organismos que han proporcionado datos y observaciones (mareográficos, de altimetría por satélite, modelos digitales del terreno, etc.) imprescindibles para este trabajo y que se citan en esta memoria. De igual modo, me gustaría agradecer a los autores de los programas “OSU Tidal Inversion Software” (G. D. Egbert y S. Y. Erofeeva) y “VAV” (A. Venedikov, J. Arnoso y R. Vieira), que han sido utilizados para este trabajo, el haberlos puesto a disposición pública.*

*Finalmente, deseo dar las gracias a mi familia, sin su apoyo continuo e incondicional no habría sido posible la realización de este trabajo.*



# Resumen

La marea oceánica origina una serie de efectos sobre la superficie terrestre que se engloban en lo que se conoce como Efecto Oceánico Indirecto (EOI). Este efecto comprende tres contribuciones principales: La primera, la deformación elástica de la Tierra bajo el peso de las masas de agua oceánica. La segunda, la atracción gravitatoria directa que ejercen estas masas de agua. Finalmente, como consecuencia de las dos anteriores, se produce una redistribución de masas en el interior de la Tierra que origina, a su vez, variaciones de gravedad. Sobre la superficie terrestre el EOI se observa periódicamente en forma de deformaciones y variaciones de gravedad y afecta, por tanto, a observaciones geodésicas y geofísicas como puedan ser las realizadas con gravímetros, GPS, etc.

El objetivo principal de esta tesis es investigar el EOI, estudiando la metodología más apropiada que permita mejorar la exactitud en su determinación numérica. Para ello ha sido necesario estudiar con detalle los errores inherentes al propio cálculo con el fin de reducir sus consecuencias sobre los resultados. A partir de estas investigaciones se ha desarrollado un nuevo software, denominado **ECOM**, que permite determinar el EOI con gran exactitud. Este software se caracteriza por su versatilidad, ya que incorpora múltiples opciones que permiten adecuar la metodología de cálculo utilizada a las necesidades particulares de la zona de estudio, y por su accesibilidad, materializada a través de una interfaz visual. Puesto que los mayores errores en el EOI provienen de los modelos de marea oceánica utilizados en su cálculo, para incrementar la exactitud en su determinación se ha abordado el diseño y construcción de este tipo de modelos a escala regional. La técnica de asimilación de datos constituye una metodología eficaz que ha permitido, mediante la combinación óptima de observaciones con un modelo hidrodinámico, obtener modelos regionales de alta resolución que representan con gran exactitud la marea oceánica y delimitan fielmente los contornos costeros. Las zonas objeto de estudio en esta tesis son la Península Ibérica y el Archipiélago Canario. Ambas regiones presentan características singulares, tanto en lo que respecta a su estructura y propiedades geomorfológicas como en las características de la marea oceánica de las aguas circundantes. De ello, que ambas regiones comportan un gran interés en Geodesia. En este trabajo se han desarrollado dos modelos de carga oceánica de alta resolución específicos para estas regiones, denominados **IBER01** y **CIAM2**, que, junto con el software ECOM, han permitido determinar con gran exactitud el EOI para ocho constituyentes armónicos principales. Finalmente, se han utilizado observaciones de marea terrestre gravimétrica en la Península Ibérica, norte de África y las Islas Canarias para dar respuesta a dos objetivos: Por una parte, validar y constreñir los modelos de carga oceánica desarrollados y, por otra parte, corregir con exactitud estas medidas para que puedan ser utilizadas con rigor en investigaciones posteriores. En particular, se presentan en este trabajo nuevos resultados de marea terrestre gravimétrica en tres estaciones (ALG en Cádiz, MEL en Melilla y AU en El Hierro) y se revisan y mejoran los parámetros de marea observados en cuatro estaciones (V-ABS y P-IAG en Madrid, CV en Lanzarote y TP en Tenerife). Todo ello ha permitido, además, realizar un estudio de las propiedades elásticas/inelásticas de la estructura de la corteza y del manto superior terrestres con una exactitud comprendida entre el 0,1% y el 0,5% en las frecuencias principales de marea gravimétrica.

# Abstract

The response of the Earth's surface to the ocean tides is known as Ocean Tide Loading (OTL). This loading effect comprises three main contributions: The first one is the elastic deformation of the solid Earth due to the weight of the water load. The second contribution comes from the direct gravitational attraction exerted by the tidal water mass. Besides, is produced a redistribution of mass within the Earth that induced gravity changes. The OTL is periodically observed as deformations and gravity variations along the surface of the Earth. Thus, OTL affects almost all geodetic and geophysical observations, such as those carried out with gravimeters, GPS receivers and so on.

The main goal of this thesis is to investigate the OTL, studying the most appropriate methodology that allows us to improve the accuracy in its numerical evaluation. Then, to reduce the errors in the OTL computation, it has been necessary to study in detail their sources. From these researches new software has been developed, called **ECOM**, that allows determining accurately the OTL. This software is characterized by its versatility, since it incorporates several computations options to adapt the methodology to the specifics requirements of the area of study. ECOM is also characterized by its accessibility, which is achieved through a visual interface. Since the largest error source comes from the ocean tide models, this thesis addresses the development of regional ocean models with the aim of increasing the accuracy in the loading calculations. The data assimilation technique constitutes an efficient methodology that has allowed, through the optimal combination of observations with a hydrodynamical model, to obtain high resolution regional models, which represent accurately the ocean tides and coastlines. The areas of study in this thesis are the Iberian Peninsula and the Canary Archipelago. Both regions show singular features, with regard their structure and geomorphological properties and, also, concerning the characteristics of the ocean tides in the surrounding waters. For this reason, both regions experience a great interest in Geodesy. In this work, two high resolution ocean tidal loading models have been developed for these areas, called **IBER01** y **CIAM2**. The two models, together with the software ECOM, have allowed determining with accuracy the OTL for eight main harmonic constituents. Finally, observations of gravimetric tides have been used in the Iberian Peninsula, north of Africa and the Canary Archipelago, to raise two objectives: On the one hand, to validate and to constraint the ocean tidal loading models developed and, on the other hand, to correct accurately these measurements such as they can be used in further researches. Particularly, in this work new results of gravimetric tides are showed in three stations (ALG in Cádiz, MEL in Melilla and AU in El Hierro). Also, the tidal parameters observed in four stations (V-ABS and P-IAG in Madrid, CV in Lanzarote and TP in Tenerife) have been revised and improved their estimates. All these works have allowed us to carry out a study of the elastic/anelastic properties of the Earth's crust and upper mantle with an accuracy ranging between 0.1% and 0.5% for the main gravimetric tidal frequencies.

# Índice

<b>INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1. La Respuesta de la Tierra Sólida y los Océanos a las Fuerzas de Marea .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>1.2 La Marea Terrestre y la Deformación de la Tierra Sólida.....</b>	<b>6</b>
1.2.1 Estructura Radial del Interior de la Tierra.....	6
1.2.2 Deformaciones Elásticas Originadas por la Marea de la Tierra Sólida.....	8
1.2.2.1 Los Números de Love Elásticos .....	14
1.2.2.2 Componentes de la Respuesta de la Tierra a las Fuerzas Derivadas del Potencial Generador de Marea .....	15
1.2.2.3 Modelos de Tierra Elástica.....	16
1.2.3 Modificaciones al Modelo de Tierra SNREI.....	17
1.2.3.1 Rotación de la Tierra e Inercia .....	18
1.2.3.2 Esfuerzos Iniciales Desviatorios y Heterogeneidades Laterales .....	21
1.2.3.3 Anelasticidad de la Tierra.....	22
1.2.3.4 Visco-Elasticidad de la Tierra .....	25
<b>1.3 La Marea Oceánica .....</b>	<b>26</b>
1.3.1 El Método de Análisis Armónico.....	26
1.3.2 El Método de Análisis de Respuesta .....	29
<b>1.4 Conclusiones .....</b>	<b>32</b>
<b>CAPÍTULO 2. El Efecto de Carga Causado por la Marea Oceánica.....</b>	<b>33</b>
<b>2.1 Introducción.....</b>	<b>33</b>
<b>2.2 El Efecto de Carga Oceánica de Marea: Observables y Ámbito de Aplicación .....</b>	<b>35</b>
<b>2.3 Cálculo de los Desplazamientos y las Variaciones de Gravedad Originadas sobre la Superficie Terrestre por la Carga Oceánica de Marea.....</b>	<b>40</b>
2.3.1 Ecuaciones Básicas y Condiciones de Frontera .....	41
2.3.2 Los Números de Love de Carga Elásticos.....	46
2.3.2.1 Cálculo de los Números de Love de Carga para un Modelo de Tierra Esférica y Elástica.....	47
2.3.2.2 Convergencia de los Números de Love de Carga .....	47
2.3.2.3 Comparación de los Números de Love de Carga para Modelos de Tierra SNREI .....	48
<b>2.4 Las Funciones de Green de Carga .....</b>	<b>50</b>
2.4.1 Función de Green para la Variación del Potencial Gravitatorio.....	51
2.4.2 Función de Green para el Desplazamiento Radial .....	53
2.4.3 Función de Green para el Desplazamiento Tangencial .....	54

2.4.4 Función de Green para las Variaciones de Gravedad.....	56
2.4.4.1 Componente Newtoniana de la Función de Green para Variaciones de Gravedad.....	57
2.4.4.2 Componente Elástica de la Función de Green para Variaciones de Gravedad .....	58
2.4.4.3 Función de Green para Variaciones de Gravedad y el Factor Gravimétrico.....	59
2.4.5 Comparación de las Funciones de Green de Carga para Modelos de Tierra SNREI .....	60
<b>2.5 Cálculo del Efecto de Carga Oceánica de Marea .....</b>	<b>63</b>
2.5.1 El Formalismo de Convolución de las Funciones de Green con la Distribución de la Masa de la Carga .....	63
2.5.1.1 Estudio de Errores en el Cálculo Numérico del Efecto Oceánico Indirecto .....	66
2.5.1.2 Comparación de Resultados para Modelos de Tierra SNREI .....	71
2.5.1.3 Comparación de Resultados para Modelos de Tierra Realistas .....	72
2.5.2 La Técnica de las Funciones de Green Integradas y el Método de Plantilla.....	74
2.5.3 El Formalismo del Desarrollo en Armónicos Esféricos .....	76
2.5.4 Programas de Cálculo de la Carga Oceánica de Marea.....	79
<b>2.6 Programa para el Cálculo del EOI: ECOM Versión 1.0 .....</b>	<b>80</b>
<b>2.7 Conclusiones .....</b>	<b>87</b>
<b>CAPÍTULO 3. Metodología para el Desarrollo de un Modelo de Carga Oceánica de Marea....</b>	<b>88</b>
<b>3.1 Introducción.....</b>	<b>88</b>
<b>3.2 Desarrollo Histórico de los Modelos de Marea Oceánica .....</b>	<b>89</b>
<b>3.3 Clasificación de los Modelos de Marea Oceánica.....</b>	<b>93</b>
3.3.1 La Altimetría por Satélite Aplicada a las Investigaciones de Marea Oceánica.....	94
3.3.1.1 Principios Básicos de la Altimetría por Satélite .....	94
3.3.1.2 El Problema del Enmascaramiento o Aliasing de la Señal de Marea.....	99
3.3.1.3 Las Misión TOPEX/Poseidón .....	100
3.3.2 La Técnica de Asimilación de Datos en el Desarrollo de Modelos de Marea Oceánica.....	101
3.3.3 Modelos Globales de Marea Oceánica.....	104
<b>3.4 Desarrollo de un Modelo de Marea Oceánica Mediante la Técnica de Asimilación de Datos .....</b>	<b>109</b>
3.4.1 Desarrollo del Modelo Hidrodinámico Numérico.....	110
3.4.1.1 El Sistema de Ecuaciones de Aguas Poco Profundas.....	110
3.4.1.2 La Topografía del Fondo Marino .....	123
3.4.1.3 Condiciones de Frontera y de Contorno .....	123
3.4.1.4 Esquemas Numéricos para la Resolución del Sistema de Ecuaciones .....	126
3.4.2 Construcción del Modelo Inverso o Solución Final .....	143
3.4.2.1 Especificación del Espacio Modelo, el Conjunto de Datos y la Función Coste.....	144
3.4.2.2 Minimización de la Función Coste Mediante el Método de los Representantes.....	145
3.4.3. Asignación de Errores en la Dinámica y en los Datos Observados .....	150

3.4.3.1 Errores en el Modelo Hidrodinámico .....	151
3.4.3.2 Errores en los Datos.....	155
<b>3.5. Conclusiones .....</b>	<b>156</b>
<b>CAPÍTULO 4. Modelo de Carga Oceánica de Marea para la Región de la Península Ibérica</b>	<b>158</b>
<b>4.1 Introducción.....</b>	<b>158</b>
<b>4.2 Descripción de la Zona de Estudio.....</b>	<b>160</b>
4.2.1 Dominio del Modelo .....	160
4.2.2 Ámbito Geográfico y Descripción General del Régimen de Marea.....	162
4.2.2.1 Golfo de Vizcaya, Mar Cantábrico y Litoral Gallego .....	162
4.2.2.2 Región Atlántico Noreste, Golfo de Cádiz y Estrecho de Gibraltar.....	164
4.2.2.3 Mar de Alborán y Mar Mediterráneo .....	167
<b>4.3 Estudios Previos en la Región.....</b>	<b>170</b>
4.3.1 Región Atlántica: Costas Norte y Oeste de la Península Ibérica.....	170
4.3.2 Estrecho de Gibraltar.....	172
4.3.3 Mar Mediterráneo.....	174
<b>4.4 Datos Asimilados en el Modelo IBER01 .....</b>	<b>176</b>
4.4.1 Observaciones Mareográficas Costeras y de Profundidad .....	176
4.4.1.1 Procedencia de los Datos: Fuentes de Información y Organismos Distribuidores.....	177
4.4.1.2 Descripción de los Datos.....	181
4.4.1.3 Análisis de las Series Temporales Mareográficas .....	183
4.4.2 Observaciones Altimétricas por Satélite .....	187
4.4.2.1 Datos Altimétricos.....	187
4.4.2.2 Correcciones Aplicadas a los Datos del Satélite .....	188
4.4.2.3 Obtención del Residual del Nivel del Mar y de la Marea Oceánica.....	190
<b>4.5 El Modelo de Carga Oceánica IBER01 .....</b>	<b>190</b>
4.5.1 Construcción de la Cuadrícula Oceánica.....	190
4.5.2 Modelo Hidrodinámico .....	193
4.5.2.1 Modelo Digital de la Topografía del Fondo Oceánico .....	193
4.5.2.2 Condiciones de Frontera.....	195
4.5.2.3 Términos de Disipación.....	198
4.5.2.4 Términos de Atracción y Carga.....	201
4.5.2.5 Esquema Numérico de Resolución de las Ecuaciones Hidrodinámicas .....	201
4.5.3 Errores Asignados al Modelo Hidrodinámico y a los Datos Observados .....	202
4.5.4 La Solución Inversa: El Modelo IBER01.....	203
<b>4.6 Resultados .....</b>	<b>204</b>
4.6.1 Descripción General de IBER01 y Comparación con Modelos Globales.....	206
4.6.2 Descripción Específica de IBER01 y Comparación con Modelos Locales y Observaciones...	214



4.6.3 Estadísticas de los Errores en el modelo IBER01 .....	231
<b>4.7 Conclusiones .....</b>	<b>233</b>
<b>CAPÍTULO 5. Modelo de Carga Oceánica de Marea para la Región de las Islas Canarias ....</b>	<b>235</b>
<b>5.1 Introducción.....</b>	<b>235</b>
<b>5.2 Descripción de la Zona de Estudio.....</b>	<b>237</b>
5.2.1 Dominio del Modelo .....	237
5.2.2 Ámbito Geográfico y Descripción General del Régimen de Marea.....	237
<b>5.3 Estudios Previos en la Región.....</b>	<b>240</b>
<b>5.4 Datos Asimilados en el Modelo CIAM2 .....</b>	<b>242</b>
5.4.1 Observaciones Mareográficas Costeras. Descripción de los Datos y Análisis de las Series Temporales .....	242
5.4.2 Observaciones Altimétricas por Satélite .....	244
<b>5.5 El Modelo de Carga Oceánica CIAM2.....</b>	<b>244</b>
5.5.1 Construcción de la Cuadrícula Oceánica.....	244
5.5.2 Modelo Hidrodinámico .....	247
5.5.2.1 Modelo Digital de la Topografía del Fondo Oceánico .....	247
5.5.2.2 Condiciones de Frontera.....	248
5.5.2.3 Términos de Disipación.....	250
5.5.2.4 Fuerzas Generadoras de Marea .....	250
5.5.2.5 Esquema Numérico de Resolución de las Ecuaciones Hidrodinámicas.....	250
5.5.3 Errores Asignados al Modelo Hidrodinámico y a los Datos Observados .....	251
5.5.4 La Solución Inversa: El Modelo CIAM2 .....	252
<b>5.6 Resultados .....</b>	<b>252</b>
5.6.1 Descripción General de CIAM2.....	252
5.6.2 Comparación de CIAM2 con Modelos Globales, Regionales/Locales y con Observaciones...	257
5.6.3 Estadísticas de los Errores en el Modelo CIAM2 .....	270
<b>5.7 Conclusiones .....</b>	<b>272</b>
<b>CAPÍTULO 6. Cálculo del EOI en la Península y Canarias. Validación de los Modelos de Carga Oceánica IBER01 y CIAM2.....</b>	<b>273</b>
<b>6.1 Introducción.....</b>	<b>273</b>
<b>6.2 Antecedentes .....</b>	<b>276</b>
<b>6.3 Variaciones de Gravedad y Desplazamientos Originados por el Efecto Oceánico Indirecto en la Península Ibérica y el Norte de África .....</b>	<b>277</b>
6.3.1 Cálculo de las Variaciones de la Gravedad Originadas por el EOI en la Península Ibérica .....	282
6.3.2 Cálculos del Desplazamiento Radial Originado por el EOI en la Península Ibérica .....	292
<b>6.4 Variaciones de Gravedad y Desplazamientos Originados por el Efecto Oceánico Indirecto en el Archipiélago Canario .....</b>	<b>293</b>

6.4.1 Cálculo de las Variaciones de Gravedad Originadas por el EOI en las Islas de El Hierro, Tenerife y Lanzarote .....	294
6.4.2 Cálculos de los Desplazamientos Originados por el EOI en las Islas de El Hierro, Tenerife y Lanzarote .....	301
<b>6.5 Comparación entre la Marea Gravimétrica de Carga Observada y la Calculada.....</b>	<b>305</b>
<b>6.6 Comparación entre la Marea Gravimétrica de Carga Observada y la Calculada en Estaciones Situadas en la Península Ibérica y Melilla .....</b>	<b>308</b>
6.6.1 Descripción General de la Marea Gravimétrica en la Península Ibérica.....	308
6.6.2 Validación del Modelo Oceánico IBER01 .....	308
6.6.2.1 Las Observaciones de Marea Gravimétrica.....	309
6.6.2.2 Las Series Temporales Observadas y el Análisis de Marea Gravimétrica.....	313
6.6.2.3 Comparación de la Marea Gravimétrica de Carga Observada con la Calculada .....	319
<b>6.7 La Marea Gravimétrica de Carga Observada en el Archipiélago Canario y Comparación con la Calculada .....</b>	<b>324</b>
6.7.1 Descripción General de la Marea Gravimétrica en Lanzarote, Tenerife y El Hierro.....	324
6.7.2 Validación del Modelo Oceánico CIAM2.....	324
6.7.2.1 Las Observaciones de Marea Gravimétrica.....	325
6.7.2.2 Las Series Temporales Observadas y el Análisis de Marea Gravimétrica.....	328
6.7.2.3 Comparación de la Marea Gravimétrica de Carga Observada con la Calculada.....	334
<b>6.8 Conclusiones .....</b>	<b>336</b>
<b>CONCLUSIONES/CONCLUSIONS.....</b>	<b>337/342</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>346</b>
 <b>APÉNDICES (CD-ROM)</b>	
<b>Apéndice 1</b>	
<b>Apéndice 2</b>	



# Introducción y Objetivos

La acción combinada de las fuerzas gravitatorias ejercidas por las masas de la Luna y el Sol y la fuerza centrífuga origina una respuesta directa de las partes sólidas, líquidas y gaseosas de la Tierra, conocidas como mareas terrestre, oceánica y atmosférica, respectivamente (Sevilla, 1989). Los desplazamientos verticales periódicos de las masas de agua oceánica generados por el potencial luni-solar de marea provocan, a su vez, fenómenos de carga sobre el fondo oceánico que ocasionan una respuesta indirecta de la corteza terrestre, conocida como Efecto Oceánico Indirecto (EOI). Sobre la superficie terrestre este efecto se observa periódicamente en forma de desplazamientos de la corteza terrestre, en las direcciones vertical y horizontal, variaciones de gravedad (en módulo y dirección) y en extensiones. Puesto que la marea terrestre y el EOI están generadas por el mismo origen astronómico, ambos fenómenos tienen el mismo espectro de frecuencias y, como consecuencia, un carácter temporal muy similar. Por el contrario, su naturaleza espacial difiere significativamente. La estructura de la variación espacial del EOI es compleja ya que, por una parte, depende considerablemente de las propiedades locales de la corteza terrestre y del manto superior y, por otra parte, se ve alterada por la propia dinámica del océano y las variaciones locales en la amplitud de la marea oceánica (Penna y Baker, 2002, Baker; 1991).

Las manifestaciones sobre la superficie terrestre del EOI afectan a un gran número de observaciones geodésicas y geofísicas, que deben ser corregidas a fin de obtener más exactitud en su medida. Por ejemplo, las medidas de marea terrestre gravimétrica se encuentran afectadas por el EOI, siendo éste el responsable de, aproximadamente, el 10% de la señal de gravedad observada (Francis y Mazzega, 1990). En este ámbito de aplicación, la determinación con exactitud del EOI puede servir tanto para corregir estas observaciones de su influencia, como para comparar la marea terrestre teórica con la señal observada y realizar así investigaciones sobre la estructura elástica de la Tierra (Agnew, 1995). Por otra parte, teniendo en cuenta que la precisión en las redes GPS permanentes es inferior al centímetro en la dirección radial y que, en esta misma dirección, los desplazamientos originados por el EOI pueden alcanzar un rango de varios centímetros, dichos desplazamientos deben corregirse con gran exactitud sobre las observaciones GPS para que éstas puedan ser utilizadas en otras investigaciones geodésicas y geofísicas (Melachroinos et al., 2008; Khan y Scherneck, 2003). En los últimos años, el incremento en la precisión de las medidas geodésicas y geofísicas, y dado el orden de magnitud que se puede alcanzar a la hora de interpretar correctamente dichas medidas, el estudio del EOI cobra gran relevancia, hasta el punto de considerarse, en sí mismo, como una actividad propia especializada (Zahran et al., 2005). Este hecho se pone de manifiesto con los numerosos trabajos publicados los últimos años en esta línea de investigación como, por ejemplo, Sato et al. (2008), Neumeyer et al. (2005), Baker y Bos (2003), etc.

El objetivo principal de esta tesis es investigar el EOI, para las componentes del desplazamiento y las variaciones de gravedad, estudiando la metodología más apropiada que permita mejorar la exactitud en su determinación numérica. Este objetivo conlleva, además, el estudio de los errores inherentes al propio cálculo con el fin de reducir sus consecuencias sobre los resultados. Las consideraciones expuestas anteriormente justifican el interés y la importancia de las investigaciones realizadas en esta tesis sobre el EOI y su determinación con exactitud.

La determinación de la respuesta terrestre a la carga ejercida por la marea oceánica, se basa en la resolución del sistema de ecuaciones que expresa las relaciones entre la fuerza ejercida sobre la superficie terrestre, formulada en términos de esfuerzo, con los desplazamientos y la perturbación en el potencial gravitatorio inducidos. Longman (1962; 1963) expresó las soluciones de este sistema de ecuaciones en términos de los números de Love de carga, que son funciones, a su vez, del modelo de estructura interna de la Tierra y del grado armónico esférico. Dichos números de Love describen propiamente las deformaciones elásticas de la Tierra, originadas por la carga de una masa puntual unitaria situada sobre la superficie terrestre. Para calcular las diferentes componentes de la respuesta terrestre a la carga ejercida por todas las masas de agua de marea del planeta, Farrell (1972) propone su determinación a partir de la convolución de las funciones de Green de carga, que consisten en sumas ponderadas de los números de Love, con una distribución global de la marea oceánica. Alternativamente, Ray y Sánchez (1989) elaboraron un procedimiento para el cálculo del EOI basado en el desarrollo inicial de la distribución de la marea oceánica en series de armónicos esféricos y su posterior convolución con las funciones de Green de carga. En ambos casos, los mayores errores en el cálculo del EOI se introducen a través de la representación de la marea oceánica, bien a partir de un modelo preexistente o bien a partir de su desarrollo en armónicos esféricos. En el último caso, el truncamiento del desarrollo de la marea oceánica en algún grado armónico perjudica el resultado, principalmente en zonas próximas a la costa donde, además, se originan pequeños fenómenos de Gibbs. Por su parte, el método de Farrell (1972) posibilita, en estas zonas, la utilización de una representación de la marea oceánica de mayor resolución así como la delimitación de los contornos costeros con mayor exactitud. Por estas razones, el método de cálculo que permitirá reducir de una manera eficaz los errores inherentes al mismo es la convolución de las funciones de Green con un modelo de marea oceánica. Para ello, será necesario abordar también el diseño y construcción de modelos de marea oceánica a escala regional, que complementen a los modelos globales, dadas las discrepancias que se manifiestan en estos últimos debido a su escasa resolución espacial y a los desajustes con los contornos costeros.

Los primeros modelos globales elaborados fueron puramente empíricos. Se construyeron mediante la extrapolación de las constantes armónicas de marea calculadas a partir del análisis de las observaciones, irregular y escasamente distribuidas, realizadas con mareógrafos instalados a lo largo de las costas de los continentes, en islas en el océano abierto y con sensores de presión instalados en el fondo oceánico. Los avances tecnológicos, a finales de la década de los 70 del siglo pasado,

posibilitaron la aparición de los primeros modelos oceánicos puramente teóricos. Aun así, no fue hasta el año 1980 cuando Schwiderski elaboró el primer modelo de marea oceánica a escala global, para los principales constituyentes de marea, con una exactitud suficiente como para ser utilizado en aplicaciones geofísicas. Posteriormente, en la década de los años 90, con la disponibilidad de observaciones procedentes de altimetría por satélite de calidad aceptable y con suficiente longitud temporal, surgieron numerosos modelos de marea empíricos basados en este tipo de datos (principalmente del satélite TOPEX/Poseidón). A partir de entonces, el desarrollo paralelo de la altimetría por satélite y de los ordenadores, que favorecen el desarrollo tanto de los modelos teóricos como empíricos, impulsan la aparición de nuevas metodologías, como es la técnica de asimilación de datos. Esta técnica permite combinar un modelo puramente hidrodinámico con datos observados, de tal forma que cada uno de ellos puede suplir los inconvenientes del otro, lo que es especialmente interesante en regiones de aguas poco profundas (Lyard et al., 2006, 2004; Egbert y Erofeeva, 2002).

Las zonas de estudio en las que se plantea aplicar las metodologías anteriores son la Península Ibérica y el Archipiélago Canario. En ambas regiones, por sus singulares características estructurales y geomorfológicas, las investigaciones geodésicas y gravimétricas cobran una gran relevancia. Así, en el Instituto de Astronomía y Geodesia (IAG, CSIC-UCM) se han venido desarrollado en las últimas décadas numerosos proyectos de investigación en relación con las deformaciones de la corteza terrestre, las variaciones de gravedad, las interacciones Océano-Atmósfera-Tierra, etc. Si las características anteriores comportan un interés especial, no menos lo hacen su ubicación y configuración geográfica. Estas regiones se encuentran bañadas, parcial o totalmente, por el océano Atlántico, que se caracteriza por presentar rangos de marea oceánica muy altos. Además, la complejidad de la batimetría y la geometría de sus costas inducen un complicado patrón de propagación de la marea en sus aguas y se hace necesario el desarrollo de modelos de marea oceánica regionales de alta resolución. Además, como consecuencia de las características de la marea oceánica en su entorno, el EOI alcanza amplitudes muy altas, que afectan significativamente a las observaciones geodésicas y gravimétricas realizadas. Por ejemplo, para la onda  $M_2$  las variaciones de la gravedad causadas por el EOI en la Península alcanzan en amplitud valores de hasta  $9 \mu\text{Gal}$  (en las proximidades al Golfo de Vizcaya), lo que constituye hasta un 19% de la señal de marea gravimétrica observada.

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando, además, la exactitud que debe alcanzarse hoy en día en el cálculo del EOI, debido al incremento de la precisión de las técnicas de observación geodésica y geofísica, es imprescindible disponer de un software completo y versátil, que permita obtener cálculos rigurosos mediante la conjugación de una metodología eficaz y la integración óptima de modelos globales y regionales de la marea oceánica.

Con todas estas consideraciones, los **objetivos** planteados en esta memoria son:

- Estudiar con detalle los errores que se cometen en el proceso de cálculo del EOI para intentar reducir sus consecuencias.

- Desarrollar un nuevo software que permita determinar el EOI con la mayor exactitud posible, atendiendo a la idoneidad en las zonas de estudio. Se pretende obtener más versatilidad en el cálculo e incorporar todas las posibilidades actuales que, en conjunto, mejoren la evaluación de este efecto en las medidas geodésicas de alta resolución.
- El estudio de la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico, para su aplicación en el desarrollo de modelos de carga oceánica regionales. Con ello se pretende mejorar significativamente la representación de la marea oceánica en una determinada zona de estudio y, de esta manera, aumentar la exactitud en la evaluación del EOI.
- Las zonas en las que se plantea aplicar estas metodologías son la Península Ibérica y el Archipiélago Canario, ambas encuadradas en la consecución de objetivos en diversos proyectos de investigación desarrollados en el IAG (CSIC-UCM) y en el Grupo Geodesia de la UCM. De esta manera se pretende:
  - Desarrollar modelos de carga oceánica para ambas regiones.
  - A partir de ellos, y con el nuevo software de cálculo elaborado, obtener evaluaciones precisas del EOI en dichas zonas de estudio.
  - Utilizar observaciones de marea gravimétrica para dar respuesta a dos objetivos:
    - i) Validar los modelos de carga oceánica desarrollados.
    - ii) Corregir con exactitud las medidas geodésicas afectadas por el EOI para que, de esta manera, se puedan emplear para investigar con mayor rigor las características de la corteza terrestre en estas zonas de interés geodinámico.

Teniendo en cuenta estos propósitos, esta tesis doctoral se ha estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se detallan algunas consideraciones previas a las investigaciones posteriores, exponiendo los conceptos fundamentales y los métodos utilizados en el estudio de la respuesta Tierra sólida y de los océanos a las fuerzas de marea. En el Capítulo 2 se estudia la metodología para la evaluación del EOI y se describe el desarrollo de un nuevo software destinado a su cálculo. El Capítulo 3 está dedicado a la elaboración de modelos de carga oceánica. Se establece el formalismo matemático para la obtención de un modelo hidrodinámico, atendiendo a la idoneidad en la zona de estudio de los términos y parámetros involucrados. Se presenta una técnica de inversión para la conjugación óptima de este modelo teórico con los datos observados. En los Capítulos 4 y 5 se diseñan y desarrollan explícitamente sendos modelos de carga oceánica para las regiones de la Península Ibérica y el Archipiélago Canario. En el Capítulo 6 se analizan en detalle los resultados del cálculo y evaluación del EOI en las dos zonas de estudio, considerando los métodos propuestos, el software y los modelos de carga oceánica desarrollados previamente. Los resultados de medidas de marea terrestre gravimétrica servirán como herramienta de validación de dichos modelos, prestando especial atención a las propiedades elásticas de la Tierra en lo que respecta a la corrección del EOI en dichas medidas. Finalmente, se recogen las conclusiones finales de esta memoria, destacando las aportaciones personales más relevantes y las líneas de trabajo futuras.

# Capítulo 1

## La Respuesta de la Tierra Sólida y los Océanos a las Fuerzas de Marea

*En este Capítulo se revisan algunos conceptos y desarrollos teóricos fundamentales utilizados en el estudio de la respuesta de la Tierra sólida y los océanos a las fuerzas de marea. En la Sección 1.2, se recopilarán las ecuaciones elementales que rigen las deformaciones elásticas de la Tierra sólida, originadas por las fuerzas que derivan del potencial generador de marea, considerando diversos modelos terrestres. La Sección 1.3 reúne algunas nociones y planteamientos relacionados con el análisis de las observaciones de marea oceánica.*

### 1.1 Introducción

La acción combinada de las fuerzas gravitatorias ejercidas por las masas de la Luna y el Sol y la fuerza centrífuga, debida al movimiento relativo en torno al baricentro del sistema formado por la Tierra y el astro considerado, la Luna o el Sol, provocan variaciones de gravedad (en módulo y dirección) y deformaciones en la Tierra sólida, incluyendo el fondo oceánico, conocidas como ***mareas terrestres***. A su vez, las masas de agua oceánica también se encuentran sometidas a la acción de dichas fuerzas, produciéndose desplazamientos verticales periódicos denominados ***mareas oceánicas***. Como consecuencia de éstas, se generan fenómenos de carga sobre el fondo oceánico y se origina una respuesta indirecta de la corteza terrestre a las fuerzas de marea denominada ***efecto oceánico indirecto*** o, más comúnmente, ***efecto de carga oceánica***.

En este Capítulo se revisarán los conceptos teóricos fundamentales y los métodos utilizados en el estudio de la respuesta de la Tierra sólida y los océanos a las fuerzas de marea, que son necesarios para el desarrollo de esta memoria. En la Sección 1.2 se deducirá la formulación básica esencial para obtener la respuesta de un modelo de Tierra (desplazamientos y variaciones de gravedad) a las fuerzas derivadas del potencial generador de marea. Inicialmente, se considerará un modelo de Tierra elástica, que presenta simetría esférica, auto-gravitando y sin rotación para, posteriormente, extender los resultados a modelos de Tierra más complejos, atendiendo a su geometría, propiedades mecánicas y reología. Las ecuaciones fundamentales descritas conforman la base para la extensión del problema que se plantea al estudiar la respuesta de un modelo de Tierra sometido a la acción de una fuerza externa, como es el caso de la carga ejercida por la marea oceánica. En la Sección 1.3 se introducirá, brevemente, el fenómeno de marea oceánica, así como los métodos de análisis de observaciones más comúnmente utilizados.



## **1.2 La Marea Terrestre y la Deformación de la Tierra Sólida**

Si la Tierra fuera un cuerpo perfectamente rígido, las fuerzas de marea no producirían ninguna deformación. Por el contrario, cuando se aplica el potencial generador de marea sobre una Tierra elástica, ésta experimenta deformaciones con una redistribución de masas asociada. La respuesta de la Tierra a las fuerzas de marea está determinada por la elasticidad de la estructura del manto superior y de la corteza terrestre. Sobre la superficie terrestre, en latitudes medias, los desplazamientos causados por las fuerzas lunisulares de marea pueden alcanzar hasta 40 cm medidos a lo largo de la dirección radial y 15 cm en el plano horizontal. Asimismo, las variaciones de gravedad pueden ser del orden de  $10^{-6}$  m/s<sup>2</sup> en magnitud y de cientos de nanoradianes en dirección.

En esta Sección se describirá la formulación básica necesaria para obtener la respuesta de un modelo de Tierra a las fuerzas que actúan sobre su superficie. Inicialmente, la fuerza externa considerada es la que deriva del potencial generador de marea. La misma teoría puede aplicarse para calcular la respuesta terrestre a otras fuerzas que actúan sobre su superficie, como en el caso de la carga ejercida por la marea oceánica, que se tratará en el Capítulo siguiente, y que conforma el objetivo central de esta memoria. Los primeros autores en tratar el problema de las deformaciones elásticas causadas por las mareas terrestres fueron Stoneley (1926), Takeuchi (1950), Molodenskii (1953) y Alterman et al. (1959). Por ejemplo, Takeuchi y Molodenskii construyeron soluciones independientes de las deformaciones para un modelo de Tierra esférica, gravitando y con inhomogeneidades radiales, con un núcleo líquido y un esfuerzo inicial hidrostático. Molodenskii (1953) redujo la solución del problema a la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de sexto orden y, además, demostró la unicidad de las soluciones que obtuvo numéricamente para el modelo de Tierra de Gutenberg-Bullen. Esta teoría se basa en la deducción de las relaciones entre la fuerza ejercida sobre la superficie terrestre con los desplazamientos y la perturbación en el potencial gravitatorio inducidos. Dichas relaciones se establecen a partir de las ecuaciones de conservación del momento, la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio y la ecuación de continuidad para la conservación de masas. Puesto que sobre la superficie la fuerza estará expresada en términos de esfuerzo, será necesario introducir una relación entre dicho esfuerzo y la deformación, que vendrá determinada por la reología del modelo terrestre considerado, tratándose el comportamiento puramente elástico, anelástico y, finalmente, un modelo reológico combinado visco-elástico lineal.

### **1.2.1 Estructura Radial del Interior de la Tierra**

En la actualidad, los diferentes modelos propuestos para describir la estructura interna de la Tierra se basan en observaciones indirectas. Esta estructura puede conocerse a partir de la información que proporcionan las ondas sísmicas que atraviesan su interior y llegan a la superficie. Dicha información se obtiene analizando la distancia recorrida por las ondas sísmicas, el tiempo

empleado para ello y sus respectivas velocidades. La velocidad depende, entre otras variables, de la densidad y del módulo elástico del medio que atraviesan. Por tanto, a partir de las velocidades de las ondas sísmicas que llegan en primer lugar (ondas de compresión) y las que llegan en segundo lugar (ondas de cizalla) y su relación con la densidad y la profundidad de la Tierra, a través de la ecuación de Adams-Williamson<sup>1</sup>, es posible deducir los coeficientes de compresibilidad,  $\lambda(r)$ , de rigidez,  $\mu(r)$ , de Poisson,  $\sigma(r)$ , y el módulo de Young,  $E(r)$ , (Lambeck, 1988).

Desde la superficie hacia el interior, la Tierra se encuentra compuesta por una serie de capas de estructura y composición diferentes (p. ej., Anderson, 1989). La capa más superficial, la **corteza terrestre**, presenta un grosor variable y con una distinción importante entre corteza continental y corteza oceánica. La corteza oceánica tiene un grosor que varía desde los 2 km hasta los 37 km, mientras que la corteza continental entre 20 y 75 km, siendo esta última, por su composición, más deformable que la primera. La capa que se encuentra inmediatamente bajo la corteza, separada por la discontinuidad de Mohorovicic (o simplemente **Moho**), es el **manto** y se extiende hasta una profundidad de unos 2.900 km. Las propiedades en su interior varían considerablemente, dando lugar a dos zonas diferenciadas: el manto superior, que abarca desde el Moho hasta los 650 km de profundidad, y el manto inferior, que corresponde a la porción que se encuentra desde los 650-700 km hasta los 2.900 km por debajo de la superficie terrestre. La corteza terrestre y el manto superior constituyen la **litosfera**, caracterizada por su rigidez y, desde el punto de vista reológico, por su comportamiento elástico. La última capa, con un radio aproximado de 3.500 km, es el **núcleo**, que se divide a su vez en dos partes: un núcleo externo líquido que envuelve un núcleo sólido interior de, aproximadamente, 1.250 km de radio. La frontera entre el manto y el núcleo, de no más de 10 km de grosor, presenta la mayor variación en la composición y rigidez de los materiales terrestres y, por tanto, afecta drásticamente a la propagación de las ondas sísmicas (Llambias, 2001). En la Figura 1.1 está representada gráficamente la constitución del interior de la Tierra.

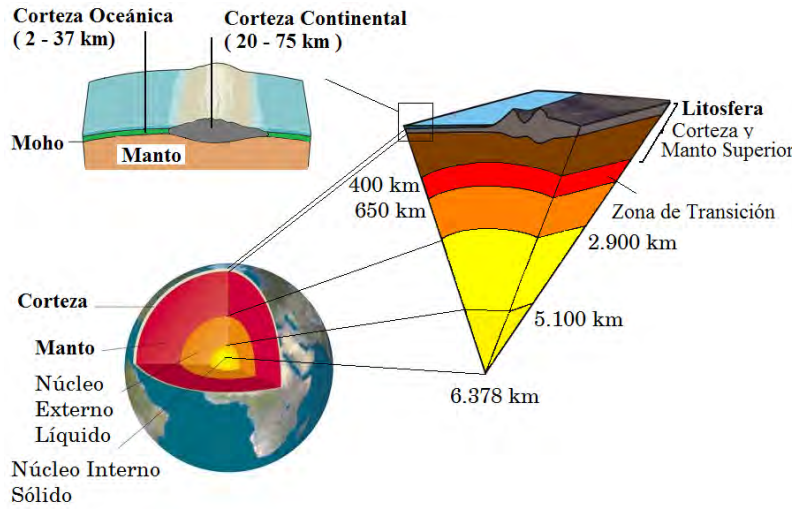
Tanto la teoría como las observaciones muestran que, para escalas de tiempo cortas (minutos, horas o meses), la Tierra se comporta como un sólido elástico (Sun y Sjöberg, 2001). Por tanto, en periodos propios de marea, la respuesta de la Tierra a las fuerzas derivadas del potencial o a cargas que actúan sobre su superficie (p. ej., la carga oceánica de marea), estará determinada, principalmente, por la elasticidad de la Tierra (Baker, 1984). Lo cierto es que el manto terrestre no es perfectamente elástico y, en periodos de marea, la anelasticidad<sup>2</sup> del manto introducirá un retraso en el tiempo de la respuesta de marea a las fuerzas externas, que debe ser tenido en cuenta cuando la precisión de la investigación objeto de estudio lo requiera. También, en periodos de tiempos largos y

---

<sup>1</sup> La condición de Adams-Williamson es una de las ecuaciones de estado en la Tierra (Bullen, 1975), dada por  $d\rho/dz = \rho g/\phi$ , donde  $\rho$  es la densidad,  $z$  es la profundidad,  $g$  es la gravedad y  $\phi$  es un parámetro sísmico dependiente de las velocidades de las ondas sísmicas (Adams y Williamson, 1923).

<sup>2</sup> Obsérvese que la **anelasticidad** o **elasticidad retardada** es la conducta de deformación reversible pero dependiente del tiempo.

para fuerzas que se ejercen sobre la superficie, tales como el rebote post-glacial, se ha demostrado experimentalmente que la corteza terrestre y el manto presentan un comportamiento visco-elástico (Peltier et al., 1981, Tromp y Mitrova, 1999).



**FIGURA 1.1:**

*Estructura interna de la Tierra. Obsérvese que las figuras no se encuentran a escala.*

### 1.2.2 Deformaciones Elásticas Originadas por la Marea de la Tierra Sólida

#### Ecuaciones que Rigen la Deformación Elástica

Se considera un sistema en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$ , con  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\lambda$  la base de vectores unitarios, tal que  $\mathbf{e}_r$  se encuentra definido en la dirección radial,  $\mathbf{e}_\theta$  a lo largo de la dirección perpendicular al primero y dirigido hacia el Sur y, finalmente,  $\mathbf{e}_\lambda$  construido tal que los tres vectores formen una base orto-normal directa y en dirección hacia el Este.

Para determinar la respuesta de la Tierra a las fuerzas derivadas del potencial generador de marea, se necesita una descripción de sus propiedades mecánicas. En una primera aproximación, se considera un modelo de Tierra con simetría esférica, sin-rotación, elástico e isótropo (SNREI, acrónimo en inglés de *Spherically symmetric, Non-Rotating, Elastic, Isotropic*), con parámetros elásticos y densidad dependientes, únicamente, de la distancia radial desde el centro de la Tierra. Para este modelo de Tierra se considera, además, un estado inicial de equilibrio hidrostático sometido a auto-gravitación. Bajo estas hipótesis el estado de referencia inicial o estado de equilibrio puede describirse mediante (Dahlen, 1968; Dahlen y Smith, 1975) la densidad,  $\rho_0$ , el potencial gravitatorio,  $\psi_0$  y el tensor de esfuerzos inicial,  $\mathbf{T}_0$ , definido como fuerza por unidad de área. El subíndice cero en los tres parámetros anteriores hace referencia al estado inicial. Dichos parámetros están relacionados entre sí a través de las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\rho_0 \nabla \psi_0 = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 \quad [1.1]$$

$$\nabla^2 \psi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad [1.2]$$

La ecuación [1.1] establece la conservación del momento lineal<sup>3</sup> que, para un elemento de volumen de densidad  $\rho_0$  y velocidad  $\mathbf{v} = 0$ , lo relaciona con las fuerzas aplicadas. La segunda ecuación, [1.2], corresponde a la ecuación de Poisson, satisfecha por el potencial gravitatorio bajo la hipótesis de auto-gravitación, con  $G$  la constante de gravitación universal.  $\nabla$ ,  $\nabla$  y  $\nabla^2$  denotan los operadores gradiente, divergencia y Laplaciano, respectivamente, definidos en el Apéndice 1.

La hipótesis de partida de equilibrio hidrostático implica la existencia de un esfuerzo inicial de presión hidrostática, o simplemente *esfuerzo inicial hidrostático*, definido por

$$\mathbf{T}_0 = -p_0 \mathbf{I} \quad [1.3]$$

siendo  $p_0$  la presión hidrostática e  $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$  el tensor diagonal unitario. Sustituyendo el esfuerzo inicial hidrostático [1.3] en la ecuación del momento [1.1], esta última queda de la siguiente forma

$$\rho_0 \nabla \psi_0 = -\nabla \cdot (p_0 \mathbf{I}) = -\nabla p_0 \quad [1.4]$$

Por otra parte, puesto que el modelo de Tierra considerado presenta simetría esférica, la densidad inicial  $\rho_0 = \rho_0(r)$  depende únicamente de la distancia radial  $r$ . Como consecuencia, el potencial gravitatorio  $\psi_0 = \psi_0(r)$ , la aceleración de la gravedad  $g_0 = g_0(r)$  y la presión hidrostática  $p_0 = p_0(r)$  son también funciones sólo del radio. De esta forma, dado  $\rho_0$  es posible calcular  $g_0$  y  $p_0$  de la siguiente forma:

- La aceleración de la gravedad, expresada como el gradiente del potencial gravitatorio,  $g_0 \mathbf{e}_r = \nabla \psi_0 = \partial \psi_0 / \partial r$ , puede deducirse de la ecuación de Poisson [1.2]. Es decir

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_0 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g_0(r)) = 4\pi G \rho_0(r) \\ g_0(r) &= (4\pi G / r^2) \int_0^r \rho_0(x) x^2 dx \end{aligned} \quad [1.5]$$

Por tanto, como se ha dicho, la aceleración de la gravedad  $g_0$  variará únicamente en función del radio, y puede calcularse a partir de modelos de Tierra radial utilizando la ecuación [1.5].

- La presión hidrostática se obtiene a partir de la ecuación del momento [1.4]

$$\partial p_0 / \partial r = -\rho_0 \partial \psi_0 / \partial r = -\rho_0 g_0 \Leftrightarrow \nabla p_0 = -\rho_0 g_0 \mathbf{e}_r \quad [1.6]$$

Establecidas las ecuaciones de equilibrio de la Tierra en el estado inicial o de referencia, se considera que dicho estado se ve distorsionado por una fuerza externa. En este caso, la fuerza considerada es la que deriva del potencial generador de marea. En el Capítulo 2 se considerará la fuerza ejercida por la presencia de una masa situada sobre la superficie terrestre. Si se asume que la deformación y el esfuerzo perturbador son tan pequeños que, tanto ellos como sus influencias pueden considerarse

---

<sup>3</sup> La expresión general de la ecuación de conservación del momento lineal viene dada por  $\rho_0 D\mathbf{v}/Dt = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho_0 \mathbf{f}$ , que establece que la razón de cambio del momento total es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, causando deformaciones y variaciones de gravedad. Las **fuerzas de volumen**, que afectan a todas las partículas que forman el sistema por igual, corresponden en este caso a  $\mathbf{f} = -\nabla \psi_0$ , mientras que las **fuerzas de superficie**  $\mathbf{T}_0$ , o simplemente **tensor de esfuerzos**, afecta tan sólo a la superficie que separa el sistema considerado del resto. Puesto que en el estado de equilibrio la velocidad es igual a cero la ecuación general se reduce a  $\nabla \cdot \mathbf{T}_0 - \rho_0 \nabla \psi_0 = 0$ . Obsérvese que  $D/DT = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  denota la **derivada total**, o también denominada material, mientras que  $\partial/\partial t$  hace referencia a la derivada en el tiempo.

como perturbaciones, entonces el problema de la respuesta global de la Tierra puede resolverse a partir de la *teoría de perturbación* (Dahlen, 1968; Dahlen y Tromp, 1998) y de la *teoría de las oscilaciones libres de la Tierra* (Pekeris y Jarosch, 1958; Alterman et al., 1959). Según estas teorías, la Tierra cede bajo las oscilaciones elástico-gravitatorias y las oscilaciones libres corresponden a desplazamientos infinitesimales dependientes en el tiempo,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , de una partícula  $\mathbf{x}$ . Es importante tener en cuenta lo siguiente:

- $\mathbf{x}$  representa la posición de la partícula en equilibrio, medido en un sistema inercial cuyo origen de coordenadas coincide con el centro de masas de la Tierra.
- El vector de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  denota la posición de la partícula en movimiento, cuyas componentes en coordenadas esféricas se denotan por  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\lambda)$ .
- La expresión

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad [1.7]$$

denota la posición fija en el espacio.

Estas oscilaciones libres estarán acompañadas por perturbaciones infinitamente pequeñas en la densidad, en el potencial gravitatorio y en el tensor de esfuerzos, las cuales hacen referencia al estado deformado. Denotando por:

- $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ , la perturbación en la densidad, que representa la variación de densidad asociada al vector de desplazamientos y, por tanto, en el estado deformado la densidad vendrá dada por  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ .
- $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , la perturbación en el potencial gravitatorio y  $g_1 \mathbf{e}_r = \partial \Phi / \partial r$  que representa la variación en gravedad, de tal forma que la gravedad en el estado deformado viene dada por

$$g \mathbf{e}_r = (g_0 + g_1) \mathbf{e}_r = \partial \psi_0 / \partial r + \partial \Phi / \partial r \quad [1.8]$$

A su vez, la perturbación en el potencial gravitatorio puede escribirse como suma de dos componentes,  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , siendo  $\Phi_1$  el potencial debido a la redistribución de masas y  $\Phi_2$  el potencial de la fuerza aplicada, es decir, el potencial generador de marea. Nótese que de momento, la fuerza centrífuga no está incluida en el potencial (Secc. 1.2.3.1).

- $\mathbf{T}_1(\mathbf{r}, t)$ , el esfuerzo perturbador adicional (infinitesimalmente pequeño) al tensor de esfuerzos inicial  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}, 0)$  en el instante  $t = 0$ . Mientras que, en primer orden, se verifica que  $\rho_1(\mathbf{r}, t) = \rho_1(\mathbf{x}, t)$  y  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)$ , el caso de la perturbación en el tensor de esfuerzos es más complejo, ya que

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{T}_1(\mathbf{r}, t) \quad [1.9]$$

corresponde a puntos en el medio deformado, mientras que

$$\mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{T}_0(\mathbf{x}, 0) \quad [1.10]$$

se mide en el estado inicial y corresponde al esfuerzo adicional en la partícula que se encuentra en posición  $\mathbf{r}$  en el instante  $t$  pero que, originalmente, tenía una posición diferente. Por tanto, de [1.7] y [1.10] se obtiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \quad [1.11]$$

que puede aproximarse, en primer orden, por

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) \quad [1.12]$$

Así, de las ecuaciones [1.9] y [1.12] resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{T}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{T}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad [1.13]$$

En el estado deformado, la ecuación del momento (equivalente a [1.1] en el estado de referencia) vendrá dada, omitiendo los productos de dos perturbaciones, por

$$(\rho_0 + \rho_1) D\mathbf{v}/Dt = \nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1) - (\rho_0 + \rho_1) \nabla (\psi_0 + \Phi) \quad [1.14]$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}$ ,  $\rho_1$  y  $\Phi$  son infinitesimalmente pequeños, omitiendo términos de segundo orden y restando la posición de equilibrio [1.1], la ecuación anterior puede expresarse de la siguiente forma (p. ej., Dahlen y Smith, 1975, Dahlen y Tromp, 1998)

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \nabla \cdot \mathbf{T}_1 - \rho_0 \nabla \Phi - \rho_1 \nabla \psi_0 \quad [1.15]$$

Sustituyendo el esfuerzo perturbador  $\mathbf{T}_E$  referido a puntos en el estado de referencia inicial, dado por la ecuación [1.13], en [1.15] se obtiene la ecuación del momento en el estado deformado

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_E(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0(\mathbf{r})) - \rho_0 \nabla \Phi - \rho_1 \nabla \psi_0 = \\ &= \nabla \cdot \mathbf{T}_E - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0) - \rho_0 \nabla \Phi - \rho_1 g_0 \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad [1.16]$$

y, teniendo en cuenta [1.3], [1.4] y [1.6], el segundo término del miembro derecho de la ecuación [1.16] puede expresarse como

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0) = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla p_0) = \nabla \cdot (\mathbf{e}_r \mathbf{u} \rho_0 g_0) = \nabla (\mathbf{e}_r \mathbf{u} \rho_0 g_0) \quad [1.17]$$

que sustituyendo en [1.16]

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \nabla \cdot \mathbf{T}_E - \nabla (\mathbf{e}_r \mathbf{u} \rho_0 g_0) - \rho_0 \nabla \Phi - \rho_1 g_0 \mathbf{e}_r \quad [1.18]$$

Por otra parte, la ecuación linealizada de Poisson o ecuación de redistribución de masas en el estado deformado viene dada por

$$\nabla^2 (\psi_0 + \Phi) = 4\pi G (\rho_0 + \rho_1)$$

y teniendo en cuenta la ecuación en el estado de referencia [1.2], queda de la siguiente forma

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_1 \quad [1.19]$$

Además de las ecuaciones anteriores, en el estado deformado debe verificarse la ecuación de continuidad para la conservación de masas, que relaciona la perturbación en la densidad  $\rho_1$  con el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\partial \rho_0 / \partial t + \partial \rho_1 / \partial t) + \nabla \cdot (\rho_0 \partial \mathbf{u} / \partial t) + \nabla \cdot (\rho_1 \partial \mathbf{u} / \partial t)$$

Teniendo en cuenta que  $\rho_0$  es la densidad inicial en el instante  $t = 0$  y que  $\rho_1$  es infinitesimalmente pequeño, la ecuación anterior puede aproximarse en primer orden como (Dahlen y Smith, 1975)

$$\partial \rho_1 / \partial t + \nabla \cdot (\rho_0 \partial \mathbf{u} / \partial t) = 0$$

Puesto que  $\rho_1 = 0$  cuando  $\mathbf{u} = 0$ , la ecuación anterior se puede integrar, de tal forma que la ecuación de continuidad linealizada queda como sigue

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \quad [1.20]$$

Sustituyendo [1.20] en las ecuaciones del momento y de Poisson en el estado deformado, [1.18] y [1.19] respectivamente, se obtienen las ecuaciones básicas de la deformación elástica (problema elástico-gravitatorio) para un modelo de Tierra SNREI sometido a un esfuerzo inicial hidrostático y a la fuerza derivada del potencial generador de marea. Suponiendo que las deformaciones, en este caso de marea, son pequeñas (lo que permite aplicar la *teoría de perturbación*) y bajo unas condiciones de frontera apropiadas, dichas ecuaciones pueden resolverse y, por tanto, es posible determinar el desplazamiento  $\mathbf{u}$  y el potencial gravitatorio perturbador  $\Phi$

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \nabla \cdot \mathbf{T}_E - \nabla (\mathbf{e}_r \mathbf{u} \rho_0 g_0) - \rho_0 \nabla \Phi + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) g_0 \mathbf{e}_r \quad [1.21]$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \quad [1.22]$$

En adelante, ya que no hay lugar a confusión, se denotará  $\mathbf{T}_E$  por  $\mathbf{T}$ . Para resolver el sistema formado por las ecuaciones [1.21] y [1.22] se introducen los parámetros reológicos de la Tierra, de tal forma que el esfuerzo se escribe en términos del desplazamiento y de la dilatación. Para ello se tiene en cuenta lo siguiente:

- Para un cuerpo lineal e isótropo, la ley de Hook generalizada proporciona la relación lineal entre la perturbación en el tensor de esfuerzos  $\mathbf{T} = (T_{ij})$  y la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ , considerados ambos infinitesimales, mediante la ecuación constitutiva (Apéndice 1)

$$\mathbf{T} = \lambda D \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow T_{ij} = \lambda D \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad [1.23]$$

siendo  $\lambda = \lambda(r)$  y  $\mu = \mu(r)$  las constantes elásticas de Lamé, de compresibilidad y rigidez respectivamente, relacionadas entre sí mediante

$$\lambda = K - 2\mu/3 \quad [1.24]$$

donde  $K$  es el modulo de compresibilidad y  $D$  la dilatación cúbica que caracteriza las variaciones de volumen. Matemáticamente, la dilatación cúbica es la divergencia del desplazamiento que, en coordenadas esféricas, viene dada por ([A.16], Apéndice 1)

$$D = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\lambda\lambda} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [1.25]$$

donde  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  y  $\varepsilon_{\lambda\lambda}$  son las componentes principales del tensor simétrico de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$ , representado por una matriz de dimensión 3×3.

- Puesto que las deformaciones son muy pequeñas, el tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se relaciona con las componentes del vector de desplazamientos a través de

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1/2) \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad [1.26]$$

cuyas componentes en coordenadas esféricas están expresadas por la ecuación [A.15] en el Apéndice 1.

Teniendo en cuenta [1.25] y [1.26], la ecuación [1.23] puede reescribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{T} = \lambda D\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] \quad [1.27]$$

Con esta expresión, y utilizando [A.15], se obtienen las componentes de  $\mathbf{T}$  en coordenadas esféricas (ecuación [A.19], Apéndice 1).

Entonces, el sistema fundamental de ecuaciones linealizadas para el desplazamiento, el potencial perturbador y el tensor de esfuerzos se resume en las siguientes ecuaciones, que en adelante se designarán como *ecuaciones de deformación* (Farrell, 1972; Dahlen y Smith, 1975)

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 &= \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla(\mathbf{e}_r \mathbf{u} \rho_0 g_0) - \rho_0 \nabla \Phi + \mathbf{e}_r g_0 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \\ \nabla^2 \Phi &= -4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \Phi + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad [1.28]$$

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

### Condiciones de Frontera y Representación en Armónicos Esféricos

Para calcular las soluciones del modelo de Tierra SNREI, el sistema de ecuaciones de deformación [1.28] se resuelve utilizando unas condiciones de frontera apropiadas sobre los desplazamientos, tensores, gravedad y potencial gravitatorio. Por otra parte, el desplazamiento y el potencial gravitatorio pueden desarrollarse en serie de armónicos esféricos de la forma

$$\mathbf{u}(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_n(r) P_n(\cos \psi) \mathbf{e}_{r\psi} + V_n(r) \mathbf{e}_{\partial P_n(\cos \psi) / \partial \psi}) \quad [1.29]$$

$$\Phi(r, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r) P_n(\cos \psi) \quad [1.30]$$

siendo  $P_n(\cos \psi)$  los polinomios de Legendre de grado  $n$ -ésimo. Las funciones  $U_n$ ,  $V_n$  y  $\Phi_n$  son los coeficientes para las perturbaciones armónicas de grado  $n$  en el desplazamiento radial, tangencial y en el potencial gravitatorio, respectivamente. De esta forma, sustituyendo [1.29] y [1.30] en las ecuaciones de deformación [1.28] el sistema se reduce a un conjunto de seis ecuaciones diferenciales ordinarias, que pueden expresarse en notación simplificada como

$$d\mathbf{Y}/dr = A\mathbf{Y} \quad [1.31]$$

donde  $A$  es una matriz de coeficientes, de dimensión  $6 \times 6$ , que depende del modelo de Tierra y del grado del armónico esférico  $n$ .  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_6)^T = (U_n, T_m, V_n, T_{\theta n}, \Phi_{1n}, Q_n)^T$  es el vector de incógnitas, esto es, el vector de desplazamientos, el tensor de esfuerzos y el potencial gravitatorio perturbador:

- $y_1$  e  $y_3$  representan las componentes radial y tangencial del desplazamiento, respectivamente.
- $y_2$  e  $y_4$  denotan las componentes del tensor de esfuerzos radial y tangencial, respectivamente
- $Q_n$  es el coeficiente de grado  $n$  del siguiente desarrollo auxiliar

$$q = \partial \Phi / \partial r - 4\pi G \rho_0 u_r \quad [1.32]$$



- $y_6$  concierne a la derivada de  $y_5$

Para determinar la respuesta de la Tierra a la marea terrestre se resuelve [1.31] relativo a las condiciones de frontera apropiadas. Las soluciones pueden expresarse en términos de los números de Love, que se definen como

$$\begin{bmatrix} U_n(r) & V_n(r) & \Phi_{1,n}(r) \end{bmatrix}^T = \Phi_{2,n}(r) \begin{bmatrix} h_n(r)/g & l_n(r)/g & k_n(r) \end{bmatrix}^T \quad [1.33]$$

siendo  $g = g(r)$  el valor de la aceleración de la gravedad y  $\Phi_n = \Phi_{1,n} + \Phi_{2,n}$  el potencial perturbador.  $\Phi_{2,n}(r)$  es el coeficiente de grado  $n$  del desarrollo del potencial de la fuerza aplicada (en este caso la fuerza de marea terrestre) y que produce los desplazamientos,  $U_n(r)$  y  $V_n(r)$ , y el potencial adicional generado por la propia deformación  $\Phi_{1,n}(r)$ . Los factores de proporción,  $h_n(r)$ ,  $l_n(r)$  y  $k_n(r)$  entre las soluciones del problema gravito-elástico y el potencial generador de marea, se conocen como **números de Love**. De esta forma, cada modelo teórico de marea terrestre está constituido, por una parte, por el potencial generador de marea debido a la atracción gravitatoria de los cuerpos del sistema solar y, por otra parte, por una **función de transferencia de la Tierra** que describe su cambio de forma como respuesta a las variaciones del potencial generador de marea y que viene determinada por los números de Love (Haas y Schuh, 1997).

### 1.2.2.1 Los Números de Love Elásticos

Con las simplificaciones del modelo de Tierra SNREI, la respuesta elástica de la Tierra al potencial generador de marea puede describirse sobre la base de la **teoría de los números de Love** (Love, 1909, 1911, 1944), detallada posteriormente por Munk y MacDonald (1960). Teniendo en cuenta que el potencial de marea puede representarse mediante un desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas, Love consideró la propiedad de ortogonalidad de las funciones armónicas por lo que todas las deformaciones causadas por las fuerzas derivadas de dicho potencial podían representarse, con suficiente aproximación, mediante un desarrollo en serie de armónicos esféricos, siendo cada uno de sus términos proporcional al de igual grado del desarrollo del potencial. De esta forma, con el fin de describir las propiedades elásticas de la Tierra, en 1909 Love definió dos parámetros adimensionales,  $h$  y  $k$ . Posteriormente, en 1912, T. Shida añadió un tercer parámetro,  $l$ . Todos ellos se conocen como **números de Love**.

#### El Número de Love $h_n$

Si la superficie de la Tierra fuera perfectamente rígida e indeformable no existiría desplazamiento vertical bajo la acción del potencial generador de marea. Por el contrario, en el caso de una Tierra recubierta completamente por una capa simple de océano, esto es, infinitamente deformable, la superficie se desplaza verticalmente una distancia igual a la altura de la marea de equilibrio. En el caso de una Tierra elástica, la superficie se elevará una altura intermedia entre la Tierra rígida y la altura de la marea de equilibrio

$$u_r = (1/g_0) \sum_{n=2}^{\infty} h_n U_n \quad [1.34]$$

donde  $u_r$  es el desplazamiento radial bajo la acción del potencial generador de marea de un punto situado sobre la superficie terrestre,  $U_n$  es el potencial generador de marea de grado  $n$  y  $g_0$  el valor de la gravedad sobre la superficie terrestre. El número de Love  $h_n$  de grado  $n$  representa la proporción de la elevación teórica con respecto a la altura real de la marea. Por tanto, bajo la hipótesis de un modelo terrestre SNREI, el desplazamiento radial de la superficie por efecto de la marea terrestre es proporcional a la marea de equilibrio.

#### El Número de Shida $l_n$

Debido al potencial de marea, el punto considerado sobre la superficie se moverá horizontalmente. Para un modelo elástico, las componentes horizontales (positivas en las direcciones Sur y Este del desplazamiento) sobre la superficie terrestre pueden calcularse mediante

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= (1/g_0) \sum_{n=2}^{\infty} l_n \partial U_n / \partial \theta \\ u_{\lambda} &= (1/g_0) \sum_{n=2}^{\infty} (l_n / \sin \theta) \partial U_n / \partial \lambda \end{aligned} \quad [1.35]$$

donde  $u_{\theta}$  y  $u_{\lambda}$  son las componentes NS y EO, respectivamente. El factor  $l_n$  describe la proporción del ángulo definido por la componente horizontal del desplazamiento correspondiente a la distancia radial  $r$  y la componente horizontal del campo de fuerzas relativa a la gravedad  $g(r)$ .

#### El Número de Love $k_n$ y el Potencial Inducido por la Deformación

Bajo la acción del potencial generador de marea, la Tierra está sometida a una deformación elástica que conlleva una redistribución de masas. Esta última causa, a su vez, una variación indirecta en el potencial, que es proporcional al potencial generador de marea por un factor  $k_n$ . Sobre la superficie terrestre puede expresarse como

$$U' = \sum_{n=2}^{\infty} k_n U_n \quad [1.36]$$

El número de Love  $k_n$  representa la proporción entre el potencial adicional debido a la deformación de la Tierra y el potencial generador de marea. Este potencial adicional viene dado por (Sun, 1995)

$$U' = (4\pi G/R_T) \int_0^{R_T} \rho \left\{ \partial \left[ \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+3} Y_n / (2n+1) R_T^n \right] / \partial r \right\} dr \quad [1.37]$$

donde  $Y_n$  es el término de grado  $n$  del desarrollo en armónicos esféricos del desplazamiento producido. Llamando  $U'_n = (4\pi G/R_T^{n+1}) \int_0^{R_T} \rho \left( \partial \left[ r^{n+3} Y_n / (2n+1) \right] / \partial r \right) dr$ , se tiene que  $U' = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n$ .

#### 1.2.2.2 Componentes de la Respuesta de la Tierra a las Fuerzas Derivadas del Potencial Generador de Marea

Para un modelo de Tierra SNREI, cualquier efecto de la deformación observado sobre la superficie terrestre puede expresarse en términos de una combinación lineal de los números de Love  $h_n$ ,  $l_n$  y  $k_n$ . En particular, **las variaciones de la gravedad** sobre la superficie terrestre causadas por las

fuerzas derivadas del potencial generador de marea, para un modelo de Tierra SNREI, vienen dadas por (Melchior, 1983)

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n = \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n \partial U_n / \partial r \Big|_{r=R_T} \quad [1.38]$$

donde se ha designado por  $\delta_n$  al factor adimensional

$$\delta_n = 1 + 2h_n/n - (n+1)k_n/n \quad [1.39]$$

conocido como *factor gravimétrico o factor de amplitud de las mareas gravimétricas*. El primer término en [1.39] corresponde al gradiente del potencial generador de marea. El segundo término describe la variación en gravedad debida al desplazamiento radial en el campo de gravedad no perturbado. Finalmente, el tercer término representa la variación de gravedad debida a la redistribución de masas.

### 1.2.2.3 Modelos de Tierra Elástica

Generalmente, los modelos de Tierra más utilizados en el estudio de las deformaciones causadas por la fuerza de marea y por cargas que actúan sobre su superficie son los modelos SNREI, bajo la suposición de un estado inicial de esfuerzo hidrostático. Estos modelos, relativamente simples, presentan propiedades mecánicas dependientes únicamente del radio. El cálculo de estos modelos terrestres se basa en la interpretación de los tiempos de llegada de las fases sísmicas (Secc. 1.2.1). Inicialmente, los resultados se presentaban como un conjunto de tiempos de viaje observados para diferentes clases de fases sísmicas (ondas de compresión y de cizalla), a diversas profundidades. Posteriormente, cuando se dispuso de un número significativo de observaciones de oscilaciones libres de la Tierra, se desarrolló una nueva clase de modelos, que fue perfeccionada con la aplicación de técnicas de inversión para la interpretación conjunta de tiempos de viaje y oscilaciones libres. Entre los modelos SNREI de referencia más utilizados, se encuentran (p. ej., Kennet, 2006):

- **Gutenberg-Bullen A** (Gutenberg, 1959) tabulado por Alterman et al. (1961).
- **1066A** (Gilbert y Dziewonski, 1975), construido a partir de registros sísmicos globales, en particular, mediante la inversión de un conjunto de frecuencias observadas propias de oscilaciones libres de la Tierra.
- *Preliminary Reference Earth Model*, **PREM** (Dziewonski y Anderson, 1981). Este modelo utiliza un conjunto de datos más completo que 1066A (p. ej., Sun, 1995) e incluye los efectos de la disipación a través de la consideración de un factor de calidad  $Q$ .

En el estudio de la respuesta terrestre a las fuerzas derivadas del potencial de marea será suficiente considerar únicamente números de Love de grado bajo, los cuales dependen, principalmente, de los parámetros elásticos de la Tierra expresados en función de la profundidad, no siendo sensibles a la estructura de la corteza y del manto terrestre. Alsop y Kuo (1964), Denis (1977) y Wihlem (1977) investigaron el efecto de diversos modelos de Tierra SNREI, cuyas diferencias radicaban fundamentalmente en la estructura de la corteza y del manto terrestres, sobre los números

de Love. Sus resultados, concordantes, mostraban que las diferencias obtenidas entre los números de Love son muy pequeñas, con una variación máxima que, en general, no excede el 1% (Houze y Weijian, 1987). Por ejemplo, Dehant (1987) muestra diferencias entre los modelos de Tierra 1066A y PREM de, aproximadamente, el 1% para el número de Love  $h$  de grado 2.

### 1.2.3 Modificaciones al Modelo de Tierra SNREI

Actualmente, son muchas las aplicaciones que requieren modelos de Tierra realistas. Por ejemplo, el estudio de las variaciones de gravedad llevado a cabo con gravímetros superconductores y las redes de observación gravimétricas asociadas, tales como el *Global Geodynamics Project*<sup>4</sup> (Crossley, 2004; Hinderer y Crossley, 2004). En lo que respecta a medidas gravimétricas espaciales a escala global, como las obtenidas en las misiones CHAMP y GRACE, se requiere el uso de modelos de deformación por marea terrestre precisos obtenidos a partir de modelos de Tierra realistas (Metivier et al., 2005). En el caso de desplazamientos, el análisis de observaciones VLBI, donde se necesita precisión submilimétrica, debe incluir modelos de Tierra más complejos.

Los modelos de Tierra pueden estar caracterizados por su geometría (esférica o elíptica), rotación, por la dependencia espacial de sus propiedades mecánicas y por su reología (densidad, módulos de rigidez y de compresibilidad, etc.). Las relaciones entre el potencial de marea y las deformaciones que origina resultan más complicadas si se consideran, por ejemplo, la elipticidad de la Tierra, su rotación, heterogeneidades laterales en la estructura de la corteza u otros condicionantes.

Generalmente, en el estudio de las deformaciones terrestres causadas por las fuerzas derivadas del potencial generador de marea, se toma como referencia el modelo de Tierra SNREI y, posteriormente, se introducen diversas modificaciones en el mismo y se incluyen otros efectos, tales como los mencionados anteriormente, mediante el uso, entre otras técnicas, de la *teoría de perturbación*. Así, por ejemplo, para estudiar el efecto total de la Tierra sobre las oscilaciones libres, que como se ha tratado en este Capítulo es la base para el estudio de este tipo de deformaciones, deben considerarse las heterogeneidades laterales de la misma. Cabe señalar, como apuntan Alterman et al. (1974), que los diferentes efectos de las cortezas continental y oceánica sobre el modelo de Tierra también deben tenerse en cuenta y son parte de los efectos generales de las heterogeneidades de la Tierra. Hasta el momento se han tratado estas deformaciones terrestres a partir de la teoría de elasticidad según la cual, al considerar la Tierra como un medio perfectamente elástico, las características de propagación de las ondas sísmicas dependen directamente de las propiedades elásticas del medio. Sin embargo, la Tierra no es un medio perfectamente elástico, sino que su comportamiento se asemeja más al de un medio anelástico o, más aún, a uno viscoelástico, lo que debe tenerse en cuenta para aplicaciones como las mencionadas anteriormente.

---

<sup>4</sup> El *Global Geodynamic Project* (GGP) fue iniciado en Julio de 1997 por el grupo *Study of the Earth's Interior* (SEDI) de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica.

### 1.2.3.1 Rotación de la Tierra e Inercia

En la primera aproximación de un modelo de Tierra SNREI no se consideran la elipticidad y la rotación de la Tierra. Su inclusión conlleva que los números de Love dejen de ser constantes y se conviertan en dependientes de la latitud y de la frecuencia.

#### Dependencia de la Latitud de los Números de Love

La dependencia de la latitud de los números de Love está causada por el aplastamiento de la Tierra así como de las fuerzas de Coriolis y centrífuga (Melchior et al., 1984; Mathews, 1998). Este hecho fue demostrado teóricamente por Love (1911) y Warh (1981a) y, posteriormente, establecido experimentalmente por Melchior y De Becker (1983). Las ecuaciones de deformación para el sistema SNREI, introducidas en la Sección 1.2.2, pueden modificarse de forma sencilla para introducir el efecto de la rotación de la Tierra y la inercia, a través de las fuerzas de Coriolis y centrífuga consideradas como perturbaciones (Sasao et al., 1980)

- La fuerza de Coriolis,  $\mathbf{f}_{\text{cor}}$ , viene descrita en términos del producto vectorial entre la velocidad angular de rotación de la Tierra,  $\mathbf{\Omega}$ , y la cantidad de movimiento del punto considerado,

$\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ , esto es

$$\mathbf{f}_{\text{cor}} = 2(\rho_0 + \rho_1) \mathbf{\Omega} \times \partial \mathbf{u} / \partial t \quad [1.40]$$

siendo  $\rho = (\rho_0 + \rho_1)$  la densidad en el estado deformado.

- La fuerza centrífuga, dada por

$$\mathbf{f}_{\text{cen}} = \mathbf{\Omega}(\rho_0 + \rho_1) \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) \quad [1.41]$$

puede representarse como el gradiente del potencial centrífugo, es decir,  $\mathbf{f}_{\text{cen}} = \nabla \psi_2$ , donde

$$\psi_2 = -(1/2)\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad [1.42]$$

con  $\Omega$  la velocidad angular de rotación de la Tierra,  $r$  la distancia radial y  $\theta$  la colatitud.

Introduciendo [1.40] y el gradiente de [1.42] en la ecuación del momento [1.14], se incluye el efecto de la rotación de la Tierra y de la fuerza centrífuga en el estudio de las deformaciones de la Tierra debidas a la fuerza de marea, es decir

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{T}_E - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{\nabla} \mathbf{\Omega}_0) - \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{\nabla} \Phi - \rho_1 \mathbf{\nabla} \psi_0 - 2(\rho_0 + \rho_1) \mathbf{\Omega} \times \partial \mathbf{u} / \partial t - (\rho_0 + \rho_1) \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u})$$

que, de forma análoga a como se obtuvo [1.15], omitiendo el producto de dos perturbaciones infinitesimales, los términos de segundo orden y restando la posición de equilibrio, resulta

$$\rho_0 \left( \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 - \mathbf{u} \times \partial \mathbf{\Omega} / \partial t \right) = \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{T}_E - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{\nabla} \mathbf{T}_0) - \rho_0 \mathbf{\nabla} \Phi - \rho_1 \mathbf{\nabla} (\psi_0 + \psi_2) \quad [1.43]$$

Obsérvese que en esta expresión el esfuerzo inicial [1.3] también se encuentra sujeto a la aceleración centrífuga, de forma que [1.6] se transforma en

$$\mathbf{\nabla} p_0 = -\rho_0 \mathbf{\nabla} (\psi_0 + \psi_2) \quad [1.44]$$

Alternativamente, otro método para incluir los efectos de la elipticidad de la Tierra y su rotación consiste en considerar en las ecuaciones de deformación [1.28] la densidad, los parámetros de Lamé

y el potencial gravitatorio inicial como función, no sólo del radio, sino también de la latitud (Smith, 1974; Wahr, 1981). Independientemente del método seguido para su obtención, los efectos característicos de la deformación (desplazamientos, variaciones de gravedad, etc.) pueden representarse en función de unos parámetros adimensionales, equivalentes a los números de Love. En este caso, debido a que los modelos que tienen en cuenta la elipticidad de la Tierra no poseen simetría esférica, dichos parámetros son función de la latitud y dependen del orden y del grado del armónico esférico implicado del potencial generador de marea. Más aun, éstos pueden expresarse como la suma de una parte constante y una componente dependiente de la latitud (Warh, 1981b; Dehant, 1987). La dependencia de la latitud sobre los números de Love es del orden de  $10^{-3}$  (Agnew, 2005) siendo, en particular, su influencia para el número de Love  $h$  de grado 2 de, aproximadamente, un 0,5% (Ray, 1993).

### Dependencia de la Frecuencia de los Números de Love

La elipticidad de la Tierra se extiende a la frontera núcleo-manto. Debido a las direcciones diferentes del eje de rotación del núcleo líquido y del eje de rotación del manto terrestre, la Tierra presenta un modo normal, llamado *Nutación Libre del Núcleo* (FCN, acrónimo de *Free Core Nutation*) con una frecuencia propia en la banda de marea diurna (Toomre, 1974). Esto es, el núcleo líquido encerrado en el manto elíptico presenta un modo de oscilación libre, en el cual el núcleo líquido y el manto sólido realizan movimientos de precesión el uno alrededor del otro (inducidos por la presión del líquido con la frontera elíptica y la rotación). Este modo FCN, con periodo de 461 días sidéreos, conduce a una resonancia en la banda de marea diurna que puede detectarse, actualmente, con observaciones de marea terrestre gravimétrica realizadas con superconductores (p. ej., Hinderer et al., 2000; Sun et al., 2004), a partir de datos VLBI (Defraigne et al., 1994; Schuh y Haas, 1998) e incluso puede detectarse mediante la utilización de extensómetros (p. ej., Mukai et al., 2004).

Estos efectos, para la banda de marea diurna, pueden expresarse mediante números de Love dependientes de la frecuencia, obtenidos a partir del formalismo teórico desarrollado por Warh (1981b), que consiste en aproximarlos por un desarrollo en términos de las frecuencias resonantes, de la forma (Haas y Schuh, 1997; Dehant et al., 1999; McCarthy y Petit, 2003)

$$\begin{aligned} h_{21}(\omega) &= h_{21}(\omega_{O1}) + h_{RS}(\omega - \omega_{O1})/(\omega_{FCN} - \omega) \\ l_{21}(\omega) &= l_{21}(\omega_{O1}) + l_{RS}(\omega - \omega_{O1})/(\omega_{FCN} - \omega) \\ k_{21}(\omega) &= k_{21}(\omega_{O1}) + k_{RS}(\omega - \omega_{O1})/(\omega_{FCN} - \omega) \end{aligned} \quad [1.45]$$

donde  $h_{21}(\omega)$ ,  $l_{21}(\omega)$  y  $k_{21}(\omega)$  denotan los números de Love de grado dos y orden 1 dependientes de la frecuencia  $\omega$ . A su vez,  $\omega_{O1}$  y  $\omega_{FCN}$  son las frecuencias resonantes correspondientes a la marea  $O_1$  y al FCN, respectivamente, y  $h_{RS}$ ,  $l_{RS}$  y  $k_{RS}$  son los respectivos factores de resonancia constantes<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Los factores de resonancia están relacionados con la forma geométrica de la Tierra y las propiedades reológicas de su manto. Para las frecuencias de marea afectadas por la resonancia del FCN estos parámetros pueden calcularse a partir de observaciones de marea gravimétrica, llevadas a cabo con gravímetros superconductores, y métodos de cálculo basados en

Dentro de esta banda de marea diurna, las ondas afectadas en mayor medida por la FCN son  $P_1$ ,  $S_1$ ,  $K_1$ ,  $\psi_1$  y  $\phi_1$  (Sun et al., 2002). Obsérvese que, en las fórmulas [1.45], se ha considerado únicamente el término correspondiente a la frecuencia propia asociada al modo normal FCN. Estas expresiones deben extenderse para incluir las frecuencias de resonancia asociadas con las nutaciones anuales y semi-anuales, relacionadas con estas mareas, tanto progradas como retrógradas, puesto que también se encuentran afectadas por la FCN (Sun et al., 2002).

### Dependencia de la Latitud y de la Frecuencia del Factor Gravimétrico

La inclusión de los efectos de la rotación de la Tierra y de la inercia afectará también, como consecuencia de lo expuesto anteriormente, al factor gravimétrico. Éste deja de ser simplemente una combinación de los números de Love de desplazamiento,  $h_n$ , y del potencial inducido por la deformación,  $k_n$ . La inclusión del efecto de rotación de la Tierra y su elipticidad afecta al factor gravimétrico de grado 2 en torno al 1% (Baker, 1984).

Siguiendo los trabajos de Warh (1981) y Dehant (1987), el factor de amplitud de las mareas gravimétricas de grado  $n = 2$  y orden  $m = 1$  y  $2$ , dado por [1.39], podrá expresarse como la suma de dos componentes, una de ellas dependiente de la latitud, de la forma (Dehant et al., 1999)

$$\delta = \delta^0 + \delta^1 \cdot \begin{cases} \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right) (7 \cos^2 \theta - 3), & m = 1 \\ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (7 \cos^2 \theta - 1), & m = 2 \end{cases} \quad [1.46]$$

donde  $\delta^l$  es el factor dependiente de la latitud y  $\theta$  la colatitud del punto de cálculo. Obsérvese que, para la banda de marea semi-diurna ambas componentes,  $\delta^0$  y  $\delta^1$ , pueden considerarse independientes de la frecuencia, pero no así para la banda de marea diurna, por las resonancias del modo normal FCN señaladas anteriormente. Asimismo, existirá también una dependencia de la frecuencia de estos factores para la banda de marea de largo periodo, ocasionada en este caso por la anelasticidad del manto terrestre que se tratara la Sección 1.2.3.3.

Finalmente, en relación con la dependencia de la latitud de los factores gravimétricos cabe destacar el trabajo de Melchior (1983), quien estudió la distribución mundial, en función de la latitud, de los factores gravimétricos para las principales ondas de marea. Más recientemente, Metivier et al. (2005) señala que la elipticidad de la Tierra afecta la amplitud de la marea gravimétrica, para el constituyente armónico  $M_2$ , en torno a unos 200 nanoGal<sup>6</sup>. Teniendo en cuenta la precisión actual de las medidas con superconductores, aproximadamente 1 nanoGal, esta perturbación no debe ser ignorada ya que podría detectarse siempre y cuando se eliminen los efectos oceánicos correctamente.

---

procedimientos de mínimos cuadrados (p.ej., Marquardt, 1963), en técnicas de inversión generalizada (p.ej. Tarantola y Valette, 1982) o aproximación bayesiana (p. ej. Florsch et al., 1995; Florsch y Hinderer, 1998; 2000).

<sup>6</sup> La unidad de medida comúnmente utilizada en las medidas gravimétricas es el microGal, denotado como  $\mu\text{Gal}$ . La conversión a la unidad equivalente en el SI es  $1 \mu\text{Gal} = 10 \text{ nm/s}^2 = 10^{-8} \text{ m/s}^2$ .

### 1.2.3.2 Esfuerzos Iniciales Desviatorios y Heterogeneidades Laterales

La Tierra no es exactamente elipsoidal, aunque presenta variaciones laterales en su estructura y un esfuerzo inicial desviatorio. En el caso general, para un modelo de Tierra SNREI se estableció como hipótesis un estado inicial de equilibrio hidrostático y la no existencia de esfuerzos iniciales desviatorios. Estos esfuerzos representan un cambio en la forma y se deben a variaciones de densidad laterales causadas, principalmente, por movimientos convectivos en el manto terrestre.

#### Esfuerzo Inicial Desviatorio

En la ecuación [1.3] se considera que el tensor de esfuerzos inicial  $\mathbf{T}_0$  está compuesto de una presión hidrostática (parte isótropa) más una parte desviatoria  $\boldsymbol{\tau}_0$  del esfuerzo inicial debido a las variaciones laterales de densidad (Bullen, 1975). Así, se tiene que

$$\mathbf{T}_0 = -p_0 \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_0 \quad [1.47]$$

Puesto que este esfuerzo desviador es muy pequeño, puede tratarse mediante la *teoría de perturbación*. En este caso, sustituyendo la ecuación [1.47] en [1.4] se obtiene

$$\rho_0 \nabla \psi_0 = \nabla \cdot (-p_0 \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_0) = -\nabla p_0 + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_0) \quad [1.48]$$

#### Heterogeneidades Laterales

Wang (1991; 1994) y Dehant et al. (1999) estudian la influencia de heterogeneidades laterales sobre las mareas terrestres. Estas variaciones de la estructura terrestre modifican el desplazamiento vertical causado por el efecto de marea un máximo del 0,3%, siendo aun inferior en el caso de las variaciones de gravedad, ya que la mayor parte de la señal de marea gravimétrica se debe a la atracción gravitatoria directa de la fuerza de marea (Baker, 1984). Kopaev y Kuznetsov (2000) encuentran discrepancias máximas en los factores gravimétricos causadas por heterogeneidades laterales con respecto al modelo PREM de  $\pm 0,05\%$ , esto es, del orden de  $10^{-3} \mu\text{Gal}$  (Baker et al., 1996; Baker y Bos, 2003). Por el contrario, los efectos de las heterogeneidades laterales en la estructura terrestre sobre los efectos de inclinación y extensión pueden ser mayores, como ponen de manifiesto Beaumont y Berger (1974), principalmente para medidas realizadas en las proximidades de una discontinuidad entre dos medios elásticos diferentes (Baker, 1984).

Metivier et al. (2005) desarrollan una aproximación alternativa para calcular las variaciones de gravedad para un modelo terrestre, sin simetría radial, con heterogeneidades laterales que permiten tener en cuenta variaciones laterales de la densidad y de los parámetros reológicos considerando, además, un estado de referencia inicial hidrostático junto con un esfuerzo inicial desviatorio. Aunque estos efectos se pueden ignorar en el estudio de la marea terrestre, los autores concluyen que estas variaciones laterales en la estructura interna de la Tierra tienen un impacto, al menos a escala global, muy pequeño sobre las deformaciones elasto-gravitatorias provocadas por las cargas que actúan sobre la superficie terrestre, como pueden ser la oceánica y la atmosférica.



### 1.2.3.3 Anelasticidad de la Tierra

Hasta ahora, los modelos esféricos y elípticos que se han considerado asumían un comportamiento perfectamente elástico de la Tierra. Sin embargo, la respuesta de la Tierra a fuerzas externas, en periodos que van desde unos pocos minutos a miles de años, no es perfectamente elástica. Parte de la energía almacenada como deformación elástica no se recupera, sino que se disipa (es absorbida por el medio) en forma de calor por fricción. Este fenómeno recibe el nombre de **absorción anelástica**. El comportamiento anelástico de la Tierra es extremadamente complejo ya que los mecanismos de fricción interna implicados en la absorción elástica dependen, entre otros, de su constitución química, estado termodinámico, etc.

El factor gravimétrico  $\delta_n$  dado en [1.39], es muy sensible a los efectos de la anelasticidad de la Tierra (Dehant, 1986). El hecho de que el manto terrestre no sea perfectamente elástico, introduce dos efectos sobre los números de Love.

- Por una parte, la anelasticidad del manto terrestre, en periodos de marea, causa un retraso en el tiempo de la respuesta de marea, es decir, un desfase de la deformación por marea con respecto al potencial generador (Wahr y Bergen, 1986). Una forma de incluir el efecto de la anelasticidad en el estudio de las deformaciones por marea se basaría en modificar las ecuaciones básicas que rigen la deformación, lo que conlleva grandes dificultades en el desarrollo teórico del problema. Por esta razón, generalmente, la anelasticidad de la Tierra se expresa mediante unos números de Love complejos (Haas y Schuh, 1997), tales que la parte imaginaria representa la respuesta de marea desfasada. La construcción de estos números de Love complejos se basa en la representación de la atenuación elástica de las ondas sísmicas, con la distancia y el tiempo, considerando los mecanismos de disipación de la energía de marea que se produce por la fricción interna (Lambeck, 1988).
- Por otra parte, debido a la dispersión anelástica, los números de Love dependen de la frecuencia, especialmente dentro de la banda de marea de largo periodo.

El comportamiento anelástico de la Tierra puede describirse mediante la cantidad de energía disipada en el interior de la Tierra, cuando ésta es sometida a un esfuerzo. El parámetro clásico utilizado para describir la anelasticidad es el **factor de calidad  $Q$** , que relaciona la energía elástica total almacenada con la disipada por fenómenos de absorción anelástica. La disipación en el interior de la Tierra puede ocurrir por compresión, cizalla o ambos. Por ello se definen:

- $Q_K$  el factor de calidad intrínseco para el módulo de compresibilidad  $K$ , en procesos de disipación por compresión.
- $Q_\mu$  el factor de calidad intrínseco para el módulo de rigidez, en procesos de disipación por esfuerzo de cizalla.

Puesto que existen evidencias, obtenidas mediante observación de oscilaciones libres de la Tierra y del periodo Chandleriano, de que los valores del factor de calidad  $Q$  en el manto terrestre dependen de la frecuencia (Zschau, 1986; Pagiatakis, 1988), deben utilizarse modelos  $Q$  de anelasticidad

dependientes de la profundidad y de la frecuencia (p. ej., Mathews, 2001). Para la determinación de un modelo  $Q$ , asumiendo una dependencia de la frecuencia según la ley de la potencia  $Q \sim \omega^\alpha$ , para frecuencias  $\omega$  que varían desde la marea semi-diurna  $M_2$  hasta el periodo Chandleriano (unos 435 días), y el coeficiente constante  $\alpha$  con un valor comprendido entre 0 y 0,5, se requieren:

- una distribución en función de la profundidad de  $Q$  para una cierta frecuencia de referencia  $\omega_1$ .
- una estructura de elasticidad dada en otra frecuencia de referencia  $\omega_0$ .
- una distribución en función de la profundidad.

Asumiendo que la dependencia de la frecuencia de  $Q$  es conocida, es posible determinar el módulo de compresibilidad complejo en cualquier frecuencia dada a partir de las cantidades anteriores. Puesto que la distribución del factor de calidad  $Q$  en el interior de la Tierra no se conoce demasiado bien, existen numerosas propuestas de modelos  $Q$ . Citando algunos de ellas, que serán referenciadas posteriormente en esta memoria, se encuentran los modelos SL8 (Anderson y Hart, 1978) y PREM (Dziewonski y Anderson, 1981). Ambos  $Q$ -modelos toman los parámetros de elasticidad y de densidad del modelo elástico PREM y están contruidos a partir de un rango amplio de observaciones de ondas internas y superficiales, así como datos de modos normales. Su principal diferencia radica en el periodo de referencia ( $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ), siendo de 30 s y 1 s para SL8 y PREM, respectivamente (Zschau, 1986).

Una vez determinadas las partes reales e imaginarias de los parámetros de Lamé, a partir de los valores del factor de calidad  $Q$ , la respuesta de la Tierra a las fuerzas externas, se calcula por integración de las ecuaciones en derivadas parciales: la ecuación de movimiento, la relación de esfuerzo-deformación y la ecuación de Poisson. En virtud del *Principio de Correspondencia* (Biot, 1954, Peltier, 1974), la relación constitutiva entre esfuerzo y deformación de un material no elástico obedece la Ley de Hook con parámetros de Lamé complejos en el dominio de la frecuencia. La solución se obtiene, por tanto, resolviendo un problema equivalente elástico en el dominio de la frecuencia, que puede expresarse como

$$d\mathbf{Y}(s, r)/dr = \mathbf{A}(s, r)\mathbf{Y}(s, r) \quad [1.49]$$

donde  $r$  denota el radio y  $s$  la variable de Laplace. En este caso, la matriz  $\mathbf{A}$  está implícitamente parametrizada por la dependencia de  $s$  y el vector solución  $\mathbf{Y}$  es complejo, pudiendo expresarse sus componentes como  $z_i = (y_i^{\Re} \ y_i^{\Im})^T$ , donde los superíndices  $\Re$  e  $\Im$  denotan sus componente real e imaginaria, respectivamente.

Usando estos modelos  $Q$ , Zschau (1978, 1986) calculó los números de Love complejos y encontró que las partes imaginarias son del orden de una milésima de la parte real. Para la marea semi-diurna  $M_2$  el incremento relativo del número de Love  $k$  con respecto a una Tierra elástica por el efecto de dispersión debido a la no elasticidad es del orden del 2% y el desfase de la marea terrestre se encuentra en torno a  $0,21^\circ$  (Zschau, 1986). En general, para periodos de marea diurnos y semi-diurnos, los números de Love se incrementan por la anelasticidad del orden del 2%, aunque su efecto

para los periodos de marea más largos son mayores (Baker, 1984 y Pagiatakis, 1990). Cabe resaltar que los números de Love se encuentran más afectados por la anelasticidad que los factores de amplitud de las mareas gravimétricas y clinométricas. Así, Wahr y Bergen (1986) estiman que el efecto de la anelasticidad de la Tierra perturba el número de Love  $h$  de grado  $n$  del orden del 1-2% y obtienen, además, que la dispersión de los números de Love proveniente de la anelasticidad de la Tierra incrementa los factores gravimétricos diurnos y semi-diurnos un máximo del 0,36%. Dehant (1986) calcula los factores gravimétricos para las ondas de marea  $M_2$  y  $O_1$  teniendo en cuenta la anelasticidad de la Tierra. En ambos casos, encuentra un incremento inferior al 0,5% en los mismos debido a la anelasticidad. Zschau y Wang (1986), asimismo, realizan un estudio sobre la dispersión y desfase, debido a la anelasticidad, de los factores de amplitud de las mareas gravimétricas para  $M_2$ ,  $O_1$ ,  $M_f$ ,  $M_m$ ,  $S_{sa}$ , el periodo Chandleriano y el periodo de 18,6 años. Sus resultados muestran que el factor gravimétrico apenas se encuentra afectado por la anelasticidad, lo que se atribuye a la compensación de los efectos en los números de Love  $h$  y  $k$ . Asimismo, el desfase de marea resulta inferior a una centésima de grado para periodos hasta el Chandleriano (Dehant y Zschau, 1989; Hinderer y Crossley, 2000). El efecto de la anelasticidad sobre el factor de inclinación, según Zschau y Wang, es ligeramente superior al de gravedad aunque todavía muy pequeño y, en el caso del constituyente  $M_2$ , encuentran un desfase de menos de una décima de grado.

Actualmente, entre los modelos teóricos de marea terrestre más comúnmente utilizados, en particular como referencia para la intercomparación de diferentes modelos calculados, se encuentran los denominados DDW de Dehant (1997) y Dehant et al. (1999). Estos modelos proporcionan los números de Love y los factores gravimétricos para una Tierra elíptica, rotando y en equilibrio hidrostático usando el modelo PREM, con modificaciones en su capa superficial, en lo que se denomina **modelo elástico DDW**. Además, estos autores proporcionan resultados equivalentes para un modelo anelástico y no hidrostático, denotado por **modelo anelástico DDW**. El modelo anelástico utiliza una frecuencia con  $\alpha = 0,15$ , un modelo de  $Q$  dado por Widmer et al. (1991) y un periodo de referencia de 300 s. Este modelo anelástico incrementa los factores de amplitud (Tabla 1.1), con respecto al modelo elástico DDW, un 0,12%. Ambos modelos, DDW elástico y anelástico, serán considerados en Capítulos posteriores para su intercomparación a partir de resultados de análisis de observaciones de marea terrestre gravimétrica.

**TABLA 1.1:** Valores numéricos de los factores gravimétricos de grado 2 para el modelo DDW, casos elástico y anelástico no-hidrostático (Dehant et al., 1999), según las ecuaciones [1.46].

Onda	Modelo de Tierra			
	Elástico Hidrostático		Anelástico No-Hidrostático	
	$\delta^0$	$\delta^1$	$\delta^0$	$\delta^1$
$M_2$	1,16030	0,00007	1,16172	0,00010
$O_1$	1,15279	0,00004	1,15424	0,00008
$P_1$	1,14777	-0,00013	1,14915	-0,00010
$K_1$	1,13283	-0,00060	1,13489	-0,00057

### 1.2.3.4 Visco-Elasticidad de la Tierra

Cuando se investiga la respuesta de la Tierra sometida a la acción de fuerzas externas, ya sean las derivadas del potencial de marea o las debidas a las cargas que actúan sobre su superficie, con el fin de ajustar el resultado teórico a la realidad, es necesario considerar los efectos de la viscosidad puesto que, en el interior de la Tierra se aproxima más a un cuerpo visco-elástico. En las últimas décadas se han realizado numerosas investigaciones sobre la respuesta visco-elástica de la Tierra, principalmente, en relación a problemas de cargas ejercidas por volúmenes de hielo y el ajuste isostático glacial. En conexión con las mareas terrestres, uno de los primeros autores en abordar el problema fue Nagasawa (1979), quien consideró la respuesta terrestre a las fuerzas de marea aproximando el modelo de Tierra como un cuerpo de Kelvin<sup>7</sup>.

En frecuencias de marea, la reología de la Tierra puede considerarse como un Sólido Lineal Estándar (SLE) (Nowick y Berry, 1972; Pagitakis, 1990), compuesto de un elemento elástico y un cuerpo de Maxwell<sup>8</sup>. Cuando se aplica un esfuerzo sobre este modelo visco-elástico lineal se produce una deformación. Debido a su componente viscosa se necesita algún tiempo antes de que se alcance nuevamente el estado de equilibrio. El problema de las deformaciones de la Tierra causadas por fuerzas externas, para un SLE, puede obtenerse basándose en la teoría de la deformación elástica teniendo en cuenta la reología visco-elástica lineal del modelo. Inicialmente, las ecuaciones de equilibrio dadas en el caso elástico son válidas para cualquier medio continuo. La diferencia entre los problemas elástico y visco-elástico lineales radica en la relación constitutiva entre el esfuerzo y la deformación, que es diferente en cada caso. Así, la ecuación constitutiva de esfuerzo deformación, equivalente a [1.23], para un SLE viene dada por (Peltier, 1982)

$$\dot{\mathbf{T}} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta} \left( \mathbf{T} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{I} \right) = \lambda \dot{\mathbf{D}} \mathbf{I} + 2\mu_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{2\mu_1 \mu_2}{\eta} \left( \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} \dot{\mathbf{D}} \mathbf{I} \right) \quad [1.50]$$

donde  $\lambda$  y  $\mu_1$  son los parámetros elásticos de Lamé asociados con el elemento elástico y  $\mu_2$  y  $\eta$  corresponden al módulo de rigidez y de viscosidad asociados con el cuerpo de Maxwell (el punto sobre las variables indica la derivada respecto al tiempo). En este caso, la relación constitutiva esfuerzo-deformación viene dada por (Peltier, 1974)

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^E - (\mu/\eta) \left( \mathbf{T} - (1/3) \bar{\mathbf{T}} \mathbf{I} \right) \quad [1.51]$$

siendo  $\dot{\mathbf{T}}^E$  el esfuerzo elástico dado por la ecuación [1.23].

---

<sup>7</sup> Un *cuerpo de Kelvin* es el modelo compuesto por un elemento elástico y otro viscoso dispuestos en paralelo. Cuando se somete este cuerpo a una carga el elemento viscoso retarda la deformación elástica y, por tanto, la deformación y su recuperación (que es una propiedad elástica) son funciones del tiempo.

<sup>8</sup> Un *cuerpo de Maxwell* es el modelo compuesto por un elemento elástico y otro viscoso dispuestos en serie. Cuando se somete este cuerpo a una carga, primero se deforma instantáneamente y después la deformación es proporcional al tiempo.

## 1.3 La Marea Oceánica

La marea oceánica,  $\zeta_{mo}(\theta, \lambda, t)$ , en un punto cualquiera de océano de coordenadas  $(\theta, \lambda)$  en un instante  $t$ , se define como la elevación de la superficie del océano con respecto a su posición media debido al efecto de atracción lunisolar. La marea oceánica real es mucho más compleja que la marea de equilibrio que se produciría en las condiciones idealizadas de una Tierra rígida recubierta por una capa de océano de profundidad constante, incompresible y no viscoso, ya que se encuentra influenciada por muchos factores, como la topografía del fondo oceánico y la presencia de fronteras costeras, la respuesta dinámica de los océanos, fricción, fuerzas de Coriolis, etc. La marea oceánica puede describirse mediante la modelización hidrodinámica de las mareas, a partir de observaciones (con mareógrafos, sensores de presión de fondo o altímetros de satélite), o a través de la combinación de ambos: hidrodinámica y datos observados. Todas estas cuestiones se abordarán en el Capítulo 3. En esta Sección se describen, de manera concisa, los conceptos y la formulación relativa a los dos métodos clásicos más utilizados en el análisis de las observaciones de marea oceánica. Se remite a Godin (1972), Foreman (1977) y Melchior (1983) para una incursión más profunda en los métodos clásicos, así como a las referencias específicas que se irán señalando en el texto.

### 1.3.1 El Método de Análisis Armónico

El *método análisis armónico* de las observaciones de marea oceánica, desarrollado inicialmente por Lord Kelvin y Sir G. Darwin en 1867, se basa en la hipótesis de que la elevación de la marea oceánica, en un instante  $t$  y un punto de coordenadas geográficas  $(\lambda, \phi)$ , puede expresarse como una suma finita de constituyentes de marea independientes, cada uno de los cuales se atribuye a una periodicidad asociada a la fuerza generadora de marea, de la forma (Munk y Cartwright, 1966; Cartwright y Tayler, 1971)

$$\zeta(\lambda, \phi, t) = \sum_{k=1}^K A_k(\lambda, \phi) \cos[\Theta_k(t) - G_k(\lambda, \phi)] \quad [1.52]$$

siendo  $K$  el número de constituyentes de marea que se quieren estimar. Los coeficientes  $A_k(\lambda, \phi)$  y  $G_k(\lambda, \phi)$ , también denotados por *constantes armónicas*, representan la amplitud y el desfase con respecto a la marea de equilibrio en Greenwich del constituyente  $k$ , respectivamente. Más específicamente, la amplitud  $A_k$  describe el rango medio entre la marea alta y baja, mientras que  $G_k$  mide el retardo en el tiempo con respecto a la fase de la marea de equilibrio en el meridiano de Greenwich.  $\Theta_k(t)$  es el argumento astronómico en Greenwich<sup>9</sup> y, puesto que estos valores varían linealmente con el tiempo, se expresa como función de su frecuencia,  $\dot{\Theta}_k \doteq \omega_k$ <sup>10</sup>. Para cada

---

<sup>9</sup> Se define como  $\Theta_k(t) = A\tau + Bs + Ch + Dp + EN' + Fp_s$ , siendo el conjunto de coeficientes  $\{A, B, C, D, E \text{ y } F\}$  números enteros,  $t$  el tiempo solar medio en Greenwich,  $s$  la longitud eclíptica media de la Luna,  $h$  la longitud eclíptica media del Sol,  $p$  la longitud eclíptica media del perigeo lunar,  $N'$  la longitud eclíptica media del nodo lunar ascendente de la órbita lunar cambiada de signo,  $p_s$  la longitud eclíptica media del perihelio y  $\tau$  el tiempo lunar medio en Greenwich.

<sup>10</sup> Mediante  $\Theta_k(t) = \dot{\Theta}_k t + \Theta_k(t_0)$ , siendo  $t_0$  el argumento astronómico en el instante origen.

constituyente de marea, bajo la asunción de respuesta oceánica lineal, el argumento astronómico en el instante origen puede ignorarse sin pérdida de generalidad, no así cuando se considera la superposición de constituyentes armónicos (Schwiderski, 1980c). En el caso de la marea oceánica, las constantes armónicas dependen de forma compleja de las propiedades dinámicas del océano y de factores que afectan a las mismas, como la profundidad de la cuenca oceánica y de su tamaño. En particular, en aguas someras la expresión anterior debe completarse con los constituyentes armónicos debidos a procesos no-lineales en la propagación de la onda de marea (fuerza de fricción o rozamiento con el fondo oceánico, continuidad y advección). También deben tenerse en cuenta los constituyentes de marea de origen no gravitacional, como los inducidos por la radiación solar (p. ej.,  $S_1$ ). Por otra parte, puesto que los registros de marea están limitados a un periodo de tiempo determinado, generalmente de unos pocos años e incluso menos, no es posible resolver frecuencias muy próximas como armónicos independientes, si no que se representan como unas pequeñas correcciones aplicadas individualmente a los constituyentes de marea lunares (Munk y Cartwright, 1966; Cartwright y Taylor, 1971; Gil, 2002). Por esta razón, la expresión [1.52] se reemplaza por (p. ej., Schwiderski, 1980; Smith, 1999)

$$\zeta(\lambda, \phi, t) = \sum_{k=1}^K f_k A_k(\lambda, \phi) \cos[\omega_k t + \Theta_k(t_0) - G_k(\lambda, \phi) + u_k] \quad [1.53]$$

donde los factores  $f_k$  y  $u_k$  varían sólo a lo largo de los años, principalmente con el periodo nodal de 18,61 años. El plano en el cual la Luna orbita la Tierra se encuentra inclinado  $5,15^\circ$  con respecto al plano de la eclíptica. Puesto que, dicho plano lunar rota lentamente a lo largo del periodo nodal (precesión del plano orbital sobre el equinoccio), resulta que la amplitud de la declinación lunar aumenta y decrece lentamente sobre este periodo. Estos factores,  $f_k$  y  $u_k$ , introducidos por Darwin, representan los **factores de corrección nodal en amplitud y fase**, respectivamente. Se calculan a partir del potencial astronómico utilizando la relación de equilibrio (Plag, 1985). Obsérvese que para los constituyentes de marea solares  $f_k$  y  $u_k$  toman los valores 1 y 0, respectivamente, dado que no se producen efectos nodales sobre ellos. Claramente, tampoco se calculan correcciones nodales para los largos periodos.

Así pues, las incógnitas a estimar en el proceso de análisis armónico son los coeficientes  $A_k$  y  $G_k$  para las frecuencias especificadas.

### **Aplicación del Método de Análisis Armónico a los Registros de Marea Oceánica**

Dada una serie de observaciones de la elevación de la superficie oceánica, en una determinada localización y relativa a un punto fijo

$$h = \{h_i, i = 1, \dots, i_{\max}\}$$

registrada a intervalos regulares,  $\Delta t$ , sobre un periodo de tiempo  $0 < t < t_{\max}$ , tal que  $t_{\max} = (i_{\max} - 1)\Delta t$ .

La elevación media del nivel del mar puede expresarse como (Schwiderski, 1984)

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} h_i / i_{\max} \quad [1.54]$$

En consecuencia, la elevación de la superficie oceánica relativa a este nivel medio en cada instante

$$\zeta = \{\zeta_i, i = 1, \dots, i_{\max}\}$$

bajo la suposición de que el periodo de muestreo es lo suficientemente pequeño como para considerar la función  $\zeta$  continua en el tiempo, vendrá definida por

$$\zeta_i = \zeta(t_i) = h_i - \bar{h} \quad [1.55]$$

Así, se trata de aproximar  $\zeta_i = \zeta(t_i)$  según [1.53], de tal forma que en dicha expresión todos los parámetros se determinan mediante el desarrollo del potencial generador de marea, excepto los coeficientes  $A_k$  y  $G_k$  que deben obtenerse a partir de un procedimiento de mínimos cuadrados. Con este fin, la marea oceánica  $\zeta_i$  se expresa según [1.53] más un término de error,  $\varepsilon_i(\lambda, \phi)$ , de tal manera que las constantes armónicas incógnitas minimicen la expresión

$$\sum_{i=1}^K [\varepsilon_i(\lambda, \phi)]^2 = \sum_{i=1}^K \left[ \zeta_i(\lambda, \phi) - \sum_{k=1}^K f_k A_k(\lambda, \phi) \cos(\omega_k t + \Theta_k(t_0) - G_k(\lambda, \phi) + u_k) \right]^2 \quad [1.56]$$

Generalmente, para determinar  $A_k$  y  $G_k$  siguiendo este procedimiento de mínimos cuadrados y con el fin de evitar singularidades, el sumatorio en la expresión [1.53] se reescribe de la forma

$$\sum_{k=1}^K f_k \left[ C_k(\lambda, \phi) \cos(\omega_k t + \Theta_k(t_0) + u_k) + S_k(\lambda, \phi) \sin(\omega_k t + \Theta_k(t_0) + u_k) \right] \quad [1.57]$$

siendo  $C_k$  y  $S_k$  las componentes en fase con el potencial de marea en Greenwich y en cuadratura, respectivamente. Ambas componentes, que serán en este caso las incógnitas determinadas mediante el procedimiento de mínimos cuadrados, se encuentran relacionadas con la amplitud y la fase a partir las siguientes expresiones (p. ej., Smith, 1999)

$$A_k = \sqrt{(C_k)^2 + (S_k)^2} \quad G_k = \arctan(S_k/C_k) \quad [1.58]$$

Es importante señalar que la determinación de los constituyentes de marea a través del análisis se lleva a cabo en función de la longitud de la serie temporal, aplicando el criterio de Rayleigh. En general, según este criterio, dada una serie discreta de observaciones a intervalos regulares,  $\Delta t$ , sobre un periodo de tiempo de longitud  $t_{\max}$ , dos frecuencias de marea con velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se pueden separar si éstas difieren en al menos  $2\pi/t_{\max}$ . Esto es equivalente a decir que sus periodos son medibles dentro del intervalo  $T_d = t_{\max} \times \Delta t$ , es decir (p. ej., Godin, 1972)

$$T_d \geq T_1 \cdot T_2 / (T_1 - T_2) \quad [1.59]$$

En general, dentro del método de análisis armónico, existen diversas variantes en la formulación de las ecuaciones normales asociadas con el problema de mínimos cuadrados, así como en los algoritmos de resolución, atendiendo a las hipótesis de partida, tales como el espaciado regular o irregular de los datos, la interpolación o no de las interrupciones en los datos, el tratamiento del ruido (blanco o de color) y su distribución, etc. No es objeto de esta memoria detallar los diferentes

procedimientos, que pueden encontrarse en numerosa bibliografía, aunque sí cabe citar los dos métodos y programas que serán utilizados o referenciados:

- En primer lugar, se cita en el Capítulo 4, el método de análisis armónico desarrollado por Foreman (1977), basado en la minimización de la diferencia al cuadrado entre la señal de marea observada, valores medidos por el mareógrafo, y el modelo armónico en cada instante de medida. Si la longitud del registro no permite la inclusión directa de ciertos constituyentes en el análisis, estos se incorporan indirectamente siguiendo el método propuesto por Godin (1972), mediante la inferencia de sus amplitudes y fases de otros constituyentes próximos que sí están incluidos en el proceso.
- En segundo lugar, el método de análisis armónico utilizado para el análisis de series temporales de la elevación del nivel del mar, en los Capítulos 4 y 5, así como los registros de marea gravimétrica, en el Capítulo 6, es el desarrollado por Venedikov et al. (2005; 2003; 2001) y utilizado en el programa VAV. Debe señalarse que, inicialmente el programa VAV se desarrolló para el análisis de marea terrestre, aunque tiempo después se incorporó la opción de análisis de marea oceánica (Venedikov et al., 2006). El algoritmo fundamental se basa en el método de mínimos cuadrados aplicado en el dominio del tiempo y de la frecuencia bajo la consideración de ruido de color, lo que posibilita una estimación de la precisión independiente de la frecuencia. Asimismo, caben destacar las siguientes características de VAV (Venedikov et al., 2003):
  - Una modelización teórica apropiada de la señal de marea, que permite considerar en el proceso de análisis armónico todas las mareas parciales.
  - El procesado de la serie temporal con incrementos de tiempo arbitrarios, datos no equiespaciados e interrupciones en los mismos.
  - Diversas opciones para encontrar anomalías en las series de datos durante el proceso de análisis, que permiten mejorar considerablemente la precisión global en la estimación de los parámetros de marea.

### 1.3.2 El Método de Análisis de Respuesta

El objetivo fundamental de este método es reducir el número de constituyentes en la serie de marea observada [1.53], relacionando las características de los constituyentes menores con un número limitado de constituyentes mayores, a través de interpolaciones o extrapolaciones lineales denotadas por *funciones de transferencia* (Le Provost, 2001). Por simplicidad y ya que será suficiente para los objetivos abarcados en esta memoria, esta Sección se limita a la descripción del método de respuesta para la componente del potencial generador de marea de segundo grado,  $n = 2$ , y para las bandas de marea de largo periodo, diurna y semi-diurna,  $m = 0, 1, 2$  respectivamente. Un estudio más detallado de este método se encuentra en Munk y Cartwright (1966), Cartwright y Ray (1990), Ray y Cartwright (1994), Desai y Warh (1995), Desai y Yuan (2006).



El **método de respuesta**, introducido por Munk y Cartwright (1966), expresa la elevación de la marea oceánica en el instante  $t$  y el punto  $(\lambda, \phi)$ ,  $\zeta(\lambda, \phi, t)$ , mediante la convolución de la marea de equilibrio con una función peso, de la siguiente forma

$$\zeta(\lambda, \phi, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^2 \bar{c}_{2m}(t) * w_{2m}(\lambda, \phi, t) \right\} = \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_{2m}(t-\tau) w_{2m}(\lambda, \phi, \tau) d\tau \right\} \quad [1.60]$$

donde  $\text{Re}\{\cdot\}$  denota la parte real, la barra expresa el conjugado complejo y  $*$  el operador convolución. En la expresión anterior, se define para cada  $m$ :

$\bar{c}_{2m}$  la marea de equilibrio en Greenwich de segundo orden expresada, en el instante  $t$ , en forma compleja a partir de sus componentes real e imaginaria

$$\bar{c}_{2m}(t) = a_{2m}(t) - ib_{2m}(t) \quad [1.61]$$

$w_{2m}$  la función peso

$$w_{2m}(\lambda, \phi, t) = \sum_{s=-S}^S w_{2ms}(\lambda, \phi) \delta(t - s\Delta t) \quad [1.62]$$

con  $\Delta t$  el incremento en el tiempo sobre la marea de equilibrio elegido (generalmente dos días),  $\delta$  la respuesta impulso de Dirac y  $w_{2ms}$  los denominados **pesos respuesta** dados por

$$w_{2ms}(\lambda, \phi) = u_{2ms}(\lambda, \phi) + iv_{2ms}(\lambda, \phi) \quad [1.63]$$

con  $s$  que determina el número de pesos respuesta que se consideran (generalmente  $s$  toma el valor 1 ó 2).

Sustituyendo en [1.60], se tiene que la marea oceánica puede expresarse como una suma ponderada

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda, \phi, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{m=0}^2 \sum_{s=-S}^S \left[ a_{2m}(t - s\Delta t) - ib_{2m}(t - s\Delta t) \right] \left[ u_{2ms}(\lambda, \phi) + iv_{2ms}(\lambda, \phi) \right] \right\} = \\ &= \sum_{m=0}^2 \sum_{s=-S}^S \left[ a_{2m}(t - s\Delta t) u_{2ms}(\lambda, \phi) + b_{2m}(t - s\Delta t) v_{2ms}(\lambda, \phi) \right] \end{aligned} \quad [1.64]$$

Esta expresión proporciona la formulación mínimos cuadrados a partir de la cual se estiman, en función de la posición en el espacio, los pesos respuesta ( $u_{2ms}$ ,  $v_{2ms}$ ). Estos pesos expresan, a su vez, la marea observada como una suma ponderada de valores pasados y futuros de la marea de equilibrio. Obsérvese que, puesto que las correcciones nodales están consideradas implícitamente en  $\bar{c}_{2m}$ , estos parámetros no aparecerán en [1.64].

Para un constituyente de marea específico  $k$  de frecuencia  $\dot{\Theta}_k$ , se define su **función de transferencia** como la trasformada de Fourier de la función peso  $w_{2m}$  (Cartwright y Ray, 1990; Ray y Cartwright, 1994)

$$Z_{2m}(\dot{\Theta}_k) = X_{2m}(\dot{\Theta}_k) + iY_{2m}(\dot{\Theta}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{2m}(t) e^{-i\dot{\Theta}_k t} dt \quad [1.65]$$

Esta función de transferencia expresa para cada punto  $(\lambda, \phi)$  la respuesta de la superficie oceánica a la fuerza de marea. De tal forma que, sustituyendo la función peso dada por [1.62] y los pesos respuesta [1.63], se tiene la función de transferencia de marea expresada como series de Fourier de periodo  $2\pi/\Delta T$

$$Z_{2m}(\dot{\Theta}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{s=-S}^S w_{2ms} \delta(t - s\Delta t) \right) e^{-i\dot{\Theta}_k t} dt = \sum_{s=-S}^S w_{2ms} e^{-i\dot{\Theta}_k s\Delta t} = \sum_{s=-S}^S (u_{2ms} + iv_{2ms}) e^{-i\dot{\Theta}_k s\Delta t} \quad [1.66]$$

Por simplicidad de notación, se ha omitido la dependencia de la posición de las funciones  $w_{2ms}$ ,  $u_{2ms}$ ,  $v_{2ms}$  y, como consecuencia, de la función admitancia compleja  $Z_{2m}$  y sus correspondientes componentes real  $X_{2m}$  e imaginaria  $Y_{2m}$ , que vendrán dadas por

$$\begin{aligned} X_{2m}(\dot{\Theta}_k) &= \sum_{s=-S}^S \left[ u_{2ms} \cos(\dot{\Theta}_k s\Delta t) + v_{2ms} \sin(\dot{\Theta}_k s\Delta t) \right] \\ Y_{2m}(\dot{\Theta}_k) &= \sum_{s=-S}^S \left[ v_{2ms} \cos(\dot{\Theta}_k s\Delta t) - u_{2ms} \sin(\dot{\Theta}_k s\Delta t) \right] \end{aligned} \quad [1.67]$$

En resumen, mediante el método de análisis de respuesta no se resuelven propiamente los constituyentes armónicos, si no que se determina para cada banda de marea  $m$  su función de transferencia dependiente de la frecuencia  $\dot{\Theta}_k = \omega_{nm}^k$ . A su vez, la función de transferencia se calcula a partir de los coeficientes complejos de las series de Fourier, esto es, de los pesos respuesta ( $u_{2ms}$ ,  $v_{2ms}$ ) que son independientes de la frecuencia y se determinan mediante un procedimiento de mínimos cuadrados, según la ecuación [1.64]. Una vez conocida la función de transferencia se deduce la elevación de la marea oceánica para la componente de marea de grado 2 y orden  $m$  (Ray, 1993; Desai y Warh, 1995)

$$\zeta(\dot{\Theta}_k, \lambda, \phi, t) = H_{2,m}^k \operatorname{Re} \left\{ Z^*(\dot{\Theta}_k, \lambda, \phi) e^{-i(\dot{\Theta}_k t + \Theta_k(t_0))} \right\} \quad [1.68]$$

donde  $H_{2m}^k$  es una constante que define la amplitud respectiva del potencial de marea en la frecuencia  $\dot{\Theta}_k$ . La amplitud y la fase de [1.58] están relacionadas con la función de admitancia por (Desai y Warh, 1995)

$$A_k(\lambda, \phi) = \left| H_{2,m}^k Z(\dot{\Theta}_k, \lambda, \phi) \right| \quad G_k(\lambda, \phi) = \begin{cases} \pi - \arg[Z(\dot{\Theta}_k, \lambda, \phi)] & m = 0 \\ m\pi - \arg[Z(\dot{\Theta}_k, \lambda, \phi)] & m = 1, 2 \end{cases} \quad [1.69]$$

Finalmente, en relación con el método de respuesta sólo resta mencionar el denominado **Método de Convolución Ortogonalizado y Ortomarea**. Puesto que los términos  $a_{2m}$  y  $b_{2m}$  en [1.64] no son, por lo general, ortogonales, Groves y Reynolds (1975) modifican el método de análisis de respuesta mediante la introducción del concepto de ortomareas. Para ello, se reescribe la elevación de la marea oceánica dada en [1.64] de la forma

$$\zeta(\lambda, \phi, t) = \sum_{m=0}^2 \sum_{j=0}^{2S} \left[ P_j^m(t) U_j^m(\lambda, \phi) + Q_j^m(t) V_j^m(\lambda, \phi) \right] \quad [1.70]$$

siendo  $P_j^m(t)$  y  $Q_j^m(t)$  las **funciones ortomarea**. Estas funciones son combinaciones lineales simples de los términos del potencial de marea  $a_{2m}(t - s\Delta t)$  y  $b_{2m}(t - s\Delta t)$  y tales que todas las combinaciones de pares  $\{P_i^m(t), P_j^m(t), Q_i^m(t), Q_j^m(t)\}$  son aproximadamente ortogonales en el tiempo. Las funciones ortomarea, así como los coeficientes de las mismas, están publicadas en Cartwright y Ray (1990). Por otra parte, los **ortopesos**  $U_j^m(\lambda, \phi)$  y  $V_j^m(\lambda, \phi)$  se calculan, en este caso, por un procedimiento de mínimos cuadrados a partir de las series temporales de observación.

## 1.4 Conclusiones

En este Capítulo se han expuesto algunos fundamentos teóricos que se tendrán en cuenta a lo largo de esta memoria, desde la óptica de

- La formulación fundamental necesaria para obtener la respuesta de la Tierra sólida (variaciones de gravedad y desplazamientos) a las fuerzas derivadas del potencial generador de marea (Secc. 1.2). Con este fin, se ha deducido el sistema de ecuaciones que rigen las deformaciones por marea terrestre de una Tierra elástica, dada por [1.28]. Las soluciones a dicho sistema, relativo a las condiciones de frontera apropiadas, se expresan en términos de los números de Love, para lo que éstos han sido convenientemente explicados. A partir de estos números de Love, se han descrito las componentes de la respuesta terrestre a las fuerzas de marea, en particular, las variaciones de la gravedad, según [1.38].
- La justificación teórica implícita en el modelo de Tierra SNREI, junto con las modificaciones introducidas en él con el fin de aproximarlos a la Tierra real. Entre ellas se incluye su rotación e inercia, esfuerzos iniciales desviatorios y heterogeneidades laterales, así como la anelasticidad y visco-elasticidad terrestres. En cada caso, se ha descrito su efecto sobre la respuesta terrestre a las fuerzas de marea (tales como la dependencia de la frecuencia y de la latitud) y se han apuntado las modificaciones necesarias, con respecto al caso elástico, en la metodología de cálculo para la consideración de tales efectos. Estas modificaciones abarcan desde la inclusión directa de los términos oportunos en las ecuaciones de deformación (p. ej., fuerzas de Coriolis y centrífuga), la modificación de los parámetros reológicos terrestres considerados en las ecuaciones de deformación (p. ej., su dependencia de la latitud además del radio) o, finalmente, su inclusión a través de la modificación de los números de Love (dependencia de la frecuencia y/o de la latitud). En cada caso se ha justificado en qué aplicaciones y para qué precisiones es conveniente su consideración.
- Se ha descrito el fenómeno de marea oceánica (Secc. 1.3) y se ha presentado el desarrollo de dos métodos clásicos de análisis numérico de las observaciones de marea: el método de análisis armónico y el de respuesta.

## Capítulo 2

# El Efecto de Carga Causado por la Marea Oceánica

*El fenómeno de marea oceánica induce una serie de efectos sobre la superficie terrestre que se engloban en lo que se conoce como Efecto Oceánico Indirecto (EOI), que se detalla en la Sección 2.2. El procedimiento utilizado para su determinación se inicia calculando la respuesta de la Tierra a la carga de una masa puntual, a partir de un modelo particular de la estructura interna de la Tierra. Dicha respuesta terrestre, que se deducirá en la Sección 2.3, está formulada en términos de los números de Love de carga. En la Sección 2.4 se deducirán las expresiones correspondientes a los desplazamientos y a las variaciones de gravedad originados por la carga ejercida por la marea oceánica, denominadas funciones de Green, como función de la distancia angular entre el punto de aplicación de la carga y el punto de cálculo. Considerando el océano dividido en un conjunto de celdas, cada una con un valor de amplitud y fase de marea asignados, se realiza la convolución entre estos valores y las funciones de Green. En la Sección 2.5 se presentará este formalismo de convolución, en primer lugar, para modelos de Tierra SNREI y, seguidamente, se extenderá para modelos más complejos y realistas. En esta misma Sección, se estudiarán dos metodologías alternativas para calcular el EOI: La técnica de las funciones de Green integradas y el formalismo del desarrollo en armónicos esféricos. Por último, en la Sección 2.6, dedicada al cálculo práctico del EOI, se describirá un nuevo programa informático, denominado ECOM 1.0, desarrollado para tal fin.*

## 2.1 Introducción

En este Capítulo se realiza un estudio exhaustivo del Efecto Oceánico Indirecto con el objetivo principal de obtener un cálculo más exacto del mismo. Se ha tenido presente el ámbito de aplicación en que se quiere enmarcar la investigación, puesto que de ello dependerá en gran medida la metodología y las técnicas de cálculo adecuadas. Este ámbito de aplicación comprende tanto la propia investigación (objetivo en Geodesia y/o Geofísica, técnicas de observación, etc.) como la región objeto de estudio, ya que ambas cuestiones predispondrán los parámetros y modelos involucrados en el cálculo del EOI que deban ser examinados, seleccionados y/o mejorados. Concretamente, en esta memoria se pretende utilizar los valores calculados del EOI para corregir observaciones geodésicas de precisión (tales como son las variaciones de gravedad sobre la superficie terrestre o los desplazamientos GPS) en las frecuencias principales de marea. En

particular, se investigará el EOI en dos zonas de estudio singulares, el entorno de la Península Ibérica y la región circundante al Archipiélago Canario.

La Sección 2.2 está dedicada a la descripción de este fenómeno y su manifestación sobre la superficie terrestre en forma de desplazamientos y variaciones de gravedad. Dichas manifestaciones afectarán un gran número de observaciones geodésicas y geofísicas de precisión que, a fin de obtener más exactitud en su medida, deberán ser corregidas. Por esta razón, se realizará una descripción de las observaciones que se encuentran afectas por el EOI, analizando la precisión que alcanzan los instrumentos y las técnicas de observación involucradas, la magnitud típica y los rangos máximos que puede alcanzar este efecto sobre el observable correspondiente y, finalmente, aquellas investigaciones y áreas de aplicación en las que tanto los observables como el EOI están involucrados. Debe señalarse que, en ocasiones, el EOI interviene como una corrección precisa que debe realizarse a las diferentes observaciones con el fin de investigar otros fenómenos, procesos y/o propiedades relacionados con la geodesia, la geofísica y la geodinámica. Por el contrario, en otras ocasiones, serán las observaciones quienes sirvan como base para el estudio del EOI. En la Sección 2.3 se presenta el cálculo de las deformaciones terrestres causadas por la carga ejercida sobre su superficie por la marea oceánica. Con este fin, se establecen las ecuaciones básicas que rigen estas deformaciones. Inicialmente se consideran un modelo de Tierra SNREI, sujeto a ciertas hipótesis, y una carga de masa unidad aplicada sobre un punto de la superficie terrestre. La solución al sistema de ecuaciones de deformación, bajo unas condiciones de frontera adecuadas, se expresará en términos de los números de Love de carga. La Sección 2.4 se dedica, íntegramente, a la obtención de las funciones de Green de carga, que describen las diferentes componentes de la respuesta terrestre, para modelos SNREI, a la carga de la marea oceánica. Puesto que el EOI debe calcularse con el mismo nivel de precisión que las observaciones geodésicas y gravimétricas, y el hecho de que la precisión de éstas ha incrementado significativamente las últimas décadas, aumenta la necesidad de una determinación más exacta del efecto. Esto implica, entre otros, una mayor sofisticación en los modelos de Tierra considerados (con la inclusión, p. ej., de la rotación de la Tierra, la no isotropía o su anelasticidad). Así, en esta Sección se estudiarán las variaciones en las funciones de Green de carga atendiendo a diferentes estructuras terrestres. Posteriormente, la Sección 2.5 se dedica a la exposición de tres metodologías de cálculo del EOI. La primera se basa en la convolución de las funciones de Green de carga con la marea oceánica. La segunda, que en realidad es una variante de la anterior, consiste en la técnica de las funciones de Green integradas. La última metodología expuesta consiste, fundamentalmente, en el desarrollo en armónicos esféricos de la marea oceánica. En los tres casos se exponen los fundamentos teóricos y su implementación numérica para el caso del cálculo de los desplazamientos y las variaciones de gravedad originados por el EOI sobre la superficie terrestre. Se prestará una atención especial al estudio de las diversas fuentes de error (provenientes de los parámetros y modelos involucrados en el cálculo y de la propia implementación numérica de los métodos) que pueden afectar los cálculos. En la Sección 2.6 se presenta un nuevo programa

informático para el cálculo del EOI, *ECOM Versión 1.0*, basado en las metodologías y consideraciones expuestas en las Secciones previas. Finalmente, las conclusiones extraídas en este Capítulo y los resultados obtenidos se exponen en la Sección 2.7.

## 2.2 El Efecto de Carga Oceánica de Marea: Observables y Ámbito de Aplicación

La respuesta de la Tierra al movimiento de las masas de agua causado por la marea oceánica se conoce como *efecto oceánico indirecto* o *efecto de carga oceánica de marea*. Sobre la superficie terrestre dicho efecto se observa periódicamente en forma de deformaciones y variaciones de gravedad. Tanto la marea terrestre como el EOI están generados por el mismo origen astronómico, el potencial luni-solar de marea, por lo que ambos fenómenos tienen el mismo espectro de frecuencias y, como consecuencia, un carácter temporal muy similar. Por el contrario, el carácter espacial difiere significativamente de un fenómeno con respecto al otro. Así, las mareas terrestres varían gradualmente sobre la superficie de la Tierra dependiendo, principalmente, de las propiedades globales de su reología más que de sus propiedades locales. Sin embargo, la estructura de la variación espacial del EOI es más compleja y depende considerablemente de las propiedades locales de la corteza terrestre y del manto superior. Asimismo, debido a la variación en amplitud de la marea oceánica causada por la propia dinámica del océano se producen, a su vez, alteraciones significativas en el EOI, principalmente en zonas costeras y sus proximidades (Baker, 1991; Penna y Baker, 2002).

Sobre la superficie terrestre, el efecto de la carga ejercida por las masas de agua en movimiento, bajo la fuerza de marea, puede observarse en forma de desplazamientos de la corteza terrestre, en las direcciones vertical y horizontal, variaciones de gravedad e inclinación, y en extensiones. En la dirección de la vertical física, estos desplazamientos pueden alcanzar un rango de varios cm (Baker et al., 1995; Scherneck, 1996), llegando hasta los 10 cm en algunas zonas del mundo, como en el caso de la costa noreste de Australia (Penna y Baker, 2002). Más concretamente, para el constituyente armónico de marea  $M_2$ , la amplitud de la componente vertical del desplazamiento debido al EOI, denominada desplazamiento radial, puede superar los 5 cm en algunas zonas costeras, reduciéndose hasta los 4 cm sobre los continentes a distancias del océano del orden de 500 km y a 1 cm para distancias superiores a 1.000 km (Baker, 1984). La componente horizontal del desplazamiento, denominada componente tangencial, es del orden de un tercio de la componente vertical (Farrell, 1972). Por otra parte, en zonas próximas a la costa e islas oceánicas las variaciones de la gravedad causadas por el EOI son, en general, del orden de 0,3-3  $\mu\text{Gal}$  (Baker y Bos, 2003).

El EOI afecta a un grupo muy amplio de observaciones geodésicas y geofísicas (p. ej., Baker, 1984; Lambeck, 1988). Así, los registros de gravímetros, clinómetros y extensómetros utilizados para detectar variaciones de gravedad, desviaciones de la vertical y deformaciones de la superficie terrestre, respectivamente, están directamente afectados. En los últimos años, debido al incremento

de la precisión de las técnicas de observación geodésicas y geofísicas, y dada la importancia de la corrección del EOI para interpretar correctamente sus mediciones, su estudio ha cobrado gran relevancia, hasta el punto de considerarse en sí mismo como una actividad especializada (Zahrán et al., 2005). A continuación, se describen brevemente las áreas de investigación en las que el EOI cobra un papel relevante y sus objetivos destacados atendiendo, por una parte, a las investigaciones en relación con sus aplicaciones (de marea terrestre y otras aplicaciones no de marea) y, por otra parte, en relación con los observables de interés en esta memoria (desplazamientos y variaciones de gravedad).

### **Atendiendo a su aplicación**

#### **a) En marea terrestre**

Las medidas de marea terrestre gravimétrica, clinométrica y extensométrica se encuentran afectadas significativamente por el EOI. En zonas próximas a la costa, este efecto es responsable de, aproximadamente, el 10%, el 90% y el 25% de las señales de marea registradas en gravedad, inclinación y extensión, respectivamente (Farrell, 1972; Francis y Mazzega, 1990). El cálculo preciso del EOI puede servir tanto para corregir estas observaciones de su influencia, como para comparar la marea terrestre teórica con la señal observada directamente. Entre otras aplicaciones, la corrección del EOI tiene gran importancia en las medidas de marea terrestre de alta precisión para la predicción de los movimientos de marea y para la determinación de la estructura elástica de la Tierra (p. ej., Agnew, 1995). Actualmente, para comparar los factores gravimétricos observados con los propuestos por los estudios teóricos, por ejemplo el modelo de marea DDW desarrollado por Dehant et al. (1999), y constreñir así los modelos de marea terrestre, se requieren observaciones con una exactitud de 0,1% en el factor de escala de los gravímetros (p. ej., Baker y Bos, 2003; Tamura et al., 2005; Palinkas, 2006). Esto se debe a que los factores gravimétricos de un modelo de Tierra elástica y otro anelástico difieren tan sólo en un 0,12% (Secc. 1.2.3.3, Cap. 1). En el marco de estas líneas de investigación se encuadran, por ejemplo, los trabajos desarrollados por Bos (2000), Bos et al., (2002), Baker y Bos (2003), Sato et al. (2008).

#### **b) Otras aplicaciones no de marea**

La determinación precisa del EOI es de gran importancia, no sólo en el estudio de las mareas terrestres, sino también para la interpretación de las medidas geodésicas de alta precisión (p. ej., Matsumoto et al., 2001) ya que, por ejemplo, las variaciones de la gravedad y los desplazamientos provocados por dicho efecto son dos o tres órdenes de magnitud mayores que la precisión actual de las medidas geodésicas (Lambert et al., 1998). Entre otras aplicaciones geodésicas y geodinámicas que necesitan de estas correcciones precisas se encuentran: las técnicas geodésicas espaciales de alta precisión (GPS, VLBI, SLR, altimetría por satélite, etc.), la gravimetría terrestre y espacial (aplicadas, p. ej., al estudio de los procesos y propiedades del interior de la Tierra).

## **Atendiendo a los diferentes observables (desplazamientos y variaciones de gravedad)**

### **a) Los desplazamientos**

Las técnicas geodésicas espaciales de alta precisión, tales como el sistema de posicionamiento global (GPS) o la interferometría de larga base (VLBI), donde la precisión de las observaciones ha alcanzado el nivel de unos pocos milímetros (Bos, 2004), así como la distanciometría láser a satélite (SLR) o la altimetría por satélite, se encuentran todas ellas afectadas en su rango de medidas por las deformaciones producidas por el EOI.

Para **aplicaciones GPS de alta precisión**, ya sea en la determinación de coordenadas como en las medidas de líneas de base, en las que se requieren precisiones milimétricas, los desplazamientos originados por el EOI tienen un efecto significativo sobre las posiciones estimadas, predominantemente en la dirección radial (Penna y Baker, 2002). Por ejemplo, la precisión en las redes GPS permanentes es inferior al cm en la dirección radial y de unos pocos mm en la tangencial (p. ej., Allinson et al., 2004; Khan y Scherneck, 2003). En algunas zonas del noreste de Australia, la carga de la marea oceánica puede inducir desplazamientos radiales en una estación GPS del orden de 10 cm en el transcurso de 6 horas (Baker et al., 1995; Dach y Dietrich, 2001). Por tanto, teniendo en cuenta la magnitud de los desplazamientos causados por el EOI, deben ser cuidadosamente investigados sobre los resultados GPS. En este contexto se encuentran los trabajos de Lambert et al. (1998), Khan y Scherneck (2003) y Melachroinos et al. (2008). Cabe destacar como el EOI puede ser estimado, a su vez, a partir de registros continuos GPS con precisiones milimétricas (p. ej., Thomas et al., 2007; Blewitt y Clark, 2003; Schenewerk et al., 2001).

Las **técnicas SLR** (Llubes et al., 2008; Urschl et al., 2005) y la determinación de longitudes de líneas de base terrestre mediante **VLBI** (Sovers, 1995) alcanzan una precisión centimétrica, para distancias de unos pocos cientos de kilómetros (Francis y Mazzega, 1990). Teniendo en cuenta que el EOI puede perturbar los resultados obtenidos mediante estas técnicas, tanto en la determinación de coordenadas como en las medidas de líneas de base, hasta varios cm (Schuh y Moehlmann, 1989), estas observaciones deben corregirse cuidadosamente. Por otra parte, los desplazamientos radial y tangencial causados por el EOI pueden estimarse a partir VLBI con precisiones, en esta caso, sub-milimétricas. Algunos de los trabajos destacados en estas línea son los de Thomas et al. (2007), Pretov y Ma (2003), Scherneck et al. (1999), Haas y Schuh (1998). Cabe señalar que el nivel de concordancia entre las técnicas SLR, VLBI y GPS en lo referente a las variaciones en la componente vertical del desplazamiento, se encuentran en el rango de 10-20 mm (Zerbini et al., 2002).

Otras aplicaciones, como el procesado de los **datos altimétricos de satélite** o la **modelización hidrodinámica de las mareas oceánicas**, que serán tratados en el Capítulo siguiente, también requieren una determinación precisa del EOI y, además en este caso, a escala global y con una gran densificación de puntos. Puesto que las medidas altimétricas de satélite proporcionan la elevación instantánea del nivel del mar con respecto a un elipsoide de referencia, contendrán contribuciones debidas a la marea terrestre, a la marea oceánica y al efecto de carga que provoca sobre el fondo



oceánico. Este último efecto debe eliminarse de las medidas altimétricas con objeto de extraer únicamente la marea oceánica. A su vez, la modelización de la marea oceánica a partir de las ecuaciones hidrodinámicas de Laplace debe tener en cuenta, entre otros efectos, el desplazamiento radial causado por el EOI. Finalmente, deben considerarse en este ámbito las investigaciones relativas a las variaciones locales en el nivel del mar. Puesto que estas variaciones locales dependen tanto de su comportamiento a escala global como del desplazamiento vertical de la línea de costa, es fundamental detectar y cuantificar las deformaciones terrestres con el fin de determinar las variaciones relativas y absolutas del nivel del mar (Zerbini et al., 2002).

#### **b) Las variaciones de gravedad**

El gravímetro es un sensor que mide las variaciones del módulo de la gravedad asociadas con las redistribuciones de masas que suceden, tanto en su entorno más cercano como a nivel global. Por ello, los registros gravimétricos incluyen los efectos de gravedad inducidos por diversas fuentes geofísicas y geodinámicas a escala local, regional y global. Las dos contribuciones principales a dichos registros son, por una parte, la marea terrestre y, por otra parte, al EOI. La investigación de un efecto en particular precisa la reducción de todos los demás, que pueden considerarse en ese caso como perturbaciones (Neumeyer et al., 2005). Debido al complejo acoplamiento existente entre las diversas fuentes que originan las variaciones de gravedad no resulta fácil separarlas (ambos tienen el mismo espectro de frecuencias). Su separación debe realizarse mediante alguna técnica de análisis matemático (filtros, mínimos cuadrados o análisis espectral) sobre los datos de gravedad observados. La importancia del EOI sobre las medidas de gravedad, llevadas a cabo tanto con gravímetros relativos y absolutos como las obtenidas a partir de las técnicas espaciales más recientes, queda patente en los numerosos estudios que se han realizando a lo largo del tiempo.

En el caso de los **gravímetros relativos de muelles**, tales como LaCoste & Romberg, modelos G y D, o Scintrex, modelos CG-3M y CG5, su resolución (del orden de 1  $\mu\text{Gal}$ ) permite alcanzar precisiones en registro continuo, siempre que estos estén bien calibrados y dispongan de un sistema de retroalimentación, en torno a 0,1  $\mu\text{Gal}$  (Baker y Bos, 2003). A su vez, el **gravímetro superconductor (SG)**, que es en la actualidad el instrumento más sensible y estable que existe para estudiar la componente vertical del campo gravitatorio terrestre, tiene una resolución del orden de 0,01  $\mu\text{Gal}$ , y puede alcanzar una precisión de 0,001  $\mu\text{Gal}$  tras dos o tres años de integración, puesto que presentan poca deriva, de 1 a 4  $\mu\text{Gal/año}$ , y una alta estabilidad a largo plazo (Crossley et al., 1999; 2005). Aunque, en el Capítulo 6 serán expuestos con más detalle, citamos aquí como ejemplo, los trabajos llevados a cabo por Baker et al. (1991; 1996) y por Francis y Melchior (1996) quienes comparan las variaciones de la gravedad causadas por el EOI observadas, mediante gravímetros relativos, con las calculadas a partir de diversos modelos de marea oceánica en Europa. En esta misma línea, para otras regiones del planeta, se encuadran las investigaciones realizadas por Agnew (1995), Jentzsch et al. (2000), Bos et al. (2002), Neumeyer et al. (2005) y más recientemente Ducarme et al. (2007) y Sato et al. (2008). En lo que respecta a gravímetros SG y la comparación

entre la marea gravimétrica de carga observada y calculada, cabe destacar los trabajos desarrollados por Baker y Bos (2003), Ducarme et al. (2004), Sun et al. (2005), Boy et al. (2003; 2006). Finalmente, señalar que los gravímetros SG están siendo utilizados para otras muchas aplicaciones geodésicas y geofísicas, tales como son la determinación de los parámetros de resonancia de la nutación libre del núcleo (p. ej., Hinderer et al., 1993; Defraigne et al., 1994; Hinderer y Crossley, 2000; Sun et al., 2002) y la determinación de los parámetros gravimétricos de la marea del polo<sup>1</sup> (Ducarme et al., 2006; Chen et al., 2008). En estas aplicaciones, como en casos anteriores, será necesario corregir las observaciones por los efectos de carga causados por las mareas oceánica, atmosférica y por la marea oceánica del polo.

Por otra parte, los **gravímetros absolutos**, caracterizados por la medida directa de la gravedad a partir del principio de caída libre y por emplear estándares de medida (p. ej., Faller et al., 1979; Zumberge et al., 1982; Niebauer et al., 1986), pueden alcanzar una exactitud del orden de 1-2  $\mu\text{Gal}$  en intercomparaciones (Francis y van Dam, 2006). Al igual que los SG, los gravímetros absolutos presentan una alta estabilidad a largo plazo aunque tienen algunas limitaciones ocasionadas por efectos perturbadores ambientales. Actualmente, este tipo de gravímetros son una referencia estándar internacional para redes de estaciones de gravedad absoluta (Vituskin et al., 2002; Van Camp et al., 2005) y se utilizan en numerosas investigaciones geodésicas y geofísicas (p. ej., Lambert et al., 2006). En particular, al igual que los gravímetros relativos, los gravímetros absolutos pueden ser utilizados para estimar el efecto de carga sobre las observaciones de gravedad como realizan, por ejemplo, Niebauer et al. (1995) o, más recientemente, Llubes et al. (2008).

El **estudio del campo gravitatorio terrestre** es una de las funciones principales de la Geodesia. El campo gravitatorio refleja la estructura y composición de la Tierra y permite, asimismo, investigar variaciones de masa sobre y bajo la superficie terrestre. Las misiones de satélite CHAMP (*CHALLENGE Minisatellite Payload*), GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) y GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*) (p. ej., Chambers et al., 2004; Tapley et al., 2004), que actualmente constituyen un gran reto tecnológico, están dedicadas al estudio global y en profundidad del campo gravitatorio terrestre. Modelando las variaciones de gravedad provocadas por la marea terrestre y oceánica, la marea del polo, los efectos atmosféricos debidos a variaciones de presión y vientos, las estimaciones del campo gravitatorio obtenidas de las observaciones de satélite contienen información que permite investigar las variaciones de masas originadas por la señal que puedan introducir otros fenómenos geofísicos, que no se hayan modelado. Además, con las misiones altimétricas espaciales surge la necesidad de mejorar los modelos de marea oceánica (Ray et al., 2001; Boy et al., 2003), puesto se utilizan a priori para la construcción de modelos de geopotencial y la reducción de errores en los primeros se traduce en una mejora de los segundos (Desai y Yuan, 2006).

---

<sup>1</sup> El movimiento del polo induce deformaciones de la Tierra sólida y de los océanos denotadas, respectivamente, por *mareas terrestre y oceánica del polo*. A su vez, la marea oceánica del polo causa un efecto de carga sobre la superficie conocida como *marea de carga del polo*.

Teniendo en cuenta las precisiones alcanzadas en las medidas gravimétricas, tanto con gravímetros relativos, absolutos, superconductores y, particularmente, con las nuevas técnicas espaciales, el estudio de los efectos perturbadores sobre las observaciones de gravedad y, especialmente, el EOI, es actualmente un nuevo objetivo de investigación (Zahran, et al., 2006). Entre estas investigaciones destacan las relacionadas con los **procesos internos de la Tierra**, así como con sus propiedades físicas (Peltier, 1974; Francis y Dehant, 1987; Warh, 1988). Una de estas investigaciones es la determinación de los factores gravimétricos, lo que posibilita la estimación de la elasticidad y anelasticidad de la Tierra en periodos de marea diurnos y semi-diurnos (Baker et al., 1996; Boy et al., 2003).

## **2.3 Cálculo de los Desplazamientos y las Variaciones de Gravedad Causadas Sobre la Superficie Terrestre por la Carga Oceánica de Marea**

El hecho de que las observaciones de marea terrestre, además de otras medidas geodésicas y geofísicas, estén perturbadas por la carga ejercida sobre la superficie terrestre por la marea oceánica se conoce desde finales del siglo XIX. El planteamiento original del problema se basó en el cálculo de la respuesta de un semi-espacio elástico a la presión ejercida sobre su superficie. El método de solución adoptado por Boussinesq (1885) para este problema, sumamente simplificado, es la base para su extensión posterior al caso de un modelo de Tierra esférica. El modelo propuesto por Boussinesq consiste en el desarrollo de expresiones matemáticas para la obtención del esfuerzo y las deformaciones en un semi-espacio homogéneo, isótropo y elástico lineal según la Ley de Hook, debidos a la aplicación de una carga puntual sobre su superficie, a una cierta profundidad y distancia horizontal del punto de aplicación de la carga. Una revisión detallada de la solución general planteada por Boussinesq se encuentra en Farrell (1972). Esta solución presenta, básicamente, las mismas características que la solución para un modelo esférico, pero la complejidad algebraica del cálculo en el último caso aumenta considerablemente.

Diversos autores, con posterioridad a Boussinesq, resolvieron el problema para espacios sucesivamente más complejos. Love (1929) calculó los esfuerzos producidos en un sólido semi-infinito, sometido a una presión sobre parte de su frontera, para el caso de la aplicación de una carga distribuida uniformemente sobre un área circular. Terazawa (1916) calculó, siguiendo la metodología de Love y para una carga similar, los desplazamientos causados en un sólido semi-infinito que, posteriormente, Nishimura (1932) extendió a un medio consistente en dos capas superpuestas. Con respecto a modelos de Tierra simples, los primeros autores en resolver el problema de encontrar el desplazamiento causado sobre la superficie terrestre por el efecto de una carga en forma de tapón, y de grosor constante, fueron Slichter y Caputo (1960), Jobert (1960), Caputo (1961, 1962), Takeuchi et al. (1962). Los trabajos llevados a cabo por Caputo, quien obtiene una expresión en series de polinomios de Legendre de los desplazamientos radiales causados por el efecto de carga, surgen en

relación con el estudio de las deformaciones de la corteza terrestre causadas por cargas procedentes de nieve, hielo y variaciones en la presión atmosférica. Kaula (1963), modificando la teoría de mareas terrestres y para un modelo de Tierra elástica con constantes elásticas únicamente dependientes de la distancia radial, resolvió el problema considerando cargas producidas por masas internas desarrollables en armónicos esféricos. Kuo (1969) utilizó el *método de las matrices Thomson-Haskell* (Gilbert y MacDonald, 1960) para obtener la respuesta a los esfuerzos de superficie inducidos sobre un semi-espacio sin gravitación y estratificado.

Munk y MacDonald (1960) introdujeron el concepto de números de Love de carga, también conocidos como coeficientes de deformación por carga. Sus soluciones teóricas fueron calculadas por primera vez por Longman (1962) hasta el grado armónico  $n = 40$ . Longman realizó un estudio más avanzado sobre el problema de carga para una Tierra esférica, elástica y sometida a gravitación, basándose en la formulación del problema dada por Pekeris y Jarosch (1958) y Alterman et al. (1959). Posteriormente, Farrell (1972) mejoró la teoría de Longman y calculó los números de Love de carga hasta el grado  $n = 10^4$  para diferentes modelos de Tierra. El trabajo de Farrell ha sido, y sigue siendo en la actualidad, una referencia fundamental en el estudio de las deformaciones de la Tierra causadas por cargas que actúan sobre su superficie. El método que desarrolló Farrell consiste en el cálculo de los números de Love de carga, para un modelo de Tierra determinado, y la construcción de las funciones de Green como sumas ponderadas de dichos números de Love. Finalmente, el cálculo de la respuesta de la Tierra a la carga se reduce a la evaluación de una integral de convolución entre dichas funciones de Green y una distribución global de la marea oceánica.

### 2.3.1 Ecuaciones Básicas y Condiciones de Frontera

Inicialmente, se establece la hipótesis de un modelo de Tierra SNREI con gravitación, compresible, con un estado de referencia inicial para la deformación de equilibrio hidrostático, con un núcleo interno sólido, un núcleo externo líquido y un manto sólido elástico. Asimismo, se considera que este modelo es homogéneo en la dirección transversal y que presenta inhomogeneidades en la dirección radial, con propiedades elásticas, densidad y gravedad como función del radio. Bajo estas hipótesis, se considera que el modelo terrestre se encuentra sometido a la carga de una masa puntual situada sobre su superficie en el punto  $P(R_T, \theta, \lambda)$ , siendo  $R_T$  el radio de la Tierra y las coordenadas  $(\theta, \lambda)$  que denotan la colatitud y la longitud, respectivamente. Por conveniencia y sin pérdida de generalidad, se considera que la carga se encuentra situada sobre el polo norte, esto es  $\theta = 0$ . Las deformaciones causadas por una carga situada en cualquier posición arbitraria pueden obtenerse, simplemente, mediante una transformación de rotación.

Las relaciones que hay que considerar para determinar la respuesta elástica de la Tierra, desplazamientos y potencial perturbador, a la fuerza ejercida por la carga son:

- La ecuación [1.18], que relaciona la proporción de variación del momento lineal de un elemento de volumen con las fuerzas aplicadas y las condiciones de superficie.

- La ecuación elástica [1.23] que expresa la relación lineal entre esfuerzo y deformación.
- La ecuación [1.26], que relaciona los desplazamientos con la deformación ([A.13], Apéndice 1).
- La ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio [1.19].
- Adicionalmente, la deformación debe satisfacer la ecuación de continuidad [1.20].

De estas relaciones se deducen las ecuaciones básicas que rigen la deformación dadas por [1.28], teniendo en cuenta que, en este caso, el potencial perturbador  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  corresponde a la suma de las perturbaciones en el potencial inducido por la carga aplicada,  $\Phi_2$ , más el potencial adicional debido a la redistribución de las masas internas del modelo,  $\Phi_1$ . El potencial inducido por la carga satisface la ecuación de Laplace en el interior de la Tierra ( $\nabla\Phi_2 = 0$ ), ya que la masa se sitúa en su exterior y, por lo tanto, no aparece explícitamente en las ecuaciones del movimiento, aunque sí lo hace a través de las condiciones de frontera en la superficie-libre (Farrell, 1972). Obsérvese que las ecuaciones de deformación forman un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Puesto que se ha considerado una distribución de densidad y parámetros elásticos de Lamé con simetría esférica,  $\rho_0(r)$ ,  $\lambda(r)$  y  $\mu(r)$  y, como consecuencia de ello, también la aceleración gravitatoria  $g_0(r)$ , tanto el desplazamiento  $\mathbf{u}$  como el potencial perturbador  $\Phi$  pueden desarrollarse en serie de armónicos esféricos de la forma (Farrell, 1972; Jentzsch, 1997; Sun y Sjöberg, 1998)

$$\mathbf{u}(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ U_n(r) \mathbf{e}_r Y_n(\theta, \lambda) + V_n(r) \left( \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) Y_n(\theta, \lambda) \right] \quad [2.1]$$

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(r) Y_n(\theta, \lambda)] \quad [2.2]$$

donde  $Y_n(\theta, \lambda)$  son los armónicos esféricos complejos fuertemente normalizados (Edmonds, 1960) en el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$ , con origen el centro de masas de la Tierra y  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\lambda$  los vectores unitarios base en las direcciones del radio, la colatitud y la longitud, respectivamente.  $U_n(r)$ ,  $V_n(r)$  y  $\Phi_n(r)$  son los coeficientes armónicos de las componentes radial y tangencial del desplazamiento (que se denotarán por  $u_r$  y  $u_\psi$ , respectivamente) y el potencial perturbador. Como se ha considerado que la carga aplicada presenta simetría con respecto al eje de rotación, se elimina la dependencia acimutal, la solución no depende de la longitud (únicamente se producen deformaciones esferoidales) y, por tanto, los desarrollos en armónicos esféricos [2.1] y [2.2] se reducen a sumas de polinomios de Legendre ( $m = 0$ ) (Farrell, 1972; Jentzsch, 1997)

$$\mathbf{u}(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ U_n(r) P_n(\cos \psi) \mathbf{e}_r + V_n(r) \left( \partial P_n(\cos \psi) / \partial \psi \right) \mathbf{e}_\psi \right] \quad [2.3]$$

$$\Phi(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) P_n(\cos \psi) \quad [2.4]$$

siendo  $P_n(\cos \psi)$  los polinomios de Legendre de grado  $n$ -ésimo, dados por la fórmula de Rodrigues (p. ej., Heiskanen y Moritz, 1967).

Insertando  $\mathbf{u}$  y  $\Phi$  definidos por [2.3] y [2.4], respectivamente, en las ecuaciones de equilibrio linealizadas de primer orden y la ecuación de Poisson dadas por [1.28] y la relación deformación-esfuerzo [A.19] (Apéndice 1), se obtiene un conjunto de seis ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden escribirse en forma matricial como (Takeuchi et al., 1972)

$$dY(r)/dr = A(r)Y(r) \quad [2.5]$$

siendo  $A$  una matriz de coeficientes que depende del modelo de Tierra y del grado armónico esférico  $n$ , esto es,  $A(r) = A(\lambda(r), \mu(r), \rho(r), g(r); r, n)$ . El vector de incógnitas  $Y = (y_1, \dots, y_6)^T$ , con el superíndice  $T$  que denota la transpuesta, incorpora los coeficientes de las representaciones escalares de las cantidades físicas incógnita, es decir, el vector de desplazamientos, el potencial perturbador y el tensor de esfuerzos:

- $y_1$  e  $y_3$  expresan los desplazamientos vertical y horizontal, respectivamente, dependientes de  $r$

$$y_1(r, n) = U_n(r) \quad y_3(r, n) = V_n(r)$$

- $y_2$  e  $y_4$  denotan las componentes del tensor de esfuerzos vertical y horizontal, respectivamente. Los coeficientes del esfuerzo se introducen en  $Y$ , ya que se necesita un mínimo de seis variables para resolver un sistema de seis ecuaciones. En particular, el esfuerzo radial y tangencial son útiles ya que sus condiciones de frontera sobre la superficie son fáciles de formular para diferentes tipos de carga y se expresan como funciones de la deformación mediante la relación de esfuerzo-deformación definida en [1.28] (van der Wal, 2003)

$$y_2(r, n) = T_{rr,n} \quad y_4(r, n) = T_{r\theta,n}$$

- $y_5$  corresponde a

$$y_5(r, n) = \Phi_n(r)$$

- La incógnita  $y_6$  está relacionada con el gradiente del potencial  $y_5$ , a través de la variable auxiliar  $q$  definida en [1.32] (Longman, 1963, Farrell, 1972; Peltier, 1974)

$$y_6(r, n) = Q_n(r)$$

siendo  $Q_n$  el coeficiente de grado  $n$  de la variable auxiliar.

De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, expresado en términos de los parámetros elásticos de la Tierra, la densidad y el valor de la gravedad sobre su superficie, están dadas por (Alterman et al., 1959; Longman, 1963)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dr} = -\frac{2\lambda}{(\lambda + 2\mu)r} y_1 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} y_2 + \frac{n(n+1)\lambda}{(\lambda + 2\mu)r} y_3 \\ \frac{dy_2}{dr} = \left[ \frac{-4\rho_0 g_0}{r} + \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} \right] y_1 - \frac{4\mu}{(\lambda + 2\mu)r} y_2 + \\ + \left[ \frac{n(n+1)\rho_0 g_0}{r} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)n(n+1)}{(\lambda + 2\mu)r^2} \right] y_3 + \frac{n(n+1)}{r} y_4 - \rho_0 y_6 \\ \frac{dy_3}{dr} = -\frac{1}{r} y_1 + \frac{1}{r} y_3 + \frac{1}{\mu} y_4 \\ \frac{dy_4}{dr} = \left[ \frac{\rho_0 g_0}{r} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r^2} \right] y_1 - \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)r} y_2 + \\ + \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)r^2} \left[ \lambda(2n^2 + 2n - 1) + 2\mu(n^2 + n - 1) \right] y_3 - \frac{3}{r} y_4 - \frac{\rho_0}{r} y_5 \\ \frac{dy_5}{dr} = 4\pi G \rho_0 y_1 + y_6 \\ \frac{dy_6}{dr} = -\frac{4\pi G \rho_0 n(n+1)}{r} y_3 + \frac{n(n+1)}{r^2} y_5 - \frac{2}{r} y_6 \end{array} \right. \quad [2.6]$$

El sistema de ecuaciones [2.6] se resuelve sujeto a las siguientes condiciones de frontera: regularidad en el origen, continuidad de la deformación y del esfuerzo a través de las superficies de discontinuidad en el interior de la Tierra, continuidad de los potenciales y de sus gradientes a través de cualquier frontera interna y, finalmente, los esfuerzos desaparecen sobre la superficie libre (exceptuando un esfuerzo normal, transmitido de forma perpendicular a la superficie). En esta última condición es donde se diferencian el problema de las deformaciones causadas por la fuerza de marea (donde todos los esfuerzos desaparecen, incluido el esfuerzo normal sobre la superficie libre) y aquéllas causadas por la aplicación de una carga (Jentzsch, 1997).

### 1) La distribución de la masa situada sobre la superficie terrestre

Longman (1963) demuestra que en el caso de la carga ejercida por una masa distribuida uniformemente a través de un disco de radio  $\alpha$ , ésta puede desarrollarse en serie de armónicos esféricos. A su vez, por simetría de la carga, los armónicos esféricos pueden ser sustituidos por los polinomios de Legendre  $P_n$ , resultando

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\cos \psi) \quad [2.7]$$

siendo los coeficientes del desarrollo

$$\sigma_n = (2n+1)/4\pi R_T^2 \quad [2.8]$$

Por tanto, asumiendo que sobre la superficie terrestre se sitúa una masa con distribución de densidad  $\sigma$  de la forma [2.7] en el estado no deformado, después de la aplicación de la carga existirá una nueva distribución  $\sigma'$ , que puede determinarse a partir de las componentes vertical y horizontal del desplazamiento. En primer orden, puede considerarse  $\sigma = \sigma'$ , ya que los desplazamientos son extremadamente pequeños en comparación con el radio de la Tierra. Entonces, el coeficiente de grado  $n$  del potencial gravitatorio ejercido por la carga, que por la ley de Gauss puede expresarse como función de la densidad (Moritz y Mueller, 1988)

$$\Phi_{2,n}(R_T) = GR_T [4\pi/(2n+1)] \sigma_n$$

se transforma, sin más que sustituir [2.8], en lo siguiente (Farrell, 1972)

$$\Phi_{2,n}(R_T) = 4\pi [GR_T/(2n+1)] [(2n+1)/4\pi R_T^2] = G/R_T$$

Teniendo en cuenta que sobre la superficie terrestre se verifica

$$g_0 = GM_T/R_T^2 \quad [2.9]$$

se obtiene, finalmente, la expresión para coeficiente de grado  $n$  del potencial gravitatorio ejercido por la carga de la forma

$$\Phi_{2,n}(R_T) = G/R_T = g_0 R_T/M_T \quad [2.10]$$

### 2) Las condiciones internas en el centro, $r = 0$

La condición de que las soluciones deben ser finitas en el origen  $r = 0$  permite determinar tres soluciones iniciales, mediante métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias que son función de  $r^n$  y, por tanto, regulares en el origen.

### 3) Las condiciones en todas las fronteras internas (núcleo interno / núcleo externo, núcleo / manto, manto / corteza)

Debido a las fuertes discontinuidades de todas las propiedades físicas (densidad, compresibilidad, rigidez, etc.) entre las diferentes capas terrestres (núcleo interno-sólido y externo-líquido, manto y superficie terrestre) es importante establecer las condiciones de frontera apropiadas para asegurar la propagación correcta de las soluciones a través de las mismas:

- En fronteras sólida-sólida se debe verificar que  $\{y_i; i = 1, \dots, 6\}$  son continuas
- En fronteras sólido-fluidas  $\{y_i; i = 1, \dots, 6\} \setminus \{y_3\}$  son continuas, excepto para la variable  $y_3$  que no existe condición.

Por tanto, por la continuidad, debe cumplirse que:

- En la frontera núcleo interno / externo la velocidad radial a cada lado de la frontera debe ser igual a cero.
- En el núcleo externo líquido, donde  $\mu = 0$ , la velocidad radial y el esfuerzo tangencial deben desaparecer en el lado del manto (es cero en el núcleo líquido), mientras que la velocidad tangencial puede ser discontinua. Por tanto, en el núcleo líquido, el sistema [2.6] se convierte en un sistema de cuarto orden, ya que  $y_3 = V_n = 0$  e  $y_4 = T_{r\theta} = 0$ .

De esta forma, se obtienen tres soluciones iniciales linealmente independientes en el núcleo interno sólido,  $\{y_{ij}^s; i = 1, \dots, 6; j = 1, 2, 3\}$ , y una en el núcleo externo líquido,  $\{y_i^l; i = 1, \dots, 6\}$ . Debe señalarse que, en el interior de la Tierra, los desplazamientos causados por la carga oceánica de marea decrecen a una razón de  $(r/R_T)^n$ , siendo  $r$  la distancia radial y  $R_T$  el radio terrestre. Se ha demostrado experimentalmente que, para números de Love de carga de grado bajo,  $n \leq 10$ , únicamente se producen deformaciones de magnitud significativa en el núcleo terrestre (p. ej., Pagiatakis, 1988). Por esta razón, la integración del sistema de ecuaciones [2.6] puede comenzar en el manto, de tal forma que la elección de la estructura del núcleo terrestre (la distribución de densidad y los parámetros elásticos) no es significativa (Farrell, 1972; Pagiatakis, 1988).

### 4) Las condiciones sobre la superficie terrestre, $r = R_T$

Sobre la superficie deformada de la Tierra debe verificarse que las componentes normal y tangencial del esfuerzo sean iguales al esfuerzo gravitatorio que actúa sobre la distribución de la densidad de la masa (Longman, 1963). Por tanto, las condiciones de frontera son:

- La componente normal del esfuerzo sobre la superficie terrestre es igual a la carga aplicada. Esto es, sobre la superficie deformada la presión de la carga  $-g_0\sigma_n$  introduce un esfuerzo normal

$$T_{rr,n}(R_T) = y_2(R_T, n) = -g_0\sigma_n = -g_0(2n+1)/4\pi R_T^2 \quad [2.11]$$

- La componente tangencial del esfuerzo sobre la superficie terrestre se anula

$$T_{r\theta,n}(R_T) = y_4(R_T, n) = 0 \quad [2.12]$$



Además, sobre la superficie terrestre se requiere una tercera condición aplicada al potencial gravitatorio perturbador, que se expresa de la siguiente forma

- En el caso  $n \neq 1$

$$Q_n(R_T) + \left[ (n+1)\Phi/r \right] \Big|_{r=R_T} = 4\pi G\sigma_n \quad [2.13]$$

donde  $Q_n$  viene definido por [1.32] y  $\sigma_n$  por [2.8], de tal forma que la condición puede expresarse equivalentemente como.

$$y_6(R_T, n) = 4\pi G\sigma_n - \left[ (n+1)/R_T \right] y_5(R_T, n) \quad [2.14]$$

- Para  $n = 1$

$$y_5(R_T, n) = R_T g_0 \quad [2.15]$$

De esta forma, las relaciones dadas por [2.11], [2.12], [2.14] y [2.15] expresan las tres condiciones de frontera en  $r = R_T$ .

Finalmente, el sistema de ecuaciones fundamentales [2.6], que rige la deformación de la Tierra y las variaciones de gravedad bajo el efecto de una carga puntual situada sobre su superficie, con las soluciones iniciales y condiciones de frontera anteriores, se resuelve mediante integración numérica (p. ej., el método de las diferencias finitas o los métodos de Runge-Kutta y de colocación de Chebyshev), con el fin de obtener los números de Love de carga.

### 2.3.2 Los Números de Love de Carga Elásticos

Con objeto de describir las deformaciones de la Tierra sometida a la acción de una carga, Munk y MacDonald introdujeron en 1960, por analogía con los números de Love convencionales, unos parámetros similares conocidos como los números de Love de carga. En contraste con los números de Love clásicos, que describen las deformaciones elásticas de la Tierra debido a las fuerzas de marea, los números de Love de carga están relacionados con las deformaciones causadas por la carga de una masa situada sobre la superficie terrestre. Longman (1963) fue el primero que dio una solución teórica sobre cómo calcular estos números y, posteriormente, Farrell (1972) mejoró el algoritmo de Longman para su cálculo. Para distinguir los números de Love convencionales de los números de Love de carga, estos últimos se denotan con una prima,  $h'_n$ ,  $l'_n$  y  $k'_n$ . Los números de Love de marea terrestre se obtienen mediante la solución de las ecuaciones linealizadas del movimiento y de Poisson, junto con la relación esfuerzo-deformación (Cap. 1). La única diferencia entre ambos conjuntos de números de Love se encuentra en las condiciones de frontera asociadas y en que la carga ejerce sobre la superficie libre un esfuerzo normal que no aparece en el caso de la marea terrestre.

### 2.3.2.1 Cálculo de los Números de Love de Carga para un Modelo de Tierra Esférica y Elástica

Convencionalmente, la deformación elástica de la Tierra debida a fuerzas externas, como la carga causada por la marea oceánica, se expresa usando los números de Love de carga adimensionales, los cuales son función de dos variables  $n$  y  $r$ , y se definen como (Farrell, 1972; Jentzsch, 1997)

$$\begin{cases} U_n(r) = \Phi_{2,n}(r)h'_n(r)/g \\ V_n(r) = \Phi_{2,n}(r)l'_n(r)/g \\ \Phi_{1,n}(r) = \Phi_{2,n}(r)k'_n(r) \end{cases} \quad [2.16]$$

donde  $g$  es el valor de la gravedad y  $\Phi_{2,n}$  el coeficiente de grado  $n$  del desarrollo armónico del potencial gravitatorio ejercido por la carga. Particularizando para la superficie terrestre,  $r = R_T$ , los números de Love de carga quedan definidos por

$$\begin{cases} U_n(R_T) = \Phi_{2,n}(R_T)h'_n/g_0 \\ V_n(R_T) = \Phi_{2,n}(R_T)l'_n/g_0 \\ \Phi_{1,n}(R_T) = \Phi_{2,n}(R_T)k'_n \end{cases} \quad [2.17]$$

con  $\Phi_{2,n}(R_T)$  dado por la ecuación [2.10].

### 2.3.2.2 Convergencia de los Números de Love de Carga

Cuando se determinan las funciones de Green, los parámetros de interés son  $h'_n$ ,  $nl'_n$  y  $nk'_n$ . Si  $n$  se incrementa a infinito, entonces  $h'_n$ ,  $nl'_n$  y  $nk'_n$  convergen a una constante. Farrell (1972) definió sus valores límites, a partir del problema de Boussinesq

$$\begin{pmatrix} h'_\infty \\ l'_\infty \\ k'_\infty \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} h'_n \\ nl'_n \\ nk'_n \end{pmatrix} = \frac{g_0 M_T}{4\pi R_T^2 \eta} \begin{pmatrix} -\sigma/\mu \\ 1 \\ -3\rho_0\eta/2\hat{\rho}_m\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(g_0^2/4\pi G)(\sigma/\eta\mu) \\ (g_0^2/4\pi G)(1/\eta) \\ -g_0\rho_0 R_T(1/2\mu) \end{pmatrix} \quad [2.18]$$

donde  $\rho_0$  y  $\hat{\rho}_m$  son la densidad sobre la superficie terrestre y un valor medio,  $\sigma = \lambda + 2\mu$  y  $\eta = \lambda + \mu$  son combinaciones de los parámetros de Lamé,  $\lambda$  y  $\mu$ , sobre la superficie terrestre. Para obtener la solución  $k'_\infty$  se considera que la masa total de la Tierra,  $M_T$ , es equivalente a la masa de una esfera con densidad media  $\hat{\rho}_m$  (normalizada con respecto a la masa unitaria) (Schrama, 2005)

$$M_T \approx (4/3)\pi\hat{\rho}_m R_T^3 \quad [2.19]$$

Consecuentemente, sólo es necesario calcular los números de Love de carga hasta un grado determinado. En la Tabla 2.1 se listan los valores asintóticos de los números de Love de carga calculados por diversos autores, para diferentes modelos de Tierra. Por ejemplo, Guo et al. (2004) calcularon estos valores asintóticos con una precisión de un orden  $1/n$  mayor que los determinados por Farrell (1972). Para ello, se buscaron propiamente las soluciones asintóticas de las ecuaciones diferenciales ordinarias gobernantes (Guo et al., 2004)

$$\begin{pmatrix} h_{\infty}'' \\ l_{\infty}'' \\ k_{\infty}'' \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} n(h_n' - h_{\infty}') \\ n(l_n' - l_{\infty}') \\ n(k_n' - k_{\infty}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_0^2}{4\pi G\eta} \left[ -\frac{\mu}{\eta} + \frac{g_0\rho_0 R_T (\lambda^2 + \lambda\mu - \mu^2)}{2\mu^2\eta} + \frac{2\pi G\rho_0 R_T \eta}{g_0\mu} \right] \\ \frac{g_0^2}{4\pi G\eta} \left[ -\frac{3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 3\mu^2}{2\mu\eta} + \frac{g_0\rho_0 R_T \sigma}{2\mu\eta} \right] \\ \frac{g_0\rho_0 R_T}{\mu} \left[ \frac{\lambda}{4\eta} + \frac{g_0\rho_0 R_T (2\lambda + \mu)}{8\mu\eta} + \frac{\pi G\rho_0 R_T}{g_0} \right] \end{pmatrix} \quad [2.20]$$

Generalmente, las ecuaciones [2.5] no se integran numéricamente para cada  $n$ . En su lugar, se calcula una serie de números de Love de carga espaciados (entre 40 y 50) y se determinan los restantes mediante alguna técnica de interpolación.

**TABLA 2.1:** Resultados numéricos de los valores asintóticos de los números de Love de carga, calculados por diversos autores, para diferentes modelos de Tierra.

Autor	Año	Modelo Terrestre	$-h_n'$	$nl_n'$	$-nk_n'$
Farrell	1972	Gutenberg-Bullen	5,005	1,673	2,482
Khan	2005	Gutenberg-Bullen	4,956	1,657	2,469
Lanzano	1982	1066A	11,358	3,431	4,704
Jentzsch	1997	PREM	6,239	1,893	3,072
Guo et al.	2004	PREM	$6,209144 - 3,470362/n$	$1,890061 - 0,252254/n$	$2,682697 + 6,376531/n$
Pagiatakis	1988	PREM <sup>(1)</sup>	6,274	1,894	3,097

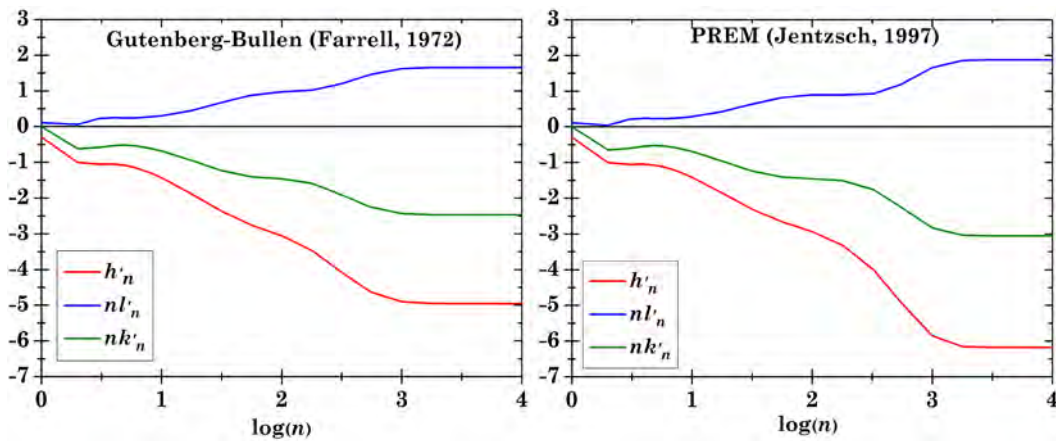
<sup>(1)</sup> A diferencia de los modelos anteriores, de tipo SNREI, Pagiatakis (1988) considera un modelo de Tierra anisótropo, en rotación y visco-elástico.

### 2.3.2.3 Comparación de los Números de Love de Carga para Modelos de Tierra SNREI

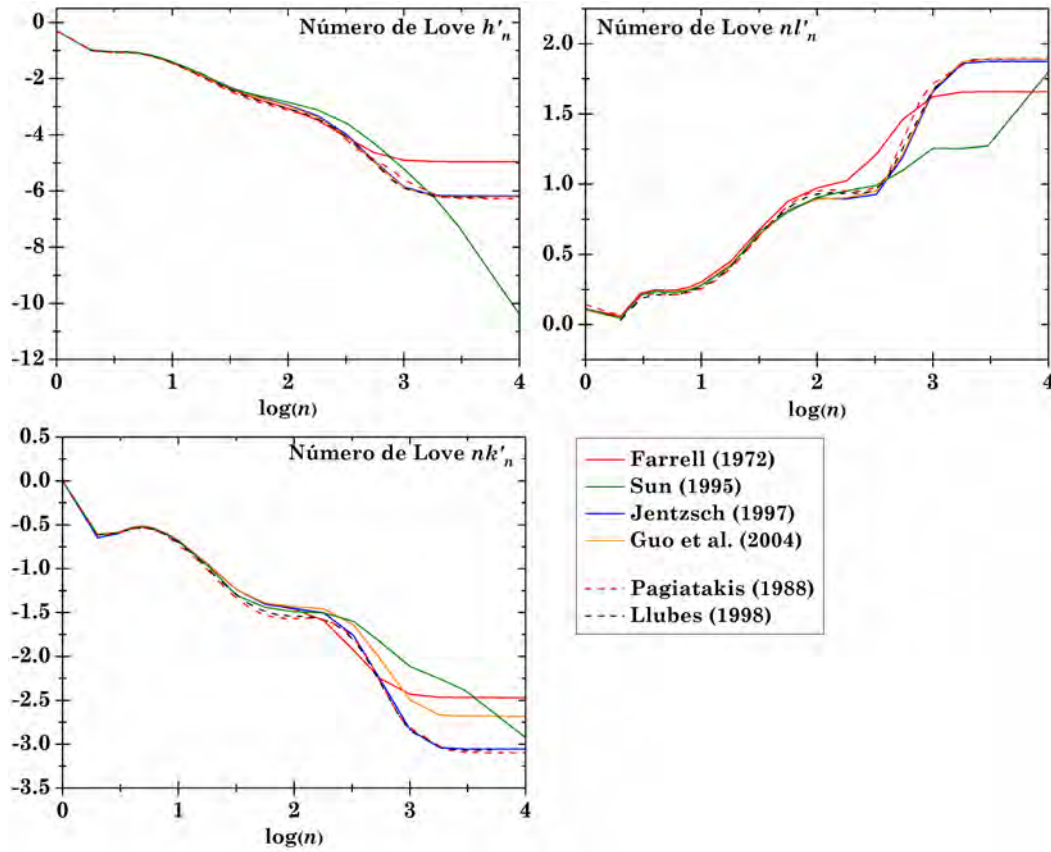
En el estudio de la respuesta terrestre a la fuerza de marea, se necesita considerar únicamente números de Love de grado bajo. Sin embargo, cuando se trata de fuerzas ejercidas por masas que actúan sobre la superficie terrestre, es necesario considerar números de Love de grado mucho más alto. Éstos se encuentran fuertemente influenciados por la estructura de la corteza y el manto superior terrestres. Aunque, generalmente, se ha asumido que las diferencias en los números de Love de carga, debidas a diferentes modelos de Tierra SNREI, son del orden del 1-1,5% (Plag y van Dam, 2002) lo cierto es que los resultados obtenidos por diversos autores muestran diferencias mucho mayores. Así, van Dam et al. (2003) encuentran diferencias entre los números de Love de carga calculados para el modelo de Tierra de Gutenberg-Bullen A por Farrell (1972) y los obtenidos para el modelo PREM por diversos autores de hasta el 10%. Asimismo, se encuentran discrepancias entre los números de Love de carga calculados para el modelo de Tierra PREM por los diversos autores superiores incluso al 1%. Es importante, por tanto, distinguir las fuentes de estas discrepancias. La principal diferencia radica en el método de integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por [2.5] y la aplicación de diferentes condiciones de frontera:

- Sun (1995) utiliza una modificación del método de Runge-Kutta para la integración de las ecuaciones de deformación.
- Jentzsch (1997) sigue el procedimiento descrito por Farrell (1972).
- Guo et al. (2004) resuelven el sistema hasta el grado  $10^4$  mediante el método de colocación de mínimos cuadrados.

En la Figura 2.1 se han representado los números de Love de carga  $-h'_n$ ,  $nl'_n$  y  $-nk'_n$ , en función del grado armónico  $n$ , para el modelo de Tierra Gutenberg-Bullen A calculados por Farrell (1972) y el modelo PREM calculados por Jentzsch (1997). Análogamente, en la Figura 2.2 se representan, junto con los anteriores, los números de Love de carga calculados para el modelo de Tierra PREM por Guo et al. (2004) y Sun (1995), así como las componentes reales de los números de Love complejos calculados por Pagiatakis (1988) y Llubes (1998). De la comparación de los diferentes conjuntos de números de Love de carga considerandos se deduce que, para  $n \leq 100$  los números de Love de carga calculados por Farrell (1972) para el modelo de Tierra Gutenberg-Bullen A, difieren hasta un 10% de los números de Love de carga calculados por otros autores para el modelo PREM. Estas diferencias son mayores para los términos de grado más alto,  $n > 1.000$ , debido a que éstos están muy influenciados por la estructura de la corteza terrestre y el manto superior (Houze y Weijian, 1987). Las discrepancias se reducen considerablemente, principalmente en  $l'_n$  y  $k'_n$ , cuando se comparan los números de Love de carga calculados por los diversos autores para el modelo de Tierra PREM.



**FIGURA 2.1:** Números de Love de carga (para una masa aplicada de 1 kg) en función del grado armónico  $n$ , calculados por Farrell (1972) y Jentzsch (1997), para los modelos de Tierra de Gutenberg-Bullen A (arriba) y PREM (abajo), respectivamente.



**FIGURA 2.2:** Valores de los números de Love de carga  $h'_n$ ,  $nl'_n$  y  $nk'_n$ , en función del grado armónico  $n$ , para los modelos de Tierra elástica Gutenberg-Bullen A, calculados por Farrell (1972), y PREM, calculados por Sun (1995), Jentzsch (1997) y Guo et al. (2004). Los valores dados por Pagiatakis (1988) y Llubes (1998) corresponden a la componente real de los números de Love de carga complejos determinados para el modelo de Tierra PREM y considerando la rotación de la Tierra, la anisotropía y la visco-elasticidad.

## 2.4 Las Funciones de Green de Carga

Una vez calculados los números de Love de carga, las funciones de Green, que representan las diferentes componentes de la respuesta de un modelo de Tierra a la carga que ejerce una masa puntual unitaria actuando sobre su superficie, pueden determinarse en función de la distancia angular entre el punto de observación y el punto de aplicación de la carga. Las funciones de Green consisten en sumas ponderadas de los números de Love de carga, que relacionan dichas funciones con las propiedades del modelo de Tierra considerado y los armónicos esféricos. Consecuentemente, las funciones de Green básicas corresponden a las dos componentes del desplazamiento, radial y tangencial, y al potencial perturbador. Otros efectos causados por la carga de la masa unitaria (es decir, las variaciones de gravedad, de inclinación y las componentes del tensor de deformación) se obtienen mediante la combinación lineal de números de Love de carga apropiados y, por tanto, de las funciones de Green básicas.

### 2.4.1 Función de Green para la Variación del Potencial Gravitatorio

Para un modelo de Tierra SNREI, la variación del potencial en un punto situado sobre la superficie terrestre, causada por la carga de una masa  $dm$  (que se asume concentrada sobre un único punto) situada sobre su superficie a una distancia angular  $\psi$  del punto de observación (Fig. 2.3), está compuesta por la suma del potencial gravitatorio inducido por la carga más el potencial adicional debido a la deformación producida por la carga

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = dm \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) [1 + k'_n] P_n(\cos \psi) \quad [2.21]$$

ya que:

- El **potencial inducido por la carga** en un punto  $P(r, \theta, \lambda)$ ,  $\Phi_2$ , no es más que el potencial gravitatorio ejercido por la masa  $dm$  que, expresado en términos de los polinomios de Legendre y la distancia radial  $r$ , viene dado por

$$\Phi_2(r, \psi) = (Gdm/R_T) \sum_{n=0}^{\infty} (r/R_T)^n P_n(\cos \psi) = dm \sum_{n=0}^{\infty} (r/R_T)^n \Phi_{2,n}(R_T) P_n(\cos \psi) \quad [2.22]$$

donde se ha tenido en cuenta que la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre verifica [2.9] y  $\Phi_{2,n}(R_T)$  dado en [2.10].  $R_T$ ,  $M_T$  y  $g_0$  denotan el radio de la Tierra, su masa y el valor de la gravedad sobre la superficie terrestre. Para  $r = R_T$  y haciendo uso de [B.1] (Apéndice 1), el potencial inducido por la carga se expresa como

$$\Phi_2(\psi) = dm \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) P_n(\cos \psi) = g_0 (R_T/M_T) (1/2 \sin(\psi/2)) dm \quad [2.23]$$

- En el caso de una Tierra elástica, la acción de la carga sobre la superficie terrestre produce, además del potencial gravitatorio que ejerce la carga sobre el punto de observación, dos efectos relacionados. Una depresión de la superficie terrestre bajo la presión ejercida por la carga y, como consecuencia de este cambio de forma de la Tierra, una variación posterior en el potencial gravitatorio, que se denomina **potencial adicional causado por la redistribución de masas** y cuyos coeficientes armónicos vienen dados por [2.16]. Teniendo en cuenta que este potencial adicional tiene carácter de potencial gravitatorio externo y que, por tanto, es un armónico esférico externo proporcional a  $(R_T/r)^{n+1}$  (Moritz y Mueller, 1988), se tendrá que

$$\Phi_1(r, \psi) = \frac{Gdm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_T}{r} \right)^n k'_n(r) P_n(\cos \psi) = dm \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) k'_n(r) \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad [2.24]$$

En particular, sobre la superficie terrestre  $r = R_T$

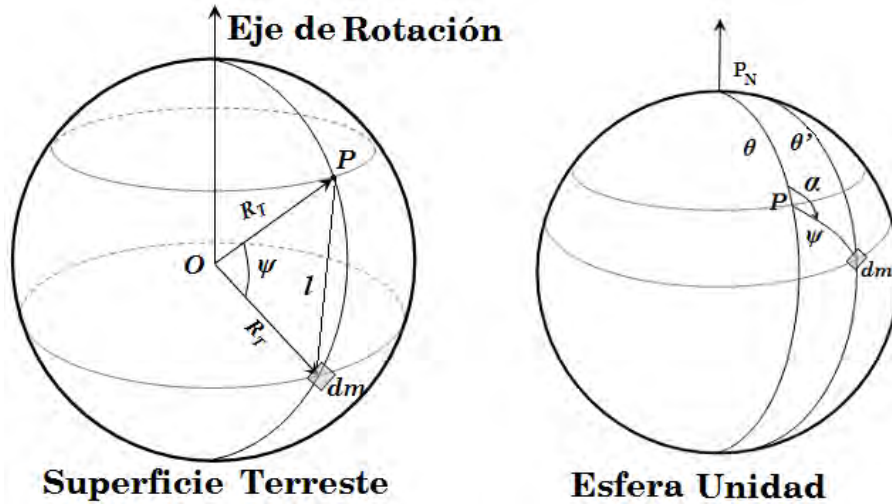
$$\Phi_1(\psi) = g_0 (R_T/M_T) dm \sum_{n=0}^{\infty} k'_n P_n(\cos \psi) = dm \sum_{n=0}^{\infty} \Phi'_{2,n}(R_T) P_n(\cos \psi) \quad [2.25]$$

donde se ha llamado

$$\Phi'_{2,n}(R_T) = \Phi_{2,n}(R_T) k'_n \quad [2.26]$$

Puesto que la Tierra responde linealmente a la carga impuesta, los coeficientes del desarrollo armónico  $\Phi'_{2,n}$  son proporcionales, grado a grado, a  $\Phi_{2,n}$ .

Por tanto, la suma del potencial inducido por la carga y el potencial adicional procedente de la redistribución de masas, dados sobre la superficie terrestre por [2.23] y [2.25], constituyen la variación en el potencial sobre la superficie no deformada causado por la carga y queda determinado por la ecuación [2.21].



**FIGURA 2.3:** (Izda.) Distancia angular  $\psi$  desde un punto  $P$  situado sobre la superficie terrestre a un elemento de masa  $dm$  que ejerce una carga sobre la superficie. (Dcha.) Acimut  $\alpha$ , medido desde el Norte, desde el punto de observación  $P$  hasta el punto de aplicación de la carga, ambos proyectados sobre la esfera unidad. Se señala el triángulo esférico determinado por los puntos  $P_N$ ,  $P$  y  $dm$ .  $\theta$  y  $\theta'$  denotan la colatitud de  $P$  y de  $dm$ , respectivamente.

La función de Green para la variación en el potencial gravitatorio [2.21] se define como

$$G_{\Phi}(\psi) \equiv \Phi(\psi)/dm = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) [1 + k_n'] P_n(\cos\psi) \quad [2.27]$$

con  $\Phi_{2,n}(R_T)$  dado por la [2.10].  $G_{\Phi}$ , por su propia definición, tiene dimensiones de potencial por unidad de masa. El primer sumando entre corchetes corresponde a la componente rígida y el segundo a la elástica. Adicionalmente, sobre una Tierra elástica, el desplazamiento vertical causa otro potencial indirecto, que es proporcional al potencial generador de marea por un factor  $h_n'$ . Por tanto, la **variación total del potencial en un punto de la superficie terrestre** es la suma de todos los términos anteriores, es decir,

$$\Phi = dm \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) [1 + k_n' - h_n'] P_n(\cos\psi) \quad [2.28]$$

y la función de Green correspondiente vendrá dada por

$$G_{\Phi}(\psi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) [1 + k_n' - h_n'] P_n(\cos\psi) = g_0(R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + k_n' - h_n'] P_n(\cos\psi) \quad [2.29]$$

Obsérvese que en la expresión de la variación del potencial gravitatorio [2.21], el término de grado  $n = 0$  desaparece. Por una parte, dicho término constante no aparece en la expresión del potencial gravitatorio, en este caso, ejercido por la carga. Por otra parte, puesto que la redistribución de masas sobre la superficie de la Tierra no cambia su masa total, este término constante y uniforme sobre toda

Tierra no produce perturbación en el potencial ni desplazamiento tangencial, aunque sí causa desplazamiento radial al ser la Tierra compresible (Farrell, 1972).

### 2.4.2 Función de Green para el Desplazamiento Radial

La función de Green para el desplazamiento radial,  $u_r$ , en un punto situado sobre la superficie sólida de la Tierra viene expresada en términos del número de Love de carga  $h_n'$ . El desplazamiento radial, a una distancia angular  $\psi$  del punto de carga y una distancia radial  $r$ , puede desarrollarse como una serie de polinomios de Legendre sustituyendo [2.16] en [2.3]

$$u_r(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(r) (h_n'(r)/g) P_n(\cos \psi) \quad [2.30]$$

donde  $h_n'$  es el número de Love de carga elástico, que dependerá del modelo de Tierra considerado. La distancia angular geocéntrica,  $\psi$ , entre el punto de observación  $(\theta, \lambda)$  y el punto de aplicación de la carga  $(\theta', \lambda')$  puede calcularse a partir de la fórmula del coseno. Si el punto de observación se encuentra situado sobre la superficie terrestre,  $r = R_T$ , teniendo en cuenta [2.10] y [2.9] la ecuación [2.30] se expresa como

$$u_r(\psi) = (1/g_0) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) h_n' P_n(\cos \psi) = (R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} h_n' P_n(\cos \psi) \quad [2.31]$$

donde  $R_T$  denota el radio medio de la Tierra y  $M_T$  su masa. El hecho de que los números de Love de carga elásticos alcancen un límite asintótico cuando  $n$  es lo suficientemente grande (Secc. 2.3.2.2), permite reescribir la suma de una serie infinita involucrando polinomios de Legendre como la suma de una serie finita, más una expresión analítica, a través de la transformación de Kummer (Farrell, 1972). De esta forma, usando el valor del límite asintótico definido en [2.18] y siendo  $N$  el grado tal que para  $n > N$  se verifica que  $(h_n' - h_\infty') = 0$ , es posible reescribir la suma infinita en [2.31] como

$$u_r(\psi) = (R_T/M_T) h_\infty' \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) + (R_T/M_T) \sum_{n=0}^N (h_n' - h_\infty') P_n(\cos \psi) \quad [2.32]$$

El primer término de la ecuación anterior tiene solución exacta, calculada a partir de la expresión analítica de las sumas de las series de Legendre [B.1] (Apéndice 1)

$$u_r(\psi) = R_T h_\infty' / 2M_T \sin(\psi/2) + (R_T/M_T) \sum_{n=0}^N (h_n' - h_\infty') P_n(\cos \psi) \quad [2.33]$$

Siguiendo las recomendaciones de Farrell (1972), como grado asintótico se toma  $N = 10^4$  (véase en la Fig. 2.1 como a partir de este grado se alcanza el valor del límite asintótico). La función  $u_r(\psi)$  anterior presenta una singularidad en el origen, ya que las series armónicas  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi)$  divergen para  $\psi = 0$ . Este hecho pone de manifiesto la importancia en el cálculo del EOI de las cargas aplicadas en el entorno del punto de interés, cuestión que será tratada en apartados posteriores. Generalmente, las funciones de Green se presentan multiplicadas por un factor escalar y listadas de acuerdo a la distancia angular entre el punto estación y el punto de aplicación de la carga. Así, en el caso del desplazamiento radial



$$\mathcal{G}_T(\psi) = \mathcal{G}(\psi) K(R_T \psi) \quad [2.34]$$

donde se ha denotado por  $\mathcal{G}(\psi)$  la función de Green de carga y por  $\mathcal{G}_T(\psi)$  la función tabulada para una serie de distancias angulares y normalizada por  $K(R_T \psi)$ , donde el factor de escala  $K$  toma, en este caso, el valor  $K = 10^{12}$ . Posteriormente, se utilizan procedimientos de interpolación polinomial para evaluarlas a cualquier distancia angular  $\psi$ . De esta forma, la normalización aplicada, en este caso  $10^{12}(R_T \psi)u_r(\psi)$ , elimina la singularidad en el origen en la serie [2.33], ya que

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \psi u_r(\psi) = (R_T / M_T) h_\infty'$$

La Figura 2.4 muestra la función de Green para el desplazamiento radial calculada para el modelo de Tierra de Gutenberg-Bullen y normalizada, para su representación, de la forma  $u_r / u_r^*$ , siendo (Farrell, 1972)

$$u_r^*(\psi) = G h_\infty' / g R_T \psi \quad [2.35]$$

donde  $h_\infty$  está dado en la Tabla 2.1. Ya que la función de Green para el desplazamiento radial decrece con el inverso de la distancia al punto de aplicación de la carga (Baker, 1984), se observa como el desplazamiento en el entorno del punto de observación es mucho mayor que a mayor distancia, donde su amplitud decrece gradualmente. En particular, en el caso de la carga ejercida por la marea oceánica, este hecho pone de manifiesto la mayor contribución al efecto de carga sobre el punto de observación de su entorno. Por esta razón, el desarrollo de modelos oceánicos locales y regionales de alta resolución, lo que será tratado en el siguiente Capítulo, posibilita una estimación más exacta del efecto de carga.

### 2.4.3 Función de Green para el Desplazamiento Tangencial

La función de Green para el desplazamiento tangencial  $u_\psi$ , a lo largo de la dirección  $\psi$  desde el punto de observación al punto de aplicación de la carga, está representada en términos del número de Shida de carga  $l_n'$  y por las funciones de Legendre. Sobre la superficie terrestre viene dada, sustituyendo [2.17] y [2.10] en [2.3], por

$$u_\psi(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2,n}(R_T) (l_n' / g_0) (\partial P_n(\cos \psi) / \partial \psi) = (R_T / M_T) \sum_{n=1}^{\infty} l_n' \partial P_n(\cos \psi) / \partial \psi \quad [2.36]$$

Obsérvese que no existe desplazamiento tangencial de grado  $n = 0$  puesto que  $P_0(\cos \psi) = 1$  y, por tanto, su derivada es nula. Denotando por  $\alpha$  el acimut desde el punto de observación hasta el punto de aplicación de la carga, medido desde el Norte (Fig. 2.3), la proyección del vector unitario  $\mathbf{e}_\psi$  sobre las direcciones Norte-Sur y Este-Oeste proporciona las componentes de la función de Green del desplazamiento horizontal en las direcciones Norte-Sur (componente longitudinal) y Este-Oeste (componente transversal)

$$u_{NS}(\psi) = -\cos \alpha \cdot u_\psi(\psi) \quad u_{EO}(\psi) = -\sin \alpha \cdot u_\psi(\psi) \quad [2.37]$$

De forma análoga al desplazamiento radial, es posible reescribir la suma infinita de la serie en [2.36] haciendo uso del valor asintótico del número de Love de carga  $l'_n$ , tal que para  $n > N$  se verifica que  $(nl'_n - l'_\infty) = 0$ . Así,

$$u_\psi(\psi) = \frac{R_T}{M_T} l'_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos\psi)}{\partial \psi} + \frac{R_T}{M_T} \sum_{n=1}^N \frac{nl'_n - l'_\infty}{n} \frac{\partial P_n(\cos\psi)}{\partial \psi} \quad [2.38]$$

donde el primer sumando tiene suma exacta, a partir de la expresión analítica de las sumas de series de Legendre dada en [B.5] (Apéndice 1). De esta forma [2.38] se transforma en

$$u_\psi(\psi) = \frac{R_T}{M_T} \left\{ -l'_\infty \frac{\cos(\psi/2)[1 + 2\sin(\psi/2)]}{2\sin(\psi/2)[1 + \sin(\psi/2)]} + \sum_{n=1}^N \frac{nl'_n - l'_\infty}{n} \frac{\partial P_n(\cos\psi)}{\partial \psi} \right\} \quad [2.39]$$

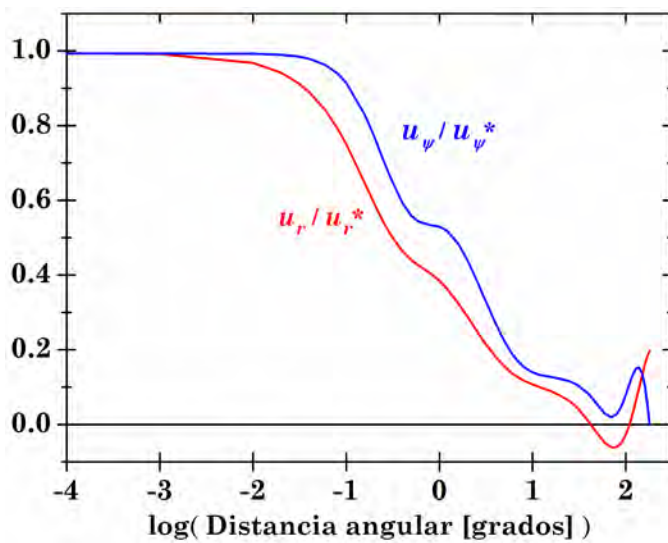
Como en el caso del desplazamiento radial, la singularidad en el origen que presenta la ecuación anterior puede ser eliminada tabulando la función de Green de la forma [2.34], ya que en ese caso

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \psi u_\psi(\psi) = -(R_T/M_T) l'_\infty$$

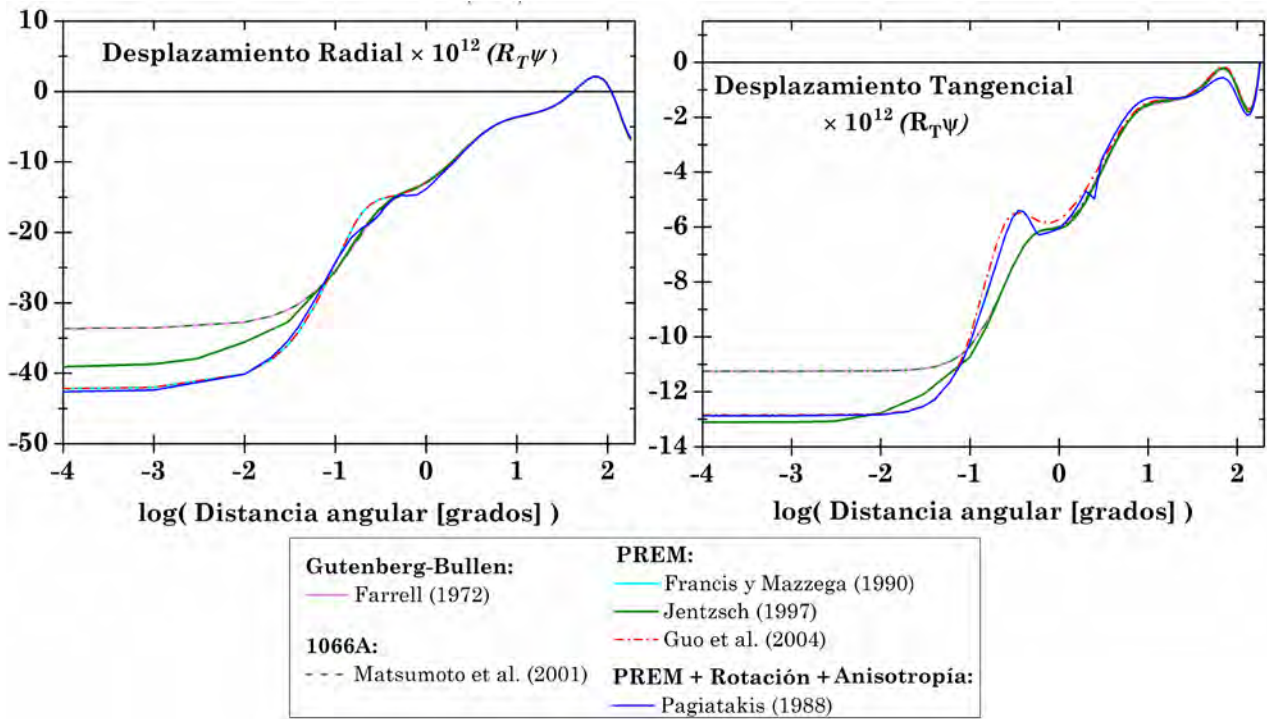
La Figura 2.4 muestra la función de Green para el desplazamiento tangencial, calculada para el modelo de Tierra de Gutenberg-Bullen y normalizada, para su representación, de la forma  $u_\psi/u_\psi^*$ , siendo (Farrell, 1972)

$$u_\psi^*(\psi) = -Gl_\infty/gR_T\psi \quad [2.40]$$

donde  $l_\infty$  está dado en la Tabla 2.1. También en este caso, el valor de la función de Green para el desplazamiento tangencial en el entorno del punto de observación es mucho mayor que a distancias superiores, ya que ésta decrece con el inverso de la distancia al punto de aplicación de la carga.



**FIGURA 2.4:** Funciones de Green de carga normalizadas (según [2.33] y [2.38]) para los desplazamientos radial (rojo) y tangencial (azul), calculadas para el modelo de Tierra Gutenberg-Bullen A por Farrell (1972). El eje x muestra las distancias angulares, en grados, y las unidades de  $u_r$  y  $u_\psi$  están en m.



**FIGURA 2.5:** Funciones de Green de carga para el desplazamiento radial (izda.) y tangencial (dcha.) para los modelos de Tierra de Gutenberg-Bullen A (calculadas por Farrell, 1972), 1066A (calculadas por Okubo y Saito, 1983, y Endo y Okubo, 1984), PREM (calculadas por Francis y Mazzega, 1990, Jentzsch, 1997, y Guo et al., 2004). Se representa, además, la componente real de la función de Green de carga compleja calculada por Pagiatakis (1988) para el modelo de Tierra PREM considerando la rotación de la Tierra, la anisotropía y la visco-elasticidad. El eje x muestra las distancias angulares, en grados, y las unidades de desplazamiento están en m (multiplicadas por  $10^{12}(R_T\psi)$ , con  $R_T$  el radio de la Tierra y  $\psi$  en radianes).

#### 2.4.4 Función de Green para las Variaciones de Gravedad

La diferencia entre la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre y la aceleración sobre la superficie deformada, después de la aplicación de la carga, se conoce como efecto gravitatorio de la carga o **variación de gravedad por el efecto de la carga** (se denota por  $g_s(\psi)$ ).

La función de Green que representa las variaciones de gravedad en un punto de la superficie terrestre bajo la acción de una carga puntual unitaria, se expresa como la suma de dos componentes, a las que se denomina **componente Newtoniana** y **componente elástica** de las funciones de Green

$$g_s(\psi) = g_s^N(\psi) + g_s^E(\psi) \quad [2.41]$$

La **componente newtoniana** de la función de Green de gravedad,  $g_s^N(\psi)$ , está causada por la componente vertical de la atracción gravitatoria directa de la carga, que origina la masa de agua que actúa sobre el punto de la superficie. La **componente elástica** de la función de Green de gravedad,  $g_s^E(\psi)$ , es, a su vez, suma de dos contribuciones (Zhang et al., 2004). La primera de ellas es proporcional a  $h_n'$  y proviene de la variación de la gravedad en el punto de observación originada por

el desplazamiento vertical de la superficie en dicho punto, a través del campo de gravedad no perturbado de la Tierra. La segunda contribución está originada por la variación en el potencial gravitatorio debido a la redistribución de masas en el interior de la Tierra durante la deformación elástica, que es proporcional a  $k'_n$ .

#### 2.4.4.1 Componente Newtoniana de la Función de Green para Variaciones de Gravedad

La componente de la gravedad producida por la atracción directa de la carga,  $g_s^N(\psi)$ , se obtiene mediante diferenciación del potencial inducido por la carga con respecto a la distancia radial  $r$  y evaluando para  $r = R_T$ . Con este fin, reescribiendo  $\Phi_2(r, \psi)$  definido en [2.22], de la forma

$$\Phi_2(r, \psi)/dm = g_0(R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} (r/R_T)^n P_n(\cos \psi) = g_0(R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad [2.42]$$

donde se ha llamado  $U_n(r, \psi) = (r/R_T)^n P_n(\cos \psi)$ . Diferenciando ahora  $U_n$  con respecto a  $r$  y evaluando para  $r = R_T$ , se observa que

$$\left( \partial U_n / \partial r \right) \Big|_{r=R_T} = \left[ n (r^{n-1} / R_T^n) P_n(\cos \psi) \right] \Big|_{r=R_T} = \left[ (n/r) (r/R_T)^n P_n(\cos \psi) \right] \Big|_{r=R_T} = n (U_n / R_T) \quad [2.43]$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{1}{dm} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{R_T} P_n(\cos \psi) \quad [2.44]$$

Así, la componente newtoniana de la función de Green para variaciones de gravedad, viene dada por

$$g_s^N(\psi) \equiv \frac{1}{dm} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(\cos \psi) \quad [2.45]$$

Esta componente es independiente de los números de Love de carga y representa la atracción gravitatoria directa ejercida por la carga. La expresión [2.45] tiene suma exacta, haciendo uso de la expresión analítica de las sumas de Legendre [B.2] (Apéndice 1)

$$g_s^N(\psi) = -g_0 / (4M_T \sin(\psi/2)) \quad [2.46]$$

A grandes distancias del océano, el efecto de atracción newtoniana ejercido por las masas de agua es mayor que la variación de gravedad causada por la deformación elástica bajo la carga (Baker, 1984; Jentzsch et al.; 2000). Cerca de la costa, cuando el punto de observación se encuentra situado al nivel del mar, generalmente, es dominante la variación de gravedad debida a la componente elástica (deformación elástica más redistribución de masas), del orden de 19 veces la componente newtoniana (Bos et al., 2002). Por el contrario, si el punto de observación se encuentra próximo al océano pero a una altitud considerable, la componente de atracción puede ser comparable, en magnitud, a la componente de la deformación elástica, o incluso superior en uno o dos órdenes de magnitud.

La singularidad en el origen que presenta [2.46] puede eliminarse considerando, en la componente newtoniana de la función de Green, el efecto de la topografía en el punto de observación, es decir, la altitud por encima o por debajo del nivel del mar.

## Corrección por la Altitud del Punto de Observación

En el cálculo de la atracción directa de la carga debe tenerse en cuenta el efecto de la altitud del punto de observación por encima del nivel del mar, puesto que en puntos próximos a la costa la magnitud de este efecto es proporcional a dicha altitud y decrece, aproximadamente, de forma inversamente proporcional al cubo de la distancia a la carga (Baker, 1985). Si se tiene en cuenta la altitud  $h$  del punto de observación, la expresión analítica de la atracción gravitatoria directa se deduce derivando el potencial gravitatorio causado por la carga [2.22] y evaluando, en este caso, para

$$r = R_T + h$$

$$g_s^N(\psi, h) \equiv \frac{1}{dm} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_T+h} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{R_T} \right)^n P_n(\cos \psi) \Big|_{r=R_T+h} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \frac{1}{R_T} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n P_n(\cos \psi) \Big|_{r=R_T+h} \quad [2.47]$$

donde se ha llamado  $x = r/R_T$ . Utilizando la expresión analítica de las sumas de series de Legendre en [B.7] (Apéndice 1), se obtiene la expresión exacta para la componente newtoniana de la función de Green corregida por la altitud  $h$  del punto de observación (Agnew, 1996; Bos y Baker, 2005)

$$g_s^N(\psi, h) = -\frac{g_0}{M_T} \frac{2 \sin^2(\psi/2) + (h/R_T)}{\left[ 4 \sin^2(\psi/2)(1 + h/R_T) + (h/R_T)^2 \right]^{3/2}} \quad [2.48]$$

### 2.4.4.2 Componente Elástica de la Función de Green para Variaciones de Gravedad

La componente elástica de la función de Green de gravedad, de acuerdo con [2.41], es  $g_s^E(\psi) = g_s(\psi) - g_s^N(\psi)$ . Describe la variación de gravedad debida a la deformación elástica y la redistribución de masas en el interior de la Tierra, que origina la carga ejercida por la marea oceánica, en términos de los números de Love  $h_n'$  y  $k_n'$ .

- Por una parte, reescribiendo el potencial adicional  $\Phi_1(r, \psi)$  causado por la redistribución de masas, dado por [2.24], de la forma

$$\frac{\Phi_1(r, \psi)}{dm} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} k_n'(r) P_n(\cos \psi) = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} k_n'(r) U_n'(r, \psi) \quad [2.49]$$

con  $U_n'(r, \psi) = (R_T/r)^{n+1} P_n(\cos \psi)$ . Diferenciando  $U_n'$  con respecto a la distancia radial  $r$  y evaluando para  $r = R_T$ , se observa que

$$\frac{\partial U_n'}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \right] \Big|_{r=R_T} = \left[ -\frac{(n+1)}{r} \left( \frac{R_T}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \right] \Big|_{r=R_T} = -(n+1) \frac{U_n'}{R_T} \quad [2.50]$$

de tal forma que

$$\frac{1}{dm} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = \frac{g_0 R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} k_n'(r) \frac{\partial U_n'}{\partial r} \Big|_{r=R_T} = -\frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) k_n' P_n(\cos \psi) \quad [2.51]$$

- Por otra parte, la variación de gravedad debida al desplazamiento radial de la Tierra causado por la aplicación de la carga sobre su superficie, se obtendrá multiplicando este desplazamiento

por el gradiente de la gravedad. Así, teniendo en cuenta que en ausencia de fuerza centrífuga se verifica que

$$g = GM_T / r^2 \quad [2.52]$$

el gradiente de gravedad se expresa, derivando con respecto a  $r$  y evaluando para  $r = R_T$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial r} \right|_{r=R_T} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{GM_T}{r^2} \right]_{r=R_T} = - \left[ \frac{GM_T}{r^2} \frac{2}{r} \right]_{r=R_T} = - \left[ g \frac{2}{r} \right]_{r=R_T} = - \frac{2g_0}{R_T} \quad [2.53]$$

Finalmente, multiplicando por el desplazamiento radial causado por la carga, dado por [2.31], se obtiene la contribución a la variación de gravedad debida a dicho desplazamiento

$$- \left. \frac{\partial g}{\partial r} u_r(\psi) \right|_{r=R_T} = \frac{2g_0}{R_T} \frac{R_T}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} h_n' P_n(\cos \psi) = \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} 2h_n' P_n(\cos \psi) \quad [2.54]$$

(El signo menos, por convención, indica que una disminución en  $g$  es positiva).

Por tanto, la componente elástica de la función de Green para la variación de gravedad será la suma de las contribuciones [2.51] y [2.54], es decir

$$g_s^E(\psi) = (g_0/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} [2h_n' - (n+1)k_n'] P_n(\cos \psi) \quad [2.55]$$

En este caso, también es posible utilizar los valores asintóticos de los números de Love  $h_n'$  y  $k_n'$ , tales que para  $n > N$  se verifica que  $(h_n' - h_{\infty}') = 0$  y  $(nk_n' - k_{\infty}') = 0$ , para reescribir la serie infinita [2.55] como la suma de una expresión analítica y una serie finita

$$g_s^E(\psi) = - \frac{g_0}{M_T} \left\{ (-2h_{\infty}' + k_{\infty}') / 2 \sin(\psi/2) - k_{\infty}' \log [\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)] - \sum_{n=0}^N [2(h_n' - h_{\infty}') - ((n+1)/n)(nk_n' - k_{\infty}')] P_n(\cos \psi) \right\} \quad [2.56]$$

donde para la parte proveniente del desplazamiento vertical se han utilizado las expresiones analíticas para las sumas de las series de Legendre [B.1] (Apéndice 1). Las expresiones [B.1] y [B.3] se han empleado para calcular el término correspondiente a la redistribución de masas. Generalmente, la componente elástica de la función de Green de carga para las variaciones de gravedad, al igual que en los casos anteriores, se presenta tabulada para una serie de distancias angulares y normalizadas según [2.34], considerando en este caso el factor de escala  $K = 10^{18}$ .

Cuando  $\psi$  es pequeño, la componente elástica de la función de Green de gravedad dada por [2.55] puede aproximarse sustituyendo  $h_n'$  por  $h_{\infty}'$  y  $(n+1)k_n'$  por  $k_{\infty}'$ , de tal forma que, utilizando la expresión analítica [B.1], se reduce a (Melchior, 1983)

$$g_s^E(\psi) = g_0 (4h_{\infty}' - 2k_{\infty}') / 4M_T \sin(\psi/2) \quad [2.57]$$

#### 2.4.4.3 Función de Green para Variaciones de Gravedad y el Factor Gravimétrico

De acuerdo con lo anterior, la suma de las componentes elástica y newtoniana de las variaciones de gravedad causadas por la carga define la función de Green para variaciones de gravedad, en un punto sobre la superficie terrestre (p. ej., Longman, 1963; Farrell, 1972)

$$g_s(\psi) \equiv (1/dm) \left( \partial\Phi_2/\partial r \Big|_{r=R_T} + \partial\Phi_1/\partial r \Big|_{r=R_T} - (\partial g/\partial r) u_r(\psi) \Big|_{r=R_T} \right) =$$

$$= \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} n \left[ 1 - \frac{(n+1)}{n} k'_n + \frac{2}{n} h'_n \right] P_n(\cos\psi) = \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} n \delta'_n P_n(\cos\psi) \quad [2.58]$$

En la ecuación anterior, por convención de signo en mareas terrestres, las variaciones de gravedad se consideran positivas en dirección hacia el cenit (esto es, un decrecimiento en gravedad es positivo). Tanto el valor medio de la gravedad sobre la superficie terrestre,  $g_0$ , como el de la masa de la Tierra,  $M_T$ , son factores de escala y deben verificar la condición [2.9]. Obsérvese que en [2.58] se ha denotado

$$\delta'_n = 1 - \left[ (n+1)/n \right] k'_n + (2/n) h'_n \quad [2.59]$$

de tal forma que, para cada  $n$ ,  $n(g_0/M_T)P_n(\cos\psi)$  es la variación de gravedad que podría observarse sobre una Tierra rígida (caso [2.47]) y  $\delta'_n$  es un factor de amplitud adimensional, denominado **factor gravimétrico** de grado  $n$  ( $h'_n$  y  $k'_n$  son los números de Love de carga radial y potencial, respectivamente). En este factor, como se ha visto, el primer término representa la diferencia entre la atracción gravitatoria ejercida por la masa. Por tanto, no contiene información sobre las propiedades elásticas de la Tierra. Únicamente, el segundo y el tercer término contribuyen a la respuesta de la Tierra. El segundo término representa la variación de gravedad debida a la redistribución de masas (gradiente vertical del potencial adicional). Obsérvese que la variación de gravedad total debida a la variación de potencial será la suma de [2.47] y [2.51]. Finalmente, el tercer término describe la variación de gravedad debida al desplazamiento radial en el campo de gravedad no perturbado. A cualquier distancia de la carga, ambas contribuciones a la componente elástica de la función de Green, la procedente del potencial perturbador causado por la deformación y la debida al desplazamiento radial, lo hacen en la misma proporción.

La Fig. 2.6 muestra la componente elástica de la función de Green para las variaciones de gravedad, normalizada con respecto a la componente newtoniana.

#### 2.4.5 Comparación de las Funciones de Green de Carga para Modelos de Tierra SNREI

Desde Farrell en 1972, quien calculó las funciones de Green de carga para los desplazamientos radial y tangencial, las variaciones de gravedad e inclinación, así como los elementos del tensor de deformación para el modelo de Tierra estándar de Gutenberg-Bullen A (tabulado en Alterman et al., 1961), diversos autores han recalculado dichas funciones empleando diferentes modelos de Tierra elástica. Así, por ejemplo, para estudiar la influencia de la estructura del manto superior y de la corteza terrestre sobre las funciones de Green, Farrell llevó a cabo los cálculos considerando dos estructuras diferentes, sustituyendo los últimos 1.000 km del modelo de Tierra de Gutenberg-Bullen por las estructuras de corteza continental y oceánica de Harkrider (1970).

En las Figuras 2.4 y 2.6 se representan las diferentes componentes de las funciones de Green de carga para los desplazamientos, en las direcciones radial y tangencial, y para las variaciones de

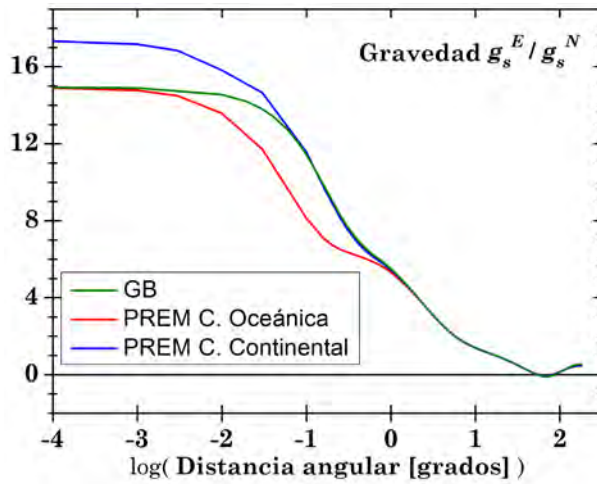
gravedad, respectivamente, para el modelo de Tierra estándar Gutenberg-Bullen A calculadas por Farrell (1972). Asimismo, las Figuras 2.5 y 2.7 presentan las funciones de Green de carga calculadas por diversos autores y para diferentes modelos de Tierra SNREI. En ellas se observa como la carga ejercida por una masa unitaria causa un desplazamiento de la corteza terrestre en dirección al punto de aplicación de la carga, que decrece gradualmente. Asimismo, se observa como el módulo de la gravedad aumenta en dirección al punto de carga.

Okubo y Saito (1983) y Endo y Okubo (1984) obtuvieron las funciones de Green de carga empleando el modelo de Tierra elástica 1066A. Jentzsch (1997) calculó las funciones de Green de carga para el modelo de Tierra PREM (Dziewonski y Anderson, 1981) considerando diferentes estructuras de la corteza terrestre, continental y oceánica. Sus resultados están representados, para el caso de las variaciones de gravedad, en la Fig. 2.6. En ella se observa que, al igual que en el caso de los resultados obtenidos por Farrell, y como se trató en el Capítulo 1, la corteza continental se deforma más por la aplicación de la carga. Farrell (1972) encontró que un cambio en la estructura de los parámetros elásticos de la Tierra afecta a las funciones de Green de carga, hasta una profundidad de 200 km. Esta relación entre las funciones de Green y la estructura elástica de la corteza y el manto terrestre en función de la profundidad fue confirmada, posteriormente, por Rabbel (1982) quien, además, verificó su validez para una capa comprendida desde la superficie terrestre hasta los 400 km de profundidad (p.ej., Sun y Sjöberg, 1998; Zahran et al., 2006).

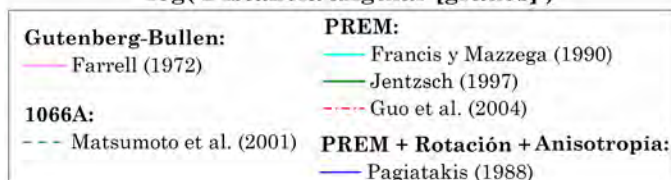
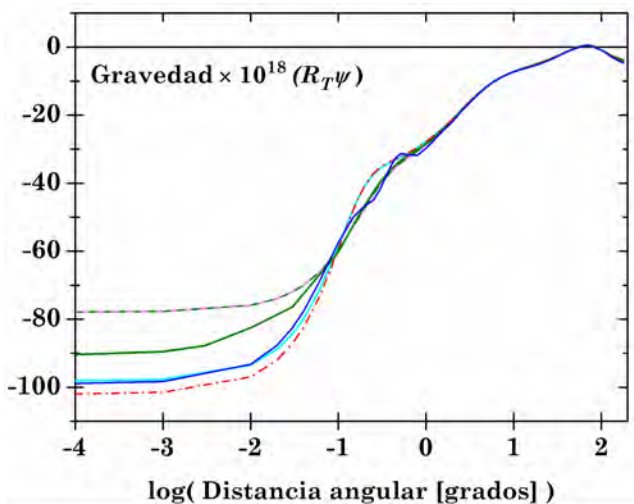
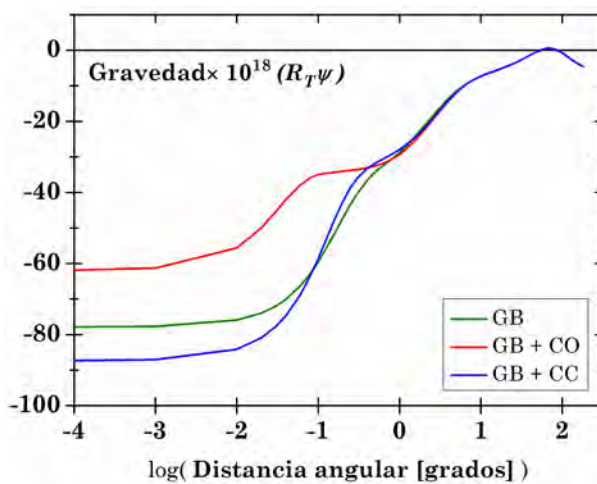
Francis y Mazzega (1990) y Guo et al. (2004) calcularon las funciones de Green de carga para el modelo de Tierra PREM a partir de los números de Love de carga tabulados según el método descrito por Francis y Dehant (1987) y el método de colocación de Chebyshev, respectivamente. Los resultados difieren ligeramente entre ellos por diversas razones. Aunque para su cálculo utilizan diferentes valores para  $g_0$  y  $M_T$ , este hecho no provoca diferencias significativas en los resultados. Por el contrario, las diferencias pueden atribuirse a los números de Love de carga empleados en el cálculo. Mientras que Francis y Dehant (1987) obtienen los números de Love de carga mediante interpolación de una serie de valores, Guo et al. (2004) los calculan grado a grado. Asimismo, las diferencias existentes pueden deberse a la distinta elección de la velocidad de las ondas sísmicas para el módulo elástico. Para su comparación en las Figuras 2.5 y 2.7 se representan las funciones de Green calculadas por los diversos autores para los diferentes modelos de Tierra, Gutenberg-Bullen, 1066A y PREM, junto con la componente elástica de las funciones de Green de carga complejas determinadas por Pagiatakis (1988). En general, para todos los modelos de Tierra y las funciones de Green, se comprueba cómo para ambas componentes del desplazamiento, así como para las variaciones de gravedad, los puntos de carga situados más próximos al punto de observación tienen una mayor influencia, decreciendo significativamente a partir de una distancia angular de 5 grados y siendo su influencia mucho menor a partir de una distancia de, aproximadamente, 90 grados del punto de observación. Este hecho conlleva que las diferencias más significativas entre las funciones de Green de carga, calculadas a partir de diferentes modelos de Tierra elástica, se presenten para



distancias angulares no superiores a un grado. Como consecuencia, la principal influencia del modelo de Tierra elástica se encuentra en los puntos de carga dentro de un radio aproximado de 100 km del punto de observación (p. ej., Houze y Weijian, 1987). Para estas distancias angulares pequeñas, las funciones de Green correspondientes presentan diferencias en torno al 10% (Bos y Baker, 2005).



**FIGURA 2.6:** Componente elástica de la función de Green de carga para las variaciones de gravedad, normalizada con respecto a la atracción newtoniana, calculada utilizando los modelos de Tierra de Gutenberg-Bullen A (verde) y PREM con una estructura de corteza oceánica (rojo) y continental (azul). Las unidades de gravedad están en  $m/s^2$ .



**FIGURA 2.7:** (Arriba) Componente elástica de la función de Green de carga para las variaciones de gravedad, calculadas por Farrell (1972), para el modelo de Tierra Gutenberg-Bullen A estándar (verde), con estructuras de corteza oceánica (rojo) y continental (azul). (Abajo) Igual que la anterior, para los modelos de Tierra de 1066A (Okubo y Saito, 1983; Endo y Okubo, 1984), PREM (Francis y Mazzega, 1990; Jentzsch (1997), Guo et al. (2004) y la componente real de la función de Green de carga compleja calculada por Pagiatakis (1988) para el modelo de Tierra PREM. En ambas graficas, los valores de gravedad, en  $m/s^2$ , están multiplicados por  $10^{18}(R_T \psi)$  ( $R_T = 6.371$  km es el radio terrestre,  $\psi$  es la distancia angular, en radianes). El eje x muestra la distancia angular en grados.

## 2.5 Cálculo del Efecto de Carga Oceánica de Marea

En esta Sección, se describen diferentes métodos para calcular el EOI.

### 2.5.1 El Formalismo de Convolución de las Funciones de Green con la Distribución de la Masa de la Carga

El procedimiento usual de cálculo del EOI se basa en la convolución de las funciones de Green de carga, calculadas para un modelo de Tierra particular, con una representación numérica global de la marea oceánica, siguiendo los estudios clásicos de Longman (1963) y Farrell (1972). Con este fin, se consideran un punto  $P$  sobre la superficie terrestre, con vector de posición  $\mathbf{r}$ , y la carga ejercida por una masa puntual  $dm$  aplicada sobre la superficie terrestre a una distancia  $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  del punto de observación  $P$  (Fig. 2.3). El efecto de carga, denotado por  $dL$ , ejercido por la masa viene dado, según la definición de función de Green, por

$$dL(\mathbf{r}) = \mathcal{G}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dm \quad [2.60]$$

siendo  $\mathcal{G}$  la función de Green apropiada que determina las componentes del desplazamiento, variaciones de gravedad, etc. que origina la carga ejercida por la masa puntual (1 kg). Si se considera que la masa  $dm$  está distribuida uniformemente en un volumen  $dv$  de densidad  $\rho_w$ , el efecto total,  $L$ , ejercido por la carga se obtiene mediante la integración sobre todos los elementos de masa

$$L(\mathbf{r}) = \int \mathcal{G}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dm \quad [2.61]$$

La integral anterior se denomina **integral de convolución**, puesto que la función de Green se convoluciona con la distribución de la masa de carga. Esta integral puede extenderse sobre toda la superficie oceánica,  $\Omega$ . Para ello, se considera que un elemento de área de superficie  $d\Omega$  viene dado por

$$dm = \rho_w dv = \rho_w \zeta d\Omega \quad [2.62]$$

siendo  $\rho_w$  la densidad del elemento de masa que, en el caso que nos ocupa, es la densidad del agua del mar y  $\zeta$  el grosor del elemento de superficie, es decir, la altura de la marea oceánica. Así, la integral [2.62] se transforma en

$$L(\mathbf{r}) = \rho_w \iint_{\Omega} \zeta(\mathbf{r}') \mathcal{G}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\Omega \quad [2.63]$$

donde  $d\Omega$  es el elemento de área que, en coordenadas esféricas, se expresa como

$$d\Omega = R_T^2 \sin \theta' d\theta' d\lambda' \quad [2.64]$$

de tal forma que la integral de convolución [2.63] puede escribirse, equivalentemente, como

$$L(\theta, \lambda) = \rho_w R_T^2 \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \zeta(\theta', \lambda') \mathcal{G}(\psi) \sin \theta' d\theta' d\lambda' \quad [2.65]$$

donde:

$(\theta, \lambda)$  son las coordenadas del punto de observación, donde se calcula el EOI.

$(\theta', \lambda')$  son las coordenadas de la masa puntual aplicada.

$L(\theta, \lambda)$  es el EOI en el punto de observación  $(\theta, \lambda)$ .

$\rho_w$  es la densidad media del agua del mar.

$\Omega$  es el dominio de integración que, en el caso de la marea oceánica, se considera toda la superficie oceánica del globo terrestre.

$R_T$  es el radio medio de la Tierra.

$\zeta(\theta', \lambda')$  es la altura de la marea oceánica sobre la superficie  $d\Omega$ .

$\psi$  es la distancia angular entre el punto de observación y el punto que origina la carga.

$\mathcal{G}(\psi)$  es la función de Green de carga apropiada, expresada como función de la distancia entre el punto de observación y el punto de carga.

Obsérvese que cuando la función de Green de carga corresponde a un vector o a un tensor, como es el caso de la función de Green para el desplazamiento tangencial, la inclinación o el tensor de deformaciones, en la integral de convolución anterior se introduce una función trigonométrica,  $T(\alpha)$ , dependiente del acimut  $\alpha$ .

Para el **cálculo práctico del EOI**, según la integral de convolución dada por [2.65], se necesita:

- 1) Una descripción de la altura de la marea oceánica  $\zeta$  sobre el dominio de integración, esto es, un **modelo de marea oceánica**. Generalmente, la marea oceánica se expresa como suma de constituyentes armónicos tal que, para cada onda de marea  $k$  la altitud de la marea oceánica  $\zeta_k$  se expresa en forma compleja, mediante la amplitud  $A_k$  y el desfase  $G_k$  de la marea específica. Así, la altura total de la marea será la suma sobre todos los constituyentes y está dada por la ecuación [1.53]. Esta descomposición de la marea oceánica permite calcular el EOI, independientemente para cada una de dichas partes, a través de la integral de convolución [2.65]. La componente real en [2.65] corresponde a la parte que se encuentra en fase con el potencial de marea, mientras que la componente imaginaria es la parte que está en cuadratura (Baker y Bos, 2003). Por convención en marea oceánica, la fase se expresa con respecto al potencial en el meridiano de Greenwich.

Para cada armónico de marea  $k$ , los modelos de marea oceánica se representan sobre una malla o cuadrícula, que cubre generalmente las áreas de agua del dominio, compuesta de  $n \times m$  celdas de resolución  $dx \times dy$ . En cada una de estas celdas, indicadas por  $(i, j)$ , se proporciona la amplitud  $A_k(i, j)$  y la fase  $G_k(i, j)$ , asumida constante en el área limitada por la celda y la masa de agua concentrada en su centro. La relación entre los índices  $i$  y  $j$  de la celda de la malla y las coordenadas geográficas de su centro, longitud  $\lambda_i$  y colatitud  $\theta_j$ , se obtiene a través de

$$\begin{aligned} \lambda_i &= dx/2 + (i-1)dx & \lambda_i &\in [0, 2\pi) & i &= 1, \dots, n \\ \theta_j &= dy/2 + (j-1)dy & \theta_j &\in [0, \pi) & j &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad [2.66]$$

Generalmente, la malla global en la que se presentan los modelos oceánicos proporciona una aproximación insuficiente a las líneas de costa reales. Puesto que, para realizar un cálculo más exacto del EOI se requiere de una buena delimitación de los contornos costeros, principalmente para puntos de observación próximos a la costa, es necesario disponer: (i) O bien de

representaciones precisas de las líneas de costa para ajustar así el modelo global. (ii) O bien de un modelo local con una representación más exacta de la variabilidad de la marea oceánica. En este último caso, [2.65] se reescribe de la forma

$$L(\theta, \lambda) = \rho_w \iint_{\Omega - \Omega_L} \zeta(\theta', \lambda') \mathcal{G}(\psi) d\Omega + \rho_w \iint_{\Omega_L} \zeta_L(\theta', \lambda') \mathcal{G}(\psi) d\Omega \quad [2.67]$$

siendo  $\zeta_L$  la altura de la marea oceánica en el área local  $\Omega_L$ .

- 2) Unas funciones de Green de carga calculadas para un modelo de Tierra y un conjunto de observables, es decir, desplazamientos, variaciones de gravedad, etc. Como se trató anteriormente, en el cálculo de los números de Love de carga es importante tener en cuenta la estructura de la corteza terrestre en el entorno del punto observación.
- 3) Un software específico para realizar con precisión el cálculo de la convolución de las funciones de Green de carga con la distribución de la marea oceánica, según [2.65] ó [2.67].

En el cálculo práctico del EOI, la evaluación numérica de la integral de convolución dada por [2.65] ó [2.67] se reduce a la suma de los efectos calculados puntualmente en cada celda de la cuadrícula de integración. Para cada constituyente de marea, los parámetros del EOI comprenden una amplitud (que representa el valor máximo del efecto de la componente en cuestión, esto es desplazamiento, variación de gravedad, etc.) y un desfase, dado con respecto a una fase de referencia, para cada constituyente de marea. El resultado final consistirá en la suma sobre todos los constituyentes de marea. A continuación se presenta, para los desplazamientos y las variaciones de gravedad, el cálculo numérico de la respuesta de la Tierra a la carga ejercida por la marea oceánica.

### Desplazamiento Radial

Para cada constituyente de marea  $k$ , sustituyendo la integral de convolución [2.65] por la suma sobre todas celdas de la malla y la función de Green de carga dada por [2.31]

$$L_{u_r}^k(\theta, \lambda) = \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( (R_T / M_T) \sum_{n=0}^{\infty} h_n' P_n(\cos \psi_{i_0 j_0 ij}) \right) \sin \theta' dx dy \quad [2.68]$$

donde se ha denotado por  $\zeta_{ij}$  el valor de la marea oceánica en la celda  $(i, j)$ -ésima de la malla, según [1.53].  $(dx, dy)$  el tamaño en longitud y colatitud, respectivamente, de la celda y  $\psi_{i_0 j_0 ij}$  la distancia angular entre el punto de observación, denotado por el subíndice  $(i_0, j_0)$ , y la celda de índices  $(i, j)$  de la malla. Finalmente, el efecto total se calcula sumando

$$L_{u_r}(\theta, \lambda) = \sum_k L_{u_r}^k(\theta, \lambda) \quad [2.69]$$

### Desplazamiento Tangencial

De forma análoga, el desplazamiento tangencial causado por el EOI para un constituyente de marea  $k$  está dado por

$$L_{u_\psi}^k(\theta, \lambda) = \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( (R_T / M_T) \sum_{n=1}^{\infty} l_n' \left( \partial P_n(\cos \psi_{i_0 j_0 ij}) / \partial \psi_{i_0 j_0 ij} \right) \right) \sin \theta' dx dy \quad [2.70]$$

En este caso la función de Green de carga considerada corresponde a ecuación [2.36]. Para expresar el desplazamiento tangencial, en sus direcciones longitudinal y transversal, la ecuación [2.70] se reemplaza por

$$\begin{aligned} \text{Dirección NS: } L_{u_N}^k(\theta, \lambda) &= -\rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k u_\psi(\psi_{i_0 j_0 ij}) \cos \alpha \sin \theta' dx dy \\ \text{Dirección EO: } L_{u_E}^k(\theta, \lambda) &= -\rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k u_\psi(\psi_{i_0 j_0 ij}) \sin \alpha \sin \theta' dx dy \end{aligned} \quad [2.71]$$

siendo  $\alpha$  el acimut del centro de la celda  $(i, j)$  medido desde el punto de observación. Las componentes longitudinal y transversal toman valores positivos/negativos cuando la corteza terrestre se mueve en dirección al noreste/suroeste, respectivamente.

### Variaciones de Gravedad

En el caso de las variaciones de gravedad causadas por el EOI el cálculo se realiza mediante

$$L_{g_s}^k(\theta, \lambda) = \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k g_s(\psi_{i_0 j_0 ij}) \sin \theta' dx dy \quad [2.72]$$

En este caso la función de Green  $g_s$  se sustituye por la suma de las contribuciones newtoniana,  $g_s^N$  dada por [2.46], y elástica,  $g_s^E$  dada por [2.55]. Así, resulta

$$\begin{aligned} L_{g_s}^k(\theta, \lambda) &= \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( -g_0 / 4M_T \sin(\psi_{i_0 j_0 ij} / 2) \right) \sin \theta' dx dy + \\ &+ \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( (g_0 / M_T) \sum_{n=0}^{\infty} [2h_n' - (n+1)k_n'] P_n(\cos \psi_{i_0 j_0 ij}) \right) \sin \theta' dx dy \end{aligned} \quad [2.73]$$

Si, además, se tiene en cuenta la altitud sobre el nivel del mar del punto de observación, la componente newtoniana en la ecuación anterior debe reemplazarse por [2.48], resultando

$$\begin{aligned} L_{g_s}^k(\theta, \lambda) &= \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( -\frac{g_0}{M_T} \frac{2 \sin^2(\psi_{i_0 j_0 ij} / 2) + (h/R_T)}{[4 \sin^2(\psi_{i_0 j_0 ij} / 2)(1 + h/R_T) + (h/R_T)^2]^{3/2}} \right) \sin \theta' dx dy + \\ &+ \rho_w R_T^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta_{ij}^k \left( \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} [2h_n' - (n+1)k_n'] P_n(\cos \psi_{i_0 j_0 ij}) \right) \sin \theta' dx dy \end{aligned} \quad [2.74]$$

#### 2.5.1.1 Estudio de Errores en el Cálculo Numérico del Efecto Oceánico Indirecto

La modelización del EOI conlleva la introducción de simplificaciones que pueden inducir errores. Asimismo, el estudio de la contribución de los diferentes errores que afectan a su cálculo es de interés para estimar la exactitud numérica de los resultados obtenidos. Los errores en el cálculo del EOI pueden agruparse en dos clases principales. Por una parte, los errores inherentes a los parámetros introducidos en el propio proceso de cálculo y, por otra parte, los errores introducidos por simplificaciones en los métodos numéricos utilizados.

#### Errores Debidos a los Parámetros Introducidos

Entre los errores causados en el efecto de carga inherentes a los parámetros/modelos considerados en el proceso de cálculo destacan dos: Por una parte, los errores causados por imprecisiones en el modelo de marea oceánica y, por otra parte, aquellos introducidos a través de las funciones de Green de carga provenientes, principalmente, por el modelo de estructura terrestre.

Asimismo, deben considerarse los errores provocados por los valores asignados a los parámetros involucrados, como el valor de la densidad del agua del mar.

#### **a) Los modelos de marea oceánica**

En general, dependiendo de la metodología empleada para su construcción, los modelos de marea oceánica contienen errores o imprecisiones debido a diferentes causas. Puesto que este tema será ampliamente tratado a lo largo de los Capítulos siguientes se mencionan aquí, como ejemplo, algunas de las principales fuentes de error en dichos modelos. La construcción de los modelos puramente hidrodinámicos (Cap. 3, Secc. 3.3) implica el uso de ciertas simplificaciones físicas en la modelización de un proceso real que, como consecuencia, conlleva imprecisiones. A su vez, la resolución del sistema físico pasa por la modelización numérica del mismo que, a su vez, implica errores de truncamiento o de redondeo. En el caso de modelos oceánicos empíricos, los errores provienen, principalmente, de los datos de observación considerados y de su resolución espacial y temporal. Usualmente, la estimación de este tipo de errores se lleva a cabo a partir de la comparación de los resultados obtenidos mediante el uso de diversos modelos marea. Este aspecto también será tratado en profundidad en los Capítulos siguientes.

En relación con los modelos de marea oceánica, también hay que tener presente que todo modelo oceánico debe garantizar la **conservación de masas**. Esto se debe a que en las frecuencias de marea no desaparece ni se añade agua a los océanos, si no que la masa total del agua del océano durante un ciclo de marea permanece constante. Si el cálculo del EOI se lleva a cabo a partir de modelos que, por su construcción, no garantizan la conservación de masas, p. ej. el modelo de Schwiderski (1980) (Cap. 3, Secc. 3.3.3), entonces debe aplicarse algún procedimiento para preservar el principio de la conservación de masas. La no conservación de las masas de agua puede introducir errores en el EOI que, por ejemplo, en lo que respecta a las variaciones de gravedad para la onda  $M_2$  puede alcanzar  $0,04 \mu\text{Gal}$  (Bos y Baker, 2005). Clásicamente se han utilizado dos métodos que conducen a resultados iguales<sup>2</sup>: El primer método, denominado *método de corrección proporcional* (Agnew, 1983), consiste en una corrección uniforme basada en la sustracción de una capa de agua de grosor constante, así como un cierto desfase también constante, a la marea oceánica. El segundo método, denotado por *método de redistribución de masas* (Melchior et al., 1980), se basa en la sustracción en cada celda de la cuadrícula oceánica de una cantidad de masa de agua proporcional a la amplitud de la marea en dicha celda.

#### **b) El modelo de Tierra y las funciones de Green de carga**

Las funciones de Green de carga, comúnmente distribuidas como una serie de valores discretos en función de la distancia angular entre el punto de observación y el punto de aplicación de la carga, no incluyen, por lo general, estimaciones de los errores asociados a las mismas, por lo que se consideran a priori exactas. Este hecho no es cierto, ya que las funciones de Green de carga

---

<sup>2</sup> Según Melchior et al. (1984) ambos métodos concuerdan en el caso de las variaciones de la gravedad causadas por el EOI al nivel de  $0,1 \mu\text{Gal}$ .

contienen errores que proceden tanto de la metodología de cálculo como de los parámetros considerados. Así, por ejemplo:

- Entre los primeros se encuentran los errores ocasionados por el uso de números de Love de carga obtenidos mediante alguna técnica de interpolación, a partir de valores próximos previamente calculados. También se introducen errores por las aproximaciones llevadas a cabo para las sumas de las series (p. ej. [2.32] y [2.38]), como la transformación de Kummer (Secc. 2.4.2).
- En cuanto a los parámetros considerados, éstos hacen referencia tanto a las constantes numéricas que intervienen en su cálculo (el valor del radio medio terrestre, la constante de gravitación universal y la gravedad media sobre la superficie terrestre) como el modelo de estructura terrestre considerado. Puesto que dicho modelo, atendiendo a su forma (esférica o elíptica), geometría (p. ej., simetría, estratificación radial o lateral) y a sus propiedades (tales como la elasticidad) es sólo una aproximación a la Tierra real, el efecto de carga calculado será sólo una aproximación al efecto real. En las Secciones precedentes se ha analizado con detalle cómo afecta la elección del modelo de Tierra en el cálculo de los números de Love de carga y las correspondientes funciones de Green. Como consecuencia, el uso de diferentes funciones de Green para el cálculo del EOI afectará los resultados obtenidos. Por ejemplo, Francis y Mazzega (1990) estiman que las diferencias en el EOI calculado a partir de diferentes funciones de Green no exceden del 2%. En la Sección 2.5.1.2 se realiza una cuantificación exhaustiva de estas diferencias.

#### **c) El valor de la densidad del agua del mar**

En el cálculo práctico del EOI se considera un valor para la densidad del agua del mar constante. Teniendo en cuenta el hecho de que las aguas costeras y/o poco profundas son, por lo general, menos salinas que en el océano abierto debería emplearse en ellas un valor de densidad más bajo. El error en la densidad del agua introduce un factor de escala en el valor de la amplitud del EOI (Bos, 2004). Por ejemplo, en las variaciones de la gravedad, la discrepancia en el EOI calculado utilizando diferentes valores de la densidad en el rango de 1.025 a 1.035 kg/m<sup>3</sup> se encuentran en torno al 1% (Bos y Baker, 2005).

#### **d) Otros parámetros y constantes**

Otros parámetros y constantes involucrados en el cálculo del EOI son el radio medio de la Tierra y su masa, así como el valor de la gravedad. Generalmente, los diferentes valores constantes utilizados sólo muestran pequeñas variaciones en el EOI. Por ejemplo, la diferencia utilizando diferentes valores para la constante de gravitación es del orden del 0,04% (Bos y Baker, 2005).

#### **Errores debidos a Métodos Numéricos**

Los errores debidos a métodos numéricos comprenden tanto lo que respecta a las funciones de Green de carga, al modelo de marea oceánica como al propio proceso de cálculo del EOI.

### **a) La técnica de interpolación de las funciones de Green de carga**

Como se ha tratado anteriormente, las funciones de Green de carga se tabulan, generalmente, para una serie de valores discretos no equidistantes de la distancia angular entre el punto de observación y el punto de aplicación de la carga. Entonces, el valor de la función de Green, para cualquier distancia angular considerada, se determina a partir de dichos valores mediante alguna técnica de interpolación. La elección de una técnica de interpolación apropiada es un aspecto que debe ser estudiado. Comúnmente, se utilizan técnicas de interpolación cuadrática o cúbica, aunque también pueden utilizarse esquemas de interpolación de órdenes mayores. Debe señalarse que las funciones de Green de carga no equidistantes, generalmente normalizadas según las expresiones [2.34], presentan más valores para las distancias angulares pequeñas donde la función varía con mayor rapidez. Esto es, se aplica una escala casi logarítmica a la distancia angular, de tal forma que los valores dados resulten más equidistantes (Fig. 2.4). Así, Bos y Baker (2005) estiman las diferencias en el EOI calculado para las variaciones de la gravedad, aplicando interpolación cuadrática, spline cúbica y de órdenes superiores del orden del 0,4%.

### **b) El efecto de la altitud en la componente Newtoniana de las funciones de Green de carga**

Según Agnew (1996), si se comparan los resultados obtenidos a partir de las expresiones [2.46] y [2.48] considerando altitudes en un rango de -6 a 4 km y a distancias angulares inferiores a  $3^\circ$ , el máximo error cometido en el caso de la variación de gravedad por el EOI es inferior al 1%. Este punto debe ser estudiado de forma local, en cada localización de interés. En el Capítulo 6 se estudiará este aspecto en las zonas que serán objeto de estudio (en particular, en el Archipiélago Canario).

### **c) Tratamiento del modelo de marea oceánica y de la cuadrícula de integración**

Conviene mencionar la distinción entre la cuadrícula del modelo oceánico y la cuadrícula de integración para el cálculo del efecto oceánico de marea. La cuadrícula del modelo oceánico hace referencia, como se describió en la Sección 2.5.1, a la representación de la marea oceánica sobre una malla compuesta por un número determinado de celdas, en las que se especifica el valor correspondiente de la marea, a través de la amplitud y la fase, para cada constituyente armónico. Por otra parte, la cuadrícula de integración en el cálculo del EOI hace referencia a la división en celdas del dominio de integración para la convolución entre el modelo oceánico y las funciones de Green de carga. Por ejemplo, en el caso del desplazamiento radial causado por el EOI, la cuadrícula de integración es aquella sobre la que se realiza la suma en [2.68]. Ambas cuadrículas no tienen por qué ser coincidentes y, en ese caso, se interpola en la celda de la cuadrícula de integración el valor de la marea obtenida a partir del modelo oceánico considerado. Como consecuencia, debe estudiarse lo siguiente:

- **El procedimiento de interpolación o extrapolación de los valores de marea oceánica en las celdas de la cuadrícula de integración.**

El valor de la marea oceánica en las celdas de la cuadrícula de integración debe obtenerse mediante algún procedimiento de interpolación, a partir de los valores dados por el modelo de



marea oceánica considerado. Generalmente, se considera una interpolación bilineal con los valores de marea más próximos, aunque también es habitual considerar valores promediados de un número determinado de celdas circundantes. Asimismo, es posible emplear un método combinado, utilizando para regiones distantes el valor de marea oceánica de la celda más próxima e interpolación bilineal en un entorno del punto estación. La utilización del valor de marea oceánica de la celda más próxima en regiones distantes introduce un error, cuya magnitud depende de la resolución del modelo oceánico empleado. Por ejemplo, Bos y Baker (2005) encuentran, en el caso de las variaciones de la gravedad, un error del 7% para modelos oceánicos de resolución  $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$ , que se reduce a la mitad para modelos de resolución  $0,25^{\circ} \times 0,25^{\circ}$ . También es posible utilizar técnicas de interpolación más sofisticadas, como son la técnica de colocación o kriging (Moritz, 1980, Cressie, 1993). Cuando se trata con modelos oceánicos, generalmente, se recomienda el método de interpolación bilineal más simple (Andersen, 1995b).

- **El refinamiento de la cuadrícula oceánica** para obtener una representación más exacta de la marea oceánica, principalmente en áreas de aguas poco profundas y/o costeras, donde se produce una mayor variabilidad espacial de las mareas.

En la actualidad, el espaciado de las cuadrículas oceánicas de los modelos de marea globales más recientes es de  $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$  y  $0,25^{\circ} \times 0,25^{\circ}$  (excepcionalmente, de  $0,125^{\circ} \times 0,125^{\circ}$ ). Esta resolución todavía no es suficiente para representar con exactitud las mareas, principalmente en regiones costeras y/o de aguas poco profundas. Diversos autores, como Scherneck (2000) y Jentzsch et al. (2000), señalan que para puntos de observación situados a distancias superiores a 150-200 km de la costa, la resolución de los modelos globales con respecto a la geometría costera es suficiente, aunque sí se necesita un refinamiento a distancias inferiores. En el Capítulo 6 se podrá de manifiesto cómo el ajuste del modelo oceánico considerado a las líneas de costa, aun a grandes distancias de ella, debe ser cuidadosamente inspeccionado.

Un esquema apropiado de refinamiento de la cuadrícula oceánica permite reemplazar las celdas oceánicas del modelo de marea en regiones de aguas poco profundas y en las proximidades de las costas por una distribución más detallada de las mismas y, de esta manera, realizar un cálculo más exacto del EOI. En cualquier proceso de refinamiento, la resolución de la cuadrícula debe mantener la variación espacial gradual de las mareas. Esto implica que en aquellas áreas donde la variabilidad espacial de las mareas se produce de forma rápida, la cuadrícula debe ser más refinada y hacerse de forma gradual en función de dicha variación. Asimismo, cuando el cálculo de la carga oceánica se basa en el método de convolución con las funciones de Green, en cualquier proceso de refinamiento el tamaño de una celda de la cuadrícula oceánica debe satisfacer siempre que la distancia desde el centro de la celda oceánica al punto de cálculo sea mayor que 10 veces el radio de dicha celda (Baker, 1985). Esta condición se establece para garantizar que la respuesta terrestre a la carga producida por la

celda oceánica sea equivalente a la originada por una masa puntual unitaria que actúa en el centro de dicha celda. Esta equivalencia, al nivel del 1%, fue demostrada experimentalmente por Farrell (1973), basándose en el cálculo de la respuesta terrestre a discos de radios diversos y distancias diferentes (Baker, 1985). Francis y Mazzega (1990) estimaron que el error asociado en el procedimiento numérico de subdivisión local de la cuadrícula oceánica es inferior al 0,5%.

- **La delimitación precisa de los contornos costeros y la distribución tierra/océano de las celdas de la cuadrícula de integración**

Para estaciones próximas a la costa, generalmente distancias inferiores a 200 km (Jentzsch et al., 2000), la modelización precisa del EOI requiere tener en cuenta la geometría costera local. En este sentido, es de gran importancia la situación sobre tierra o agua de las celdas de la cuadrícula de integración. La línea de costa es irregular y la cuadrícula oceánica nunca se adapta a ella perfectamente. Como consecuencia, algunas zonas de agua no están representadas por el modelo oceánico, siendo necesario extrapolar los valores de marea. En general, los errores en la delimitación de la línea de costa originan una cantidad de masas de agua incorrecta (por exceso o por defecto) y producen un error en los cálculos del EOI que decrece significativamente cuando aumenta la distancia del punto de observación a la costa. Por lo general, y para puntos de observación cercanos a la costa, no es posible estimar el error causado por la determinación imprecisa de ésta, puesto que depende de su forma local, de la altura de la estación y de la cuadrícula de integración empleada en los cálculos. Habitualmente, para minimizar los errores en los cálculos debidos a estas imprecisiones, se utilizan conjuntos de datos globales de líneas de costa de alta resolución, con valores de entre 50 y 100 m (que corresponde, aproximadamente, a  $0,001^\circ$ ). Generalmente, estas representaciones de líneas de costa se presentan en forma de mapas digitales, compuestos por una serie de polígonos que representan las áreas de tierra.

**e) Técnicas de integración en el proceso de convolución**

El esquema de integración más simple es la regla del punto medio (Apostol, 1980), que consiste en multiplicar primero cada celda de la cuadrícula de integración con la densidad del agua del mar y con la función de Green de carga y el valor de la marea oceánica calculados en el centro de la celda. Posteriormente, se suman los resultados obtenidos para todas las celdas de la cuadrícula de integración, obteniéndose el valor del EOI total. Según Ray y Sánchez (1989) esta aproximación conlleva un error típico inferior al 5% si la distancia angular es mayor o igual a 1 grado, e inferior al 1% cuando es mayor o igual a 5 grados.

**2.5.1.2 Comparación de Resultados para Modelos de Tierra SNREI**

Las diferencias en la estructura elástica de la corteza y el manto terrestres conllevan resultados discrepantes en el EOI calculado, principalmente en zonas próximas a la costa. Estas discrepancias

son, generalmente, del orden del 1 al 2% en amplitud e inferiores a un grado en fase (Francis y Mazzega, 1990; Farrell, 1972). Más concretamente, para el constituyente marea  $M_2$  y dentro de un radio de 10 grados del punto de cálculo, las discrepancias en EOI calculado utilizando las funciones de Green obtenidas para los modelos de Tierra Gutenberg-Bullen (Farrell, 1972) y 1066A (Okubo y Saito, 1983; Endo y Okubo, 1984) son inferiores a  $0,03 \mu\text{Gal}$  en gravedad (Houze y Weijian, 1987). Estas diferencias se reducen a  $0,013 \mu\text{Gal}$  cuando la comparación se lleva a cabo utilizando las funciones de Green obtenidas a partir del modelo Gutenberg-Bullen y aquellas obtenidas por Francis y Mazzega (1990) para el modelo PREM. El error introducido al considerar la hipótesis de Tierra esférica, en lugar de elipsoidal, y asumiendo un valor de gravedad constante (que no varía con la latitud), es del mismo orden que el aplanamiento del elipsoide, esto es, del 0,3% (Bos y Baker, 2005).

### 2.5.1.3 Comparación de Resultados para Modelos de Tierra Realistas

En las últimas décadas, los modelos de Tierra elástica SNREI están siendo reemplazados en numerosas investigaciones geofísicas, en particular en aquellas relacionadas con el estudio de la respuesta de la Tierra bajo la acción de fuerzas externas, por modelos que incorporan la anelasticidad del medio o, más aun, por modelos visco-elásticos SNRVI (*Spherically symmetric, Non-Rotating, Viscoelastic, Isotropic*).

La **anelasticidad de la Tierra** puede introducirse a través de unos números de Love de carga complejos, calculados introduciendo una parte imaginaria a las constantes elásticas proporcionales a la inversa del factor de calidad  $Q$  (Cap. 1). Así, por ejemplo, Okubo y Tsuji (2001) y Matsumoto (comunicación personal) calculan las funciones de Green complejas para variaciones de gravedad utilizando los modelos terrestres elásticos 1066A y Gutenberg-Bullen e incorporando el efecto de la anelasticidad terrestre en las frecuencias de marea diurnas, semi-diurnas y de largo periodo. Los autores calculan este efecto anelástico a partir de los factores de calidad intrínsecos para el módulo de compresibilidad y de rigidez (Secc. 1.2.3.3), proporcionados por el modelo  $Q$  de absorción de banda (Anderson y Given, 1982), dependientes de la profundidad y de la frecuencia. Okubo y Tsuji (2001) concluyen, de sus resultados, que la anelasticidad introduce un desfase inferior a  $2^\circ$  en las funciones de Green de carga, siendo la perturbación en la parte real de dichas funciones no superior al 2%.

Los **modelos de Tierra visco-elástica** son de gran interés en el estudio de las variaciones de las capa de hielo (Le Meur y Huybrechts, 1996, 1998, 2001; Wendt et al., 2005), rebote post-glacial y variaciones globales en el nivel del mar (Lambert et al., 2006; Milne y Mitrovika, 1998; Lambeck et al., 1990), para escalas de tiempo muy superiores a aquellas asociadas con las frecuencias diurnas y semi-diurnas. El formalismo de cálculo de la respuesta visco-elástica terrestre a cargas que actúan sobre su superficie, ya sean de agua o hielo, puede presentarse como una extensión a la teoría elástica desarrollada por Longman (1962; 1963) y Farrell (1972). En este caso se emplean números de Love

apropiados para el cálculo de las correspondientes funciones de Green de carga, de forma análoga al caso de la marea terrestre (Cap. 1). Generalmente, este problema se ha resuelto siguiendo dos aproximaciones diferentes. La primera, más comúnmente utilizada, es la aproximación modo normal, desarrollada inicialmente por Peltier (1974). La segunda, es la aproximación en el dominio del tiempo (p. ej., Guoying y Houtze, 1986).

A continuación, se resumen algunos de los resultados más relevantes, en relación con el estudio de la respuesta terrestre al EOI, bajo la consideración de modelos de Tierra sofisticados:

- Zschau (1977; 1978; 1986) estudió la respuesta de un **modelo de Tierra visco-elástica** al EOI. Con este fin, consideró la Tierra como un cuerpo Maxwell y se basó en el *principio de correspondencia*<sup>3</sup> (Biot, 1954) para reescribir la relación de esfuerzo-deformación. De sus resultados, el autor concluye que la no elasticidad introduce, con respecto a una Tierra elástica, un desfase de varios grados. Posteriormente, Francis y Mazzega (1990) calculan unas funciones de Green visco-elásticas (complejas y dependientes de la frecuencia), para el constituyente  $M_2$ , a partir de los números de Love calculados por Zschau. Estos autores encuentran diferencias en las fases de dichas funciones, con respecto a la respuesta de una Tierra elástica, para distancias angulares entre 10 y 100 km. Además, los autores calculan las variaciones de gravedad por el EOI y encuentran que, para este constituyente, la diferencia con respecto a la respuesta elástica es de 1,5% en amplitud y 0,3° en fase.
- Guoying y Houtze (1986), siguiendo el mismo proceso que Zschau, calculan unos números de Love de carga complejos, para  $M_2$ , considerando un cuerpo de Kelvin, con parámetros de elasticidad tomados del modelo 1066A. La parte imaginaria de los números de Love de carga obtenidos por estos autores es del orden de una millonésima parte de la real.
- Pagiatakis (1988; 1990) calculó las funciones de Green de carga para una Tierra visco-elástica, adoptando un modelo de tipo sólido lineal estándar, compresible, en rotación, sometido a auto-gravitación e incorporando además el efecto de la no isotropía. Utilizó los parámetros de elasticidad terrestre del modelo PREM e introdujo la dependencia de la frecuencia a partir del modelo  $Q$  denotado por SL8 (Secc. 1.2.3.3, Cap. 1). Las diferencias entre las partes real de estos números de Love con los calculados por Farrell (1972) son del 1 al 3% para términos de grado armónico  $n < 800$  y significativamente superiores para  $n > 1.000$ . El autor atribuye estas diferencias a la elección del modelo elástico terrestre (Secc. 2.3.2.3) y al proceso de disipación de energía del modelo no elástico. Sobre la Tierra, la disipación de la energía de marea, introducida a través de la consideración del factor de calidad  $Q$ , conlleva un incremento en el valor absoluto de los números de Love dependiente de la frecuencia y del grado armónico (incremento que no excede el 0,2% para la onda  $M_2$ , aunque muy superior para periodos más largos). Con respecto a las funciones de Green de carga complejas, su parte real únicamente se diferencia de las obtenidas por Farrell para distancias angulares comprendidas entre 0,3° y 1,5°.

---

<sup>3</sup> Véase Secc. 1.2.3.3 (Cap. 1).

Por otra parte, Pagiatakis (1988) establece que la **anisotropía** en el manto superior tiene un efecto sobre los números de Love de carga complejos  $h'_n$ ,  $k'_n$  y  $l'_n$ , del orden de 1,9%, 2,3% y 2,5%. Asimismo, el autor determina que la **rotación de la Tierra** afecta a los números de Love de carga complejos  $h'_n$ ,  $k'_n$  y  $l'_n$ , del orden de 1,8%, 3,1% y 3,3% y que, además, introduce para  $n \leq 4$  una leve dependencia de la latitud (con valor máximo del 0,4% para latitudes comprendidas en 0° y 45°N).

- Okubo y Tsuji (2001) encuentran, para distancias angulares menores de 30°, que la **anelasticidad** perturba el EOI, aproximadamente, un 2% en amplitud y 2° en fase.

### 2.5.2 La Técnica de las Funciones de Green Integradas y el Método de Plantilla

En 1980, Goad modificó el método de Farrell, con el fin de simplificar los cálculos y mejorar la convergencia de las series infinitas, mediante el uso de las conocidas como **funciones de Green integradas** (Goad, 1980; Zhou y Sun, 1995) y el **método de plantilla** (del inglés ‘Template Method’) (Heiskanen y Moritz, 1967; Baker, 1985). El método de plantilla consiste en la reestructuración de la cuadrícula de integración empleada en el cálculo del EOI a partir de la construcción de una serie de anillos concéntricos, centrados en el punto de observación y con líneas de radiación partiendo de este (Fig. 2.8). Sobre esta cuadrícula se considera la porción  $ij$ -ésima, definida por las distancias angular  $\psi$  y acimutal  $\alpha$ , tales que  $\psi_i < \psi < \psi_{i+1}$  y  $\alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}$ , y donde la altura de la marea oceánica se considera constante, con valor  $\zeta_j$ . Así, la contribución al EOI de esta porción oceánica,  $L_{ij}$ , vendrá expresada, reescribiendo la integral de convolución [2.65] (considerando la función trigonométrica  $T$ ) en función de  $\psi$  y  $\alpha$ , como

$$L_{ij}(\psi, \alpha) = \rho_w R_T^2 \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \zeta_{ij}(\psi, \alpha) \mathcal{G}(\psi) \sin \psi \left\{ \int_{\alpha_{i,j}}^{\alpha_{i,j+1}} T(\alpha) d\alpha \right\} d\psi \quad [2.75]$$

Reagrupando términos en la expresión anterior y denotando por

$$G_i(\psi) = R_T^2 \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \mathcal{G}(\psi) \sin \psi d\psi \quad [2.76]$$

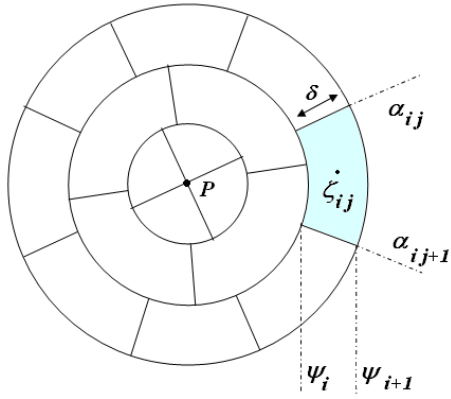
la denominada **función de Green integrada** y por

$$T_{ij}(\alpha) = \int_{\alpha_{i,j}}^{\alpha_{i,j+1}} T(\alpha) d\alpha \quad [2.77]$$

se tiene que el EOI causado por todas las masas de agua oceánica se obtiene mediante la suma

$$L(\psi, \alpha) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} L_{ij}(\psi, \alpha) = \rho_w \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \zeta_{ij} T_{ij} G_i \quad [2.78]$$

siendo  $N$  el número de subdivisiones en anillos concéntricos y, para cada  $i$ ,  $M_i$  el número de subdivisiones radiales en el anillo  $\psi_i$ . En esta expresión se observa que, según este método, el número de evaluaciones de las funciones de Green se reduce, puesto que la distancia al punto es constante para cada anillo concéntrico. Por el contrario, el gran inconveniente que se presenta es que para cada punto de cálculo se requiere una cuadrícula propia.



**FIGURA 2.8:** Cuadrícula oceánica (tipo polar) según el Método de Plantilla (modificada de Heiskanen y Moritz, 1967). La subdivisión se realiza mediante círculos concéntricos centrados en el punto de observación P y líneas acimutales radiando desde el mismo.

Considerando intervalos equiespaciados y denotando por  $\delta = \psi_{i+1} - \psi_i$  para todo  $i$  y  $\psi_{ci} = \psi_i + \delta/2$ , el cálculo de  $G_i$  se lleva a cabo mediante una nueva normalización de las funciones de Green de carga usuales, proporcionadas para una serie de distancias angulares. Esta normalización será función de la componente considerada. Para las dos componentes del desplazamiento y la componente elástica de la variación de gravedad, normalizando  $\mathcal{G}_T(\psi)$  dada por [2.34] (Agnew, 1996)

$$\tilde{\mathcal{G}}_T(\psi) = R_T^2 \mathcal{G}_T(\psi) 2\sin(\psi/2) (1/K(R_T\psi)) \quad [2.79]$$

Sustituyendo [2.34] y [2.79] en la función de Green integrada definida por [2.76], y teniendo en cuenta que en el elemento de la cuadrícula considerada el valor de la función de Green es constante,

$\tilde{\mathcal{G}}_T(\psi) = \mathcal{G}_T(\psi_{ci}) = \text{cte}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} G_i(\psi) &= \int_{\psi_{ci}-\delta/2}^{\psi_{ci}+\delta/2} \tilde{\mathcal{G}}_T(\psi) (\sin \psi/2 \sin \psi/2) d\psi = \mathcal{G}_T(\psi_{ci}) \int_{\psi_{ci}-\delta/2}^{\psi_{ci}+\delta/2} \cos(\psi/2) d\psi = \\ &= \mathcal{G}_T(\psi_{ci}) [2\sin \psi/2]_{\psi_{ci}-\delta/2}^{\psi_{ci}+\delta/2} = 4\mathcal{G}_T(\psi_{ci}) \cos(\psi_{ci}/2) \sin(\delta/4) \end{aligned} \quad [2.80]$$

En el caso de la variación de gravedad, hay que tener en cuenta la componente Newtoniana de la función de Green (ec. [2.48]). Para ello, en el caso de distancias angulares suficientemente grandes,  $\psi \gg h/R_T$ , generalmente superiores a 0,05 radianes, se tiene que (Agnew, 1996)

$$\begin{aligned} G_i^N(\psi, h) &= -\frac{g_0}{M_T} R_T^2 \int_{\psi_{ci}-\delta/2}^{\psi_{ci}+\delta/2} \frac{4\sin^3(\psi/2) \cos(\psi/2) + 2h/R_T \sin(\psi/2) \cos(\psi/2)}{\left[4\sin^2(\psi/2)(1+h/R_T) + (h/R_T)^2\right]^{3/2}} d\psi = \\ &= -G \frac{1}{1+(3h/2R_T)} \left[ 2\cos(\psi/2) \sin(\delta/4) + \frac{\cos(\psi/2) \sin(\delta/4)}{\cos^2(\delta/4) - \cos^2(\psi/4)} \right] \end{aligned}$$

donde se ha despreciado  $(h/R_T)^2$  además de los términos de grado dos y superiores en el desarrollo en serie de Taylor de la función  $(h/R_T)^{3/2}$ . Finalmente, resulta

$$G_i^N(\psi, h) = -2G \frac{\cos(\psi/2) \sin(\delta/4)}{1+(3h/2R_T)} \left[ 1 + \frac{h}{2R_T} \frac{1}{\cos(\delta/2) - \cos \psi} \right] \quad [2.81]$$

Para distancia angulares pequeñas la aproximación anterior no es válida y, en este caso, se tiene

$$\begin{aligned}
G_i(\psi) &= -(g_0/M_T) R_T^2 \int_{\psi_{C_i}-\delta/2}^{\psi_{C_i}+\delta/2} \frac{\psi^2/2 + h/R_T}{\left[ \psi^2 (1 + h/R_T) + (h/R_T)^2 \right]^{3/2}} \psi d\psi = \\
&= -G \left( \left( \psi^2 (1 + h/R_T) - 2h/R_T \right) / \left( 2(1 + h/R_T) \left( (1 + h/R_T) \psi^2 + (h/R_T)^2 \right)^{1/2} \right) \right) \Big|_{\psi_{C_i}-\delta/2}^{\psi_{C_i}+\delta/2}
\end{aligned} \quad [2.82]$$

Baker (1985) y Bos y Baker (2005) estiman que la máxima diferencia en el EOI calculado a partir de la técnica de las funciones de Green integradas y el obtenido con el método clásico de Farrell (1972) es del 0,2%.

### 2.5.3 El Formalismo del Desarrollo en Armónicos Esféricos

Ray y Sánchez (1989) elaboraron un procedimiento para el cálculo del EOI alternativo al método presentado por Farrell (1972). Se basa en el desarrollo inicial de la distribución de la de marea oceánica en series de armónicos esféricos. Posteriormente, se calcula el EOI mediante la convolución esta distribución de la marea oceánica con las funciones de Green de carga. De esta forma, la convolución se reduce a una suma armónica de los productos de los coeficientes de la distribución de la marea oceánica con los números de Love de carga (Cartwright, 1993; Mitrovica et al., 1994). Entre otros autores, Elósegui et al. (2003) utilizan este formalismo para calcular los desplazamientos causados por el EOI en la región de los Grandes Lagos de Sal (Utah, EEUU). Existen otras aplicaciones en las que es conveniente la utilización del formalismo del desarrollo en armónicos esféricos para el cálculo del EOI. Este es el caso, por ejemplo, de las interacción entre la aplicación de una carga dinámica y el marco de referencia terrestre (p. ej., Blewitt, 2003; Lambeck, 1988; Mitrovica et al., 1994; Grafarend et al., 1997)

En un punto de coordenadas  $(\theta', \lambda')$  la marea oceánica  $\zeta$  puede expresarse en términos de armónicos esféricos de la forma

$$\xi(\theta', \lambda') = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{n_1} \zeta_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda') \quad [2.83]$$

donde  $Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda')$  son armónicos esféricos complejos normalizados tales que verifican la relación de ortogonalidad<sup>4</sup>. Los correspondientes coeficientes armónicos complejos  $\zeta_n^m$  del desarrollo vienen dados por (Heiskanen y Moritz, 1967)

$$\zeta_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y}_n^m(\theta, \lambda) \zeta(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \quad [2.84]$$

### Variación del Potencial Gravitatorio

Dado un punto de coordenadas  $(\theta, \lambda)$  sobre la superficie terrestre, para calcular la variación total del potencial en dicho punto debido al EOI, se sustituye el desarrollo en armónicos esféricos de la

<sup>4</sup> Para  $n$  un entero no negativo y  $m$  un entero en el rango  $[-n, n]$ , se define el *armónico esférico complejo*  $Y_n^m(\theta, \lambda) = (-1)^m \mu_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda}$  si  $m \geq 0$  e  $Y_n^m(\theta, \lambda) = (-1)^m \bar{Y}_n^{-m}(\theta, \lambda)$  si  $m < 0$ . La barra denota el conjugado complejo y  $\mu_n^m = [(2n+1)/4\pi] (n-m)!/(n+m)!^{1/2}$  es una constante de normalización introducida para garantizar la *propiedad de ortogonalidad*  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \lambda) \bar{Y}_{n_1}^{m_1}(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = \delta_{nn_1} \delta_{mm_1}$ , siendo  $\delta_{ij} = 0$  la delta de Kronecker.

marea oceánica dado por [2.83] y la función de Green correspondiente, definida en [2.29], en la integral de convolución [2.65]

$$L(\theta, \lambda) = \rho_w g_0 \frac{R_T^3}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n - h'_n) \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left[ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{n_1} \zeta_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda') \right] P_n(\cos \psi) \sin \theta' d\theta' d\lambda'$$

A partir del teorema de adición de los armónicos esféricos<sup>5</sup>, la ecuación anterior puede reescribirse de la forma

$$L(\theta, \lambda) = \frac{\rho_w g_0 4\pi R_T^3}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1 + k'_n - h'_n}{2n+1} Y_n^m(\theta, \lambda) \cdot \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{n_1} \zeta_{n_1}^{m_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda') \bar{Y}_n^m(\theta', \lambda') \sin \theta' d\theta' d\lambda'$$

Por la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos, resulta

$$L(\theta, \lambda) = \rho_w \frac{g_0 4\pi R_T^3}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1 + k'_n - h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones [2.9] y [2.19], la expresión anterior puede escribirse equivalentemente como

$$L(\theta, \lambda) = \rho_w 4\pi G R_T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1 + k'_n - h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) = \frac{\rho_w}{\hat{\rho}_m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n 3g_0 \frac{1 + k'_n - h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \quad [2.85]$$

siendo  $\hat{\rho}_m = 5.518 \text{ kg/m}^3$  la densidad media de la Tierra y  $\rho_w = 1.035 \text{ kg/m}^3$  la densidad media del agua del mar (p. ej., Ray, 1998).

### Desplazamiento Radial

Se sustituyen el desarrollo en armónicos esféricos de la marea oceánica dado por [2.83] y la función de Green de carga [2.31] en la integral de convolución [2.65], resultado

$$L_{u_r}(\theta, \lambda) = \rho_w \left( R_T^3 / M_T \right) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{n_1} \zeta_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda') \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos \psi) \right] \sin \theta' d\theta' d\lambda'$$

Como en el caso anterior, a partir del teorema de adición de los armónicos esféricos y teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad de los mismos, resulta

$$L_{u_r}(\theta, \lambda) = \rho_w \frac{4\pi R_T^3}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda)$$

O, equivalentemente, teniendo en cuenta las expresiones [2.9] y [2.19]

$$L_{u_r}(\theta, \lambda) = \frac{\rho_w 4\pi G R_T}{g_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \approx \frac{\rho_w}{\hat{\rho}_m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{3h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \quad [2.86]$$

### Desplazamiento Tangencial

La componente tangencial del desplazamiento por el EOI se obtiene, análogamente al desplazamiento radial, a partir de la función de Green [2.36] y la integral de convolución [2.65] (p. ej., Mitrovica et al., 1994)

<sup>5</sup> El **Teorema de Adición** de los armónicos esféricos establece que, dados dos vectores  $(r, \theta, \lambda)$  y  $(r', \theta', \lambda')$  separados una distancia angular  $\psi$  se verifica  $P_n(\cos \psi) = (4\pi / (2n+1)) \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_n^m(\theta', \lambda') Y_n^m(\theta, \lambda)$ .



$$L_{u_\psi}(\theta, \lambda) = \rho_w \frac{4\pi R_T^3}{M_T} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{l'_n}{2n+1} \zeta_n^m \left( \frac{\partial Y_n^m(\theta, \lambda)}{\partial \theta}, \frac{\partial Y_n^m(\theta, \lambda)}{\sin \theta \partial \lambda} \right) \approx$$

$$\approx \frac{\rho_w}{\hat{\rho}_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{3l'_n}{2n+1} \zeta_n^m \left( \frac{\partial Y_n^m(\theta, \lambda)}{\partial \theta}, \frac{\partial Y_n^m(\theta, \lambda)}{\sin \theta \partial \lambda} \right) \quad [2.87]$$

### Variaciones de Gravedad

En el caso de las variaciones de gravedad, utilizando la función de Green definida por [2.58] y la integral de convolución dada en [2.65], se obtiene (p. ej., Merriam, 1980)

$$L_{g_s}(\theta, \lambda) = \rho_w R_T^2 \frac{g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n - (n+1)k'_n + 2h'_n \right] \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-n_1}^{n_1} \zeta_{n_1}^{m_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{n_1}^{m_1}(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) \sin \theta' d\theta' d\lambda'$$

De tal forma que, nuevamente, utilizando la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos, así como el teorema de adición, resulta

$$L_{g_s}(\theta, \lambda) = \frac{\rho_w 4\pi R_T^2 g_0}{M_T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n - (n+1)k'_n + 2h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \approx$$

$$\approx \frac{\rho_w}{\hat{\rho}_m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{3g_0}{R_T} \frac{n - (n+1)k'_n + 2h'_n}{2n+1} \zeta_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \quad [2.88]$$

En los desarrollos obtenidos anteriormente faltarían por determinar los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos de la marea oceánica,  $\zeta_n^m$ , según la ecuación [2.84]. Debe observarse que la serie de armónicos esféricos [2.83] que determina la marea oceánica converge con relativa lentitud y, por tanto, se requiere que la suma se realice sobre un número grande de términos. Como consecuencia de ello, el número de coeficientes,  $\zeta_n^m$ , que necesitan determinarse también será elevado. Con el fin de optimizar los cálculos, Ray y Sánchez (1989) proponen utilizar la Transformación Rápida de Fourier (FFT) para la integración sobre  $\lambda$  en [2.84]. Según este procedimiento los coeficientes  $\zeta_n^m$  se calculan mediante (Swarztrauber, 1979)

$$\zeta_n^m = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{i=1}^N Z_n^m(\theta_i) \zeta(\theta_i, \lambda_j) e^{im\lambda_j} \quad [2.89]$$

siendo  $N \times N$  la resolución de la cuadrícula de integración y  $Z_n^m(\theta_i)$  son los polinomios de Legendre.

El método de cálculo del efecto de carga oceánica más extensamente utilizado en diferentes aplicaciones es el formalismo de convolución de las funciones de Green con la marea oceánica (Secc. 2.5.1). La principal razón de este hecho es la eficacia de este procedimiento frente a las complicaciones de cálculo que presenta el formalismo del desarrollo en armónicos esféricos, debido a la lenta convergencia de las series y gran carga computacional. Generalmente, el desarrollo de la marea oceánica se trunca en el grado  $n = 40$ , lo que perjudica el resultado en puntos próximos a la costa ( $\sim$  en un radio de 1.500 km) (Baker, 1984). Más aún, con este último formalismo en las proximidades a las costas, debido a los saltos discontinuos de agua a tierra, se originan pequeños fenómenos de Gibbs. Además, con el método de Farrell, durante la integración numérica es posible disminuir el tamaño del elemento de área en las proximidades del punto estación para mejorar los resultados. Para alcanzar el mismo resultado en el método de los armónicos esféricos, se debería usar

una representación de la marea oceánica y de la línea de costa de grado más alto, lo que conlleva un refinamiento global del área de integración y un incremento en el número de cálculos.

En el caso de la variación del potencial, la concordancia entre ambos métodos es buena, siendo además la convergencia de las series en el segundo caso muy rápida (según Ray y Sánchez, 1989; Ray, 1998,  $n = 180$  y  $n = 360$  para resoluciones espaciales de  $1^\circ$  y  $0,5^\circ$ , respectivamente). Por el contrario, la convergencia de la series para las variaciones de gravedad es considerablemente más lenta, alcanzándose la equivalencia entre ambos métodos para el  $n = 10.000$  (Merriam, 1980). Para el desplazamiento radial, Schrama (2005), considerando los grados  $n = 180$ ,  $360$  y  $720$  para resoluciones de la marea oceánica de  $1^\circ$ ,  $0,5^\circ$  y  $0,25^\circ$ , respectivamente, obtienen una concordancia entre los métodos de  $0,2$  mm en el océano abierto y hasta  $3-5$  mm (incluso  $10$  mm en los casos más extremos) en las proximidades de las costa.

#### 2.5.4 Programas de Cálculo de la Carga Oceánica de Marea

Actualmente, existen diversos programas para el cálculo del EOI desarrollados por diferentes autores. Aunque la mayoría de estos programas están basados en el formalismo de convolución de las funciones de Green (Secc. 2.5.1), presentan diferencias significativas en el procedimiento de cálculo. Entre ellas: el tratamiento y construcción de la cuadrícula de integración, la discretización en el entorno del punto estación (resolución y determinación de la distribución tierra/océano), las técnicas de interpolación de los valores de marea oceánica de las funciones de Green de carga. Entre los programas más comúnmente utilizados se encuentran SPOTL (Agnew, 1996; 1997), GOTIC/GOTIC2 (Matsumoto et al., 2001), OLFG/OLMPP (Scherneck, 1991) y CARGA (Bos y Baker, 2005). Cabe destacar lo siguiente:

- Los programas GOTIC2 y SPOTL utilizan para sus cálculos una cuadrícula de integración global prefijada. En ambos casos la distribución tierra/agua de la cuadrícula se obtuvo a partir de la base de datos de líneas de costas *World Vector Shoreline Data* distribuida con el software GMT (Wessel y Smith, 1996). Como consecuencia de ello, en algunas zonas como, por ejemplo, las Islas Canarias, existen imprecisiones significativas en la delimitación de los contornos costeros. Además, la cuadrícula utilizada por GOTIC2 (de resolución  $0,083^\circ$ ) se encuentra desviada, aproximadamente,  $0,083^\circ$  hacia el Sur.
- El programa OLFG/OLMPP constituye la base de cálculo del servidor Web ***Ocean Tide Loading Provider*** (M. S. Bos y H. -G. Scherneck), accesible a través de la dirección <http://geodac.fc.up.pt/loading/index.html>. Nuevamente, la asignación tierra/agua en cada celda de la cuadrícula de integración, que en este caso se refina automáticamente en torno al punto de cálculo, se basa en mapas digitales (de resolución  $0,00549^\circ$ ) obtenidos del banco de datos GMT.
- Con respecto al programa CARGA su característica más reseñable radica en que permite reproducir, al nivel del  $0,1\%$ , los procedimientos de cálculo de los programas anteriores.

Bos et al., (2002), Boy et al. (2003) y Bos y Baker (2005) estudian las diferencias en el EOI, introducidas por los diferentes procedimientos de cálculo de los programas SPOTL, GOTIC2, OLFG/OLMPP y CARGA. En general, estos autores concluyen que las discrepancias entre los diferentes programas se encuentran en el rango del 2% al 5%, aunque Boy et al. (2003) señalan que las discrepancias pueden alcanzar hasta un 10% dependiendo del punto de cálculo.

## **2.6 Programa para el Cálculo del EOI: ECOM Versión 1.0**

En esta memoria, se ha desarrollado un programa de cálculo del EOI con el fin de incrementar la exactitud en su determinación. Para ello, se han tenido en cuenta las conclusiones extraídas en el estudio realizado en las Secciones previas, las metodologías de cálculo y la contribución que sobre el resultado final tienen los errores inherentes a dicho cálculo. Los mayores errores provienen de la representación de la marea oceánica y de la delimitación de los contornos costeros. Por tanto, el programa se ha desarrollado de forma que permite complementar los modelos globales de marea con otros modelos locales de mayor resolución. Además, es posible refinar la cuadrícula oceánica de forma automática en torno al punto de cálculo para mejorar la delimitación de las líneas de costa. Por otra parte, puesto que el uso de diferentes funciones de Green, calculadas usando distintos modelos de Tierra, introduce diferencias en el EOI que, dependiendo de la precisión requerida y el ámbito de aplicación, pueden llegar a ser significativas, se ha introducido la posibilidad de incorporar las funciones complejas que consideren el carácter anelástico o visco-elástico del modelo terrestre. Finalmente, se ha considerado la opción de introducir modificaciones en las constantes, parámetros y técnicas numéricas (p.ej., interpolaciones) involucrados en el cálculo ya que, si bien aisladamente los errores que introducen pueden ser incluso despreciables, la suma de todos puede llegar a ser significativa. En resumen, se ha elaborado un programa de cálculo, con un diseño flexible, que posibilita la combinación de diferentes opciones (en cuanto al uso de modelos locales, refinamiento, técnicas de interpolación, etc.), de tal forma que se satisfagan los requerimientos de cada zona de estudio. Por otra parte, el programa se ha diseñado de forma que sea accesible a través de cualquier sistema Windows (con opción de sistema UNIX/LINUX para usuarios avanzados), con un entorno visual y asistencia guiada al usuario (con todas las opciones posibles que le permitan extraer los resultados más exactos posibles).

### **El Software ECOM Versión 1.0**

El software ECOM 1.0 comprende un programa de cálculo basado en la metodología, técnicas y opciones planteadas para incrementar la exactitud en el EOI, una interfaz visual y un sistema de bases de datos para la organización de la información. El programa de cálculo está escrito en lenguaje FORTRAN90 y compilado en una librería dinámica (denominada EFO\_F90.dll), accesible desde la interfaz visual que, a su vez, está programada en Visual Basic (ECOM.exe). La compilación de esta última se realiza, para sistemas operativos Windows, como un archivo ejecutable. Opcionalmente, el programa se puede distribuir sin su entorno visual como una rutina FORTRAN

(EFO\_F90.exe), ejecutable en entornos LINUX/UNIX. Para la integración de las Bases de Datos relacionales se ha utilizado ACCESS (conexión *ActiveX Data Objects* y origen de datos Microsoft Access ODBC Driver). La distribución incluye el programa con documentación suplementaria.

#### a) Descripción del Programa de Cálculo

El código fuente se estructura en un programa principal y 44 subrutinas. Esencialmente, las subrutinas se clasifican en: Funciones de cálculo, interpolaciones, convoluciones, refinamientos, entrada y salida de ficheros, control de errores y validaciones. Todas las subrutinas han sido programadas íntegramente para este trabajo<sup>6</sup>. La funcionalidad de este programa es el cálculo del EOI, lo que puede llevarse a cabo para 21 constituyentes armónicos (semi-diurnos, diurnos y largos periodos), 3 componentes del EOI (desplazamientos y variaciones de gravedad) y 99 estaciones diferentes, simultáneamente en una ejecución. La implementación del cálculo, siguiendo el formalismo de convolución de las funciones de Green de carga con un modelo de marea oceánica, es la siguiente:

##### 1) Con respecto a las funciones de Green:

- El valor de la función de Green de carga (real o compleja), para la distancia angular entre el punto de cálculo y cada nodo de la cuadrícula oceánica, se obtiene mediante la interpolación de los valores tabulados que, opcionalmente, pueden ser: spline cúbica, cuadrática o Langrange.
- Cuando la distancia angular entre el punto de cálculo y el nodo oceánico es pequeña (inferior a las tabuladas), el valor de la función de Green se calcula a partir de las ecuaciones [2.35] y [2.40] para las componentes radial y tangencial del desplazamiento, respectivamente, y de la ecuación [2.57] para la componente elástica de la gravedad. Los valores asintóticos de los números de Love de carga pueden seleccionarse de acuerdo a las funciones de Green utilizadas, o con valores genéricos establecidos por defecto (Tabla 2.1).

##### 2) Con respecto al dominio de integración: El área oceánica sobre el que se calcula el efecto puede seleccionarse como.

- El área comprendida en el interior de dos anillos concéntricos en torno al punto de cálculo (en adelante se denotará por *dominio general*). El usuario introduce el radio mínimo y máximo.
- El área abarcada por un rectángulo (o bien la región complementaria). Los límites del área, que se introducen por el usuario, están indicados por latitudes y longitudes máximas y mínimas). Se denominará *área poligonal*.

Ambas opciones pueden utilizarse conjuntamente.

##### 3) La densidad del agua del mar se introduce como un parámetro modificable por el usuario.

##### 4) Con respecto al modelo de marea oceánica, se pueden considerar modelos globales, locales o ambos. En cada caso:

---

<sup>6</sup> Excepcionalmente, se han utilizado las funciones DQDVAL y UMACH pertenecientes a la librería externa de cálculo numérico IMSL.

- Utilizando sólo un modelo global el EOI se puede calcular en el dominio de integración establecido (que puede abarcar toda la superficie oceánica del planeta), o en el interior/exterior del área poligonal indicado.
- Utilizando sólo un modelo local el EOI se puede calcular en el dominio general establecido (que debe ser interior al área poligonal), o en toda la extensión que abarque el modelo (en cuyo caso se le hace coincidir automáticamente con el área poligonal).
- Suplementando un modelo global con otro local en un área establecida, bien por el área cubierta por el modelo local, o bien por un área poligonal en su interior. Asimismo, puede establecerse un dominio general que abarque zonas internas y externas al modelo local. El enlace entre modelos se realiza sin que se produzcan zonas de solapamiento. Para ello, si las celdas del modelo global (análogamente el modelo local) atraviesan los límites establecidos por el área poligonal (esto es, solapan parcialmente el modelo local) se recalcula el área de la porción de celda que se sitúa en el exterior.

5) La cuadrícula oceánica sobre la que se presentan los modelos (global y/o local) puede refinarse, opcionalmente, de forma automática en torno al punto de cálculo. El refinamiento se realiza a partir de:

- Un fichero de máscaras tierra/agua para la determinación de los contornos costeros.
- Un área de refinamiento que se indica por una distancia angular desde el punto de cálculo. La elección de esta distancia se realiza, generalmente, en función de la existente desde el punto de cálculo a la costa más próxima.
- Un factor de refinamiento que determina el ajuste a las líneas de costa. Generalmente, se selecciona dependiendo de la resolución del fichero de máscaras y/o de la complejidad geométrica de la línea de costa.

El proceso es el siguiente:

- Se subdivide recursivamente cada celda oceánica, dentro del área de refinamiento seleccionado, en cuatro sub-celdas más pequeñas. Este proceso se repite hasta que la distancia desde estas sub-celdas hasta el punto de cálculo es mayor que 20 veces el radio de la celda. Esta condición garantiza que la respuesta terrestre a la carga producida por la celda oceánica sea equivalente a la respuesta debida a la carga de una masa puntual unitaria que actúa en el centro de dicha celda (Secc. 2.5.1.1).
- El estado tierra/agua de las celdas resultantes del proceso de refinamiento se determina a partir del fichero de máscaras seleccionado. Para ello, si el tamaño de la celda es inferior a la resolución del fichero de máscaras se le asigna el valor (tierra/agua) de la celda correspondiente en el fichero de máscaras. Si el tamaño de la celda es mayor que la resolución del fichero de máscaras y, además, cubre zonas de tierra y agua, se determina el contenido de agua en su interior.

- El valor que toma la marea en la cuadrícula de integración (resultante del refinamiento) se obtiene a partir de la interpolación de los valores proporcionados por el modelo oceánico. Genéricamente, se utiliza una interpolación bilineal. Pero en caso de que las celdas correspondientes en esta interpolación estén determinadas como tierra en el modelo, entonces se sustituye por un valor promediado de las 9 celdas circundantes.

#### 6) Respecto al procedimiento de convolución:

- El efecto de la atracción Newtoniana, para las variaciones de gravedad, se calcula a partir de la expresión [2.48], o [2.46] si la altitud de la estación es cero.
- La convolución de las funciones de Green con el modelo (o modelos) de marea oceánica se realiza según [2.68], [2.71] y [2.74] para el desplazamiento radial, el tangencial y las variaciones de gravedad, respectivamente. Cuando el modelo global se suplementa con un modelo local, las sumas de los efectos de ambos se realiza de forma análoga a como se expresó en [2.67] (similarmemente, cuando se refina la cuadrícula oceánica).

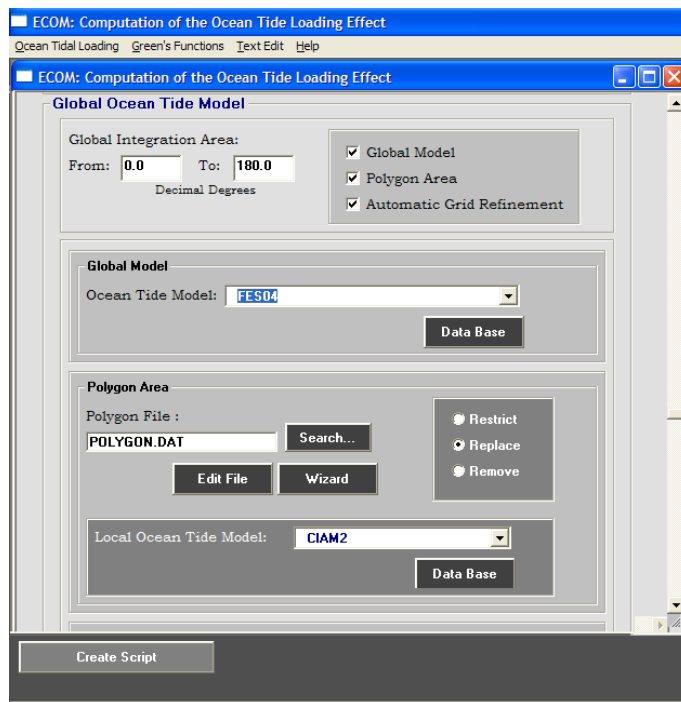
Los datos externos requeridos para el cálculo son:

- La información concerniente a la estación: Longitud, latitud y altitud sobre el nivel del mar. Opcionalmente, puede introducirse un valor local para la gravedad. El acceso a esta información puede realizarse bien a través de ficheros de texto ASCII, o bien, a través de la correspondiente Base de Datos integrada en el software.
- Las funciones de Green de carga tabuladas: Pueden seleccionarse de entre las incluidas en la correspondiente base de datos, o bien, pueden introducirse por el usuario mediante un fichero de texto ASCII.
- El fichero de máscaras tierra/agua (opcional, sólo en caso de refinamiento de la cuadrícula oceánica): Se introduce como un fichero de texto ASCII.
- Los modelos oceánicos se introducen como ficheros ASCII. No existe restricción alguna por resolución u otra consideración.

#### **b) Descripción de la interfaz visual (ECOM V.1.0)**

La interfaz visual de ECOM, como es habitual en cualquier programa desarrollado bajo Windows, está constituida por una serie de ventanas gráficas y barras de herramientas. El código fuente correspondiente a esta interfaz visual se estructura en 21 formularios y 9 módulos de declaraciones. La base de datos de funciones de Green (Greenfunctions.mdb) consta de 2 tablas de 11 y 17 columnas, respectivamente. La base de datos de estaciones (Stations.mdb) consta de una tabla de 9 campos.

**FIGURA 2.9:** Imagen parcial de la página principal del software ECOM, para el cálculo del EOI.



**ECOM Stations Data Base**

Station							
Identification	Name	Latitude	Longitude	Elevation	Distance to Sea	Azimuth	Gravity
00AU	Aulo_Naturaleza	27.714	-17.988	950.5	3	0	978
3093	Teide_Parador	28.23	-16.63	2151	18.5	0	978.9
3090	Cueva_Verdes	29.16	-13.441	37	1.3	0	978.0326771
0ALG	Algodonales	36.88	-5.4047	355.5	0.97	0	978
VABS	Valle_Absoluta	40.6492	-4.1433	1212.4	350	0	978
PIAG	Pilar-IAG	40.4507	-3.724	638.8	310	0	978
OMEL	Melilla	35.3056	-2.957	114.6	0.97	0	978

Number of Selected Stations: 2

Order stations grid by:

☐ Identification  
☐ Name  
☐ Latitude  
☒ Longitude

Change

Stations File Name: Madrid\_Stations.txt

Export

Records shown: 7

**FIGURA 2.10:** Imagen de las interfaces de acceso a las base de datos integradas en el software ECOM. (Arriba) Base de datos de estaciones. (Abajo) Base de datos de funciones de Green.

**ECOM: Green's Functions Data Base**

Identification: Name: GBCC.Farrell

References: Author: Farrell, Reference: Farrell (1972)

Earth Model: Earth Model: GB Continental Crust

Computation: Kind: Elastic, Method: , Number of Degrees: 50

Components: ☒ Radial Displacement, ☒ Tangential Displacement, ☒ Gravity, ☒ Tilt, ☐ Potential, ☐  $\epsilon_{rr}$ , ☒  $\epsilon_{\theta\theta}$ , ☐  $\epsilon_{\lambda\lambda}$

48 Record Shown: 2 de 2 GBCC.Farrell

La ventana principal, consta de:

- 1) Un espacio de trabajo, donde se despliegan todas las ventanas secundarias.
- 2) Una barra de menú, que permite acceder a todas las opciones posibles del programa. Consta de las siguientes partes:

- El Menú “*Ocean Tidal Loading*”, que permite acceder a todas las opciones posibles para el cálculo del EOI a través de dos submenús: El submenú: “*Run Script*”, que despliega la ventana “*ECOM Script*”. Su funcionalidad es consultar, crear y/o ejecutar los *scripts*<sup>7</sup>. Esta opción no incluye asistencia guiada, por lo que está diseñada para usuarios avanzados. El submenú “*Step by Step*”, que despliega la ventana “*ECOM Step by Step*” (Fig. 2.9). Su funcionalidad es la asistencia guiada al usuario para la generación del script. La ventana se organiza en una serie de espacios diferenciados, correspondientes a cada uno de los pasos que deben seguirse. Cada paso se activa únicamente cuando se hayan resuelto los anteriores:
  - Seleccionar las estaciones: Incluye la opción de introducir la información manualmente (en un archivo de texto), seleccionar las estaciones en la base de datos “*ECOM Stations Data Base*” o utilizar el asistente guiado “*ECOM Wizard for Stations File Creation*”.
  - Seleccionar los constituyentes armónicos: Incluye la opción de introducir la información manualmente (en un archivo de texto) o utilizar el asistente guiado “*ECOM Wizard for Constituents File Creation*”.
  - Seleccionar las funciones de Green de carga y el método de interpolación: Incluye la opción de introducir la información manualmente o seleccionar las funciones en la base de datos “*ECOM Green’s Functions Data Base*”.
  - Establecer el valor de la densidad del agua del mar.
  - Seleccionar las opciones relativas a: Dominio general y área poligonal, modelos global y/o local, refinamiento. En el caso del área poligonal se incluye la opción de utilizar el asistente guiado “*ECOM Wizard for Polygon Area File Creation*”.

Todas las opciones, parámetros y modelos seleccionados se someten a controles de verificación, para garantizar la integridad de la ejecución.

- El Menú “*Green’s Functions*”, que permite acceder a la base de datos “*ECOM Green’s Functions Data Base*” (para su consulta, inserción o modificación).
- El Menu “*Text Edit*”, que permite editar cualquier fichero de texto que se desee consultar.
- El Menú “*Help*”, desde el que se puede acceder, entre otros, a la documentación de ayuda y los créditos del programa.

Los asistentes de ayuda (para la selección de las estaciones, constituyentes armónicos y área poligonal) solicitan al usuario los datos requeridos, suministrándoles toda la información necesaria. Los procesos de incorporación y recuperación de la información en las bases de datos se realizan desde el propio entorno visual.

---

<sup>7</sup> Archivo de órdenes utilizado por el programa de cálculo del EOI.



La salida del programa, esto es, el resultado del cálculo del EOI, se facilita en un fichero de texto ASCII (véase ejemplo en la Fig. 2.13).

### Testeo de ECOM V.1.0

Se ha testado ECOM mediante su comparación con el programa CARGA (Bos, 2000), utilizando las opciones comunes a ambos. Las diferencias obtenidas son inferiores al 0,2%.

```
COMPUTATION OPTIONS
=====
*****[ Stations ]*****
Code Name      Longitude Latitude Height(m) D. Sea(km) Azimuth Gravity(m/s^2)
Station 01: 0000 ALGODONALES -5.4047 36.8800 355.5000 55.0000 0.0000 9.7803
*****[ Waves ]*****
M2 N2 S2 K2 Q1 O1 P1 K1
*****[ Green Functions ]*****
NAME: GBCC.Farrell
INTERPOLATION: Spline
-> If used Asymptotic Love values taken from Love.dat correspondig to the selected Earth Model.
*****[ Tidal Interpolation Domain ]*****
Angular distance from the station (degrees): 0.0000 - 180.0000
*****[ Ocean Tide Models ]*****
GLOBAL MODEL: ON
- Name: GOT00.2
- Domain (deg): xmin = -179.5000 xmax = 180.0000 ymin = 0.5000 ymax = 180.0000
- Resolution (sc): dx = 1800.0000 dy = 1800.0000
- Dimension: i = 720 j = 360
POLYGON AREA: ON
LOCAL MODEL: ON
- Name: IBER01
- Domain (deg): xmin = -15.9583 xmax = 5.9583 ymin = 42.0417 ymax = 55.9583
- Resolution (sc): dx = 300.0000 dy = 300.0000
- Dimension: i = 264 j = 168
-> Modified Limits of the Polygonal Area to adjust to Local Model Limits:
POLYGON AREA DOMAIN: -16.0000 6.0000 34.0000 48.0000
*****[ Ocean Grid ]*****
GRID REFINEMENT: ON
-> Automatic Grid Refinement Option by default
BOUNDARY: 3.0000
FACTOR: 0.0500
MASK FILE: gebco_mask.out
*****[ Mass Conservation ]*****
MASS CONSERVATION: OFF (-> Value taken by default)
*****[ Parameters ]*****
DENSITY (kg/m^3): 1027.0000
*****[ Output Conventions ]*****
PHASE CONVENTION: Local

M2 WAVE RESULTS
=====
- Water cells in Global Ocean Tide Model : 172483
- Land cells in Global Ocean Tide Model : 86717
- Water cells in Local Ocean Tide Model : 26538
- Land cells in Local Ocean Tide Model : 17814

Station 01: 0000 ALGODONALES
-----
GRAVITY, Elastic Component (microGal) : 3.3328 120.436
-----
--> Non-refinated Global Area (microGal) : 0.9600 111.828
--> Refinated Global Area (microGal) : 0.0000 0.000
--> Non-refinated Local Area (microGal) : 1.5258 116.996
--> Refinated Local Area (microGal) : 0.8922 135.724

GRAVITY, Newtonian Component (microGal): 1.4407 116.182
-----
--> Non-refinated Global Area (microGal) : 0.4120 110.287
--> Refinated Global Area (microGal) : 0.0000 0.000
--> Non-refinated Local Area (microGal) : 0.8100 113.600
--> Refinated Local Area (microGal) : 0.2353 135.746

GRAVITY, Total (microGal) : 4.7707 119.152
-----
--> Non-refinated Global Area (microGal) : 1.3718 111.365
--> Refinated Global Area (microGal) : 0.0000 0.000
--> Non-refinated Local Area (microGal) : 2.3349 115.818
--> Refinated Local Area (microGal) : 1.1275 135.729
-----
```

FIGURA 2.11: Ejemplo de un fichero de resultados, extraído de la salida del programa ECOM.

## 2.7 Conclusiones

En este Capítulo se ha realizado un estudio metodológico del Efecto Oceánico Indirecto, consiste en:

- Una descripción de los usos y aplicaciones de las investigaciones sobre el EOI en Geodesia. Para los desplazamientos y las variaciones de gravedad observados sobre la superficie terrestre, se han detallado las precisiones de los instrumentos y de las técnicas de observación involucrados, así como los rangos máximos del EOI sobre el observable correspondiente (Secc. 2.2).
- Una descripción de la formulación fundamental necesaria para la obtención de la respuesta terrestre (para un modelo SNREI y en el caso de los desplazamientos y las variaciones de gravedad sobre su superficie) al efecto causado por la marea oceánica (Secc. 2.3). Así, se han detallado las ecuaciones que rigen las deformaciones debidas al EOI y sus soluciones, obtenidas bajo las condiciones de frontera apropiadas, se han expresado en términos de los números de Love de carga elásticos. Se han especificado las funciones de Green de carga, que representan las componentes de la respuesta terrestre al EOI (Secc. 2.4) y se han comparado las diferencias introducidas por la elección de diferentes modelos de Tierra SNREI.
- Una exposición detallada de las metodologías de cálculo numérico del EOI, atendiendo a su adecuación a los objetivos fundamentales de esta memoria. Concretamente, se han expuesto tres metodologías: el formalismo de convolución de las funciones de Green con la marea oceánica (Secc. 2.5.1), la técnica de las funciones de Green integradas (Secc. 2.5.2) y el formalismo del desarrollo en armónicos esféricos (Secc. 2.5.3). Se han expuesto aquellos aspectos involucrados en el cálculo que son susceptibles de ser mejorados, a través de un estudio de los errores inherentes a la metodología aplicada, a los parámetros y los modelos involucrados.

De las conclusiones extraídas de este estudio y con el objetivo principal de incrementar la exactitud en el cálculo del EOI, se ha desarrollado el software, **ECOM V.1.0**. La implementación numérica de la metodología de cálculo, basada en el formalismo de convolución de las funciones de Green con la marea oceánica, se ha realizado de forma que posibilita la combinación de múltiples opciones (técnicas de interpolación, funciones de Green reales o complejas, complementación de modelos globales y regionales, refinamiento automático de la cuadrícula oceánica etc.). El programa se presenta con una interfaz visual, operativa en sistemas Windows, y asistentes de ayuda guiada al usuario. Además, incluye bases de datos, accesibles a través de la interfaz visual, para la organización de la información de utilidad en el cálculo (p. ej., funciones de Green).

# Metodología para el Desarrollo de un Modelo de Carga Oceánica de Marea

*En este Capítulo se describe la metodología utilizada para el desarrollo de un modelo de carga oceánica, basada en la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico. Inicialmente, en las Secciones 3.2 y 3.3, se expone la evolución histórica de los métodos clásicos utilizados en estos desarrollos y se realiza una clasificación de modelos de marea en función de las metodologías cálculo, exponiendo los principios básicos de algunas de las técnicas implicadas en ello, como la altimétrica por satélite y la asimilación de datos. Asimismo, se hace una recopilación de algunos modelos de marea oceánica globales más relevantes y se estudian sus precisiones. En la Sección 3.4 se desarrolla propiamente la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico, deduciendo las ecuaciones de aguas someras (SWE, lineales y no lineales), de acuerdo con las hipótesis y simplificaciones consideradas y planteando las condiciones de contorno del sistema. Aplicando la teoría del problema inverso generalizado (GI), que involucra un espacio modelo, un conjunto de datos y una función coste, la solución vendrá dada tras minimizar la función coste utilizando el método de los representantes. Las conclusiones a este Capítulo se presentan en la Sección 3.5.*

## 3.1 Introducción

Como se ha puesto de manifiesto en los Capítulos precedentes, existen numerosas aplicaciones, geodésicas, geofísicas y oceanográficas, en las que adquiere una gran importancia el uso de modelos de marea oceánica, tanto a escala global como regional. Como ejemplo destacan los estudios relacionados con observaciones del nivel del mar mediante altimetría por satélite, en tanto que deben corregirse del fenómeno de marea oceánica si se pretenden investigar otros fenómenos, como son las corrientes oceánicas, la circulación inducida por el viento o el intercambio de agua producido en los océanos del mundo. Dentro de estas líneas de investigación, en los últimos años han cobrado gran relevancia aquéllas encaminadas a la determinación precisa del nivel medio de los océanos y a la estimación de la temperatura de la superficie del mar (p. ej., Beckley et al., 2007; Gil, 2002). Asimismo, la modelización de la marea oceánica es esencial en las investigaciones relacionadas con las observaciones de la marea terrestre, ya que el efecto oceánico indirecto (EOI) que provocan es una de las principales fuentes de error (Baker et al., 1991; Ray, 1993).

En general, para el cálculo del EOI los modelos de marea oceánica deben proporcionar, para los constituyentes armónicos requeridos, una cobertura global con la suficiente resolución espacial y la mayor exactitud posible. Es importante observar que, en un punto sobre la superficie terrestre, la mayor contribución al EOI proviene de las zonas de agua que lo circundan. Aproximadamente, la mitad del efecto de carga proviene de la marea oceánica dentro de un área de radio 2.000 km en torno al punto (Scherneck, 1991). Teniendo en cuenta, además, que las características de marea (rango y patrón de propagación) son muy variables en regiones costeras y/o poco profundas<sup>1,2</sup>, el criterio de resolución espacial en estas zonas es un factor esencial. Por esta razón, cuando los modelos oceánicos globales no representan con suficiente exactitud la marea en el entorno próximo al punto de interés, estos deben complementarse con modelos regionales específicos, con una resolución muy fina de la cuadrícula oceánica, que representen con suficiente exactitud la marea y que, además, delimiten con mayor exactitud las líneas de costa. Véanse, por ejemplo, los trabajos de Clarke y Battisti (1981), Gotlib y Kagan (1982), Le Provost y Vincent (1986), Vincent y Le Provost (1988).

En este Capítulo, se describe exhaustivamente la metodología empleada en el desarrollo de los modelos de marea oceánica para las regiones circundantes a la Península Ibérica y el Archipiélago Canario, que son dos de los objetivos principales de esta memoria. Su aplicación concreta para ambas zonas de estudio se detalla en sendos Capítulos posteriores. El Capítulo se ha estructurado en cuatro Secciones principales. En la Sección 3.2 se realiza una exposición sobre la evolución histórica y estado actual del desarrollo de modelos de marea oceánica para, en la Sección 3.3, establecer una clasificación de los mismos en función de la metodología y/o datos utilizados en su construcción. En esta misma Sección se realiza una recopilación de los modelos globales de marea más comúnmente utilizados a lo largo de los últimos años. Por último, el grueso principal de este Capítulo se centra en la metodología empleada en la construcción de un modelo de marea oceánica, que se desarrollará a lo largo de la Sección 3.4. Esta metodología se basa en la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico numérico, y su exposición se realiza en cuatro apartados: El desarrollo del modelo hidrodinámico, el análisis del conjunto de datos observados, la asignación de los errores, tanto en el modelo hidrodinámico como en los datos y, finalmente, la obtención de la solución final, es decir, el modelo de marea oceánica. Por último, en la Sección 3.5 se recopilan y presentan los resultados y conclusiones a este Capítulo.

## **3.2 Desarrollo Histórico de los Modelos de Marea Oceánica**

El desarrollo de modelos de marea oceánica es un tema tratado prolíficamente en la literatura. En particular, en las últimas dos décadas son numerosas las investigaciones llevadas a cabo en relación

---

<sup>1</sup> Generalmente, por regiones costeras se entiende el área que se extiende desde la costa hacia afuera, y que abarca la plataforma continental y desde la pendiente de ésta hasta unos 50 km en el mar abierto.

<sup>2</sup> La variabilidad de la marea oceánica en aguas someras se debe, entre otras causas, a los fenómenos de resonancia que se producen cuando el periodo de oscilación libre de la cuenca oceánica es próximo al periodo de los constituyentes armónicos, y que causan un aumento local de las amplitudes de la marea oceánica (Maas y Doelman, 2003; Gil, 2002).

con las metodologías de construcción de este tipo de modelos y con la determinación de su precisión. Habitualmente, la validación de los modelos de marea se realiza mediante su comparación con los diferentes modelos existentes y con observaciones independientes. Los trabajos de Cartwright (1977), Hendershott (1981), Reid (1990), Parker (1991), Davies et al. (1997) y Le Provost (2001), son ejemplos en los que se expone la evolución histórica de los modelos de marea oceánica.

Históricamente, la marea oceánica se ha medido mediante observaciones realizadas con mareógrafos instalados a lo largo de las costas de los continentes y en islas en el océano abierto. A partir del año 1977, los avances tecnológicos en instrumentación permitieron realizar medidas pelágicas, utilizando sensores de presión instalados en el fondo oceánico. Los primeros modelos oceánicos globales elaborados fueron puramente empíricos. Se construyeron mediante la extrapolación de las constantes armónicas de marea calculadas a partir del análisis de las observaciones de mareógrafos. El principal problema que presenta este tipo de modelos es la escasez de medidas en el océano abierto, su distribución irregular a lo largo de las costas y, en muchas ocasiones, el emplazamiento singular de los mareógrafos, como en el caso de los situados en bahías o puertos. Paralelamente a los avances tecnológicos, a finales de la década de los 70 del siglo pasado, el desarrollo de los ordenadores permitió la aparición de los primeros modelos oceánicos teóricos contruidos a partir de batimetrías realistas. Estos primeros modelos teóricos, que fueron calculados por Hansen (1966), Pekeris y Accad (1969), Accad y Pekeris (1978) y Zahel (1977; 1978), tenían como objetivo principal investigar la distribución espacial de los constituyentes de marea a lo largo de los océanos. Posteriormente, se comprobó que los resultados de estos primeros modelos diferían significativamente con respecto a las escasas observaciones de marea existentes (Ray, 1993). No fue hasta el año 1980 cuando se dispuso, por primera vez, de una representación sobre todos los océanos del mundo de la distribución espacial de la marea oceánica, para los principales constituyentes de marea, con una exactitud suficiente como para ser utilizados en aplicaciones geofísicas. Este modelo de marea fue desarrollado por Schwiderski (1978, 1980, 1980b) (denotado por SCH80), mediante la *técnica de interpolación hidrodinámica*. Aunque, Schwiderski desarrolló en su mayor parte dicha técnica, ésta había sido introducida anteriormente por Hansen (1948). Este autor desarrolló un método numérico para calcular la marea oceánica partiendo de las ecuaciones clásicas de Laplace deducidas, a su vez, de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento de un fluido no viscoso. Más tarde, en 1966, Hansen desglosó las primeras ecuaciones de marea oceánica, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento de un fluido viscoso, que incluían los efectos de la viscosidad turbulenta y del rozamiento con el fondo topográfico del océano. Posteriormente, la técnica numérica de Hansen fue refinada por otros autores, como Brettschneider (1967), Zahel (1977; 1978) y Hendershott (1972). Este último, por ejemplo, incluyó en el potencial generador de marea total las perturbaciones causadas por la marea terrestre y el efecto de carga causado por la propia marea oceánica. La técnica de interpolación numérica hidrodinámica desarrollada por Schwiderski se basa en la incorporación de las constantes armónicas de marea, obtenidas a partir de medidas in-situ,

como condiciones de contorno en las ecuaciones hidrodinámicas de Laplace. En particular, las ecuaciones empleadas para la construcción de SCH80 incorporan los términos correspondientes a la marea terrestre, el EOI, considerando también las irregularidades del fondo, la disipación de energía y la fricción con el fondo oceánico. Finalmente, para su resolución, el sistema de ecuaciones se transforma, por el método numérico de Hansen (1966), en un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Cabe destacar que SCH80 fue, hasta el año 1991, el único modelo disponible para el cálculo del EOI. Es más, todavía en 1992 el IERS (McCarthy, 1992) recomienda la utilización de este modelo como estándar para utilizar en la corrección del EOI, por ejemplo, de datos GPS. Aunque a finales de la década de los 70, el inicio de la altimetría por satélite permitió estudiar las mareas en el océano abierto, usando datos del altímetro radar SEASAT (Junio-Octubre de 1978), los modelos oceánicos que se construyeron con estos datos sirvieron únicamente como una herramienta para la verificación de la calidad del modelo SCH80, pero no se pudieron utilizar en aplicaciones oceanográficas (p. ej., Cartwright y Alcock, 1983; Mazzega, 1985).

Los primeros modelos de marea oceánica basados en datos altimétricos válidos, procedieron de la misión GEOSAT (1985-1989) y fueron desarrollados por Cartwright y Ray (1990, 1991). Los modelos de marea basados en las técnicas de altimetría por satélite se obtienen, esencialmente, mediante el análisis de la señal de marea oceánica deducida a partir de la altitud del satélite sobre la superficie instantánea del océano (Secc. 3.3.1). Debido a numerosas causas, los modelos obtenidos a partir del altímetro GEOSAT no fueron más precisos que SCH80, ni tampoco de mayor utilidad práctica en aplicaciones oceanográficas (p. ej. Khanta, 1995). Algunas de estas causas fueron la escasa longitud temporal los datos GEOSAT, el problema del enmascaramiento o aliasing de la señal de marea (Secc. 3.3.1.2), los errores en la determinación de la órbita del satélite o la restricción de los datos a las latitudes comprendidas en el rango de  $\pm 72^\circ$ . A pesar de ello, estos primeros resultados pusieron de manifiesto que, dada una serie de observaciones altimétricas lo suficientemente largas, estas podrían proporcionar una descripción precisa de la marea oceánica en todos los océanos del globo terrestre. En la década de los 90 es cuando la altimetría mejora drásticamente el conocimiento de los océanos coincidiendo, además, en este mismo periodo de tiempo, con la gran evolución que experimentan las observaciones del nivel del mar mediante mareógrafos, tanto desde el punto de vista tecnológico como en sus campos de aplicación (Wöppelmann et al., 2006). Así, las misiones altimétricas de los satélites, ERS-1 (1991-2000) y, principalmente por la calidad de sus datos, TOPEX/Poseidón (T/P) (1992-2006) impulsan la realización de numerosas investigaciones para mejorar los modelos de marea oceánica, tanto en su resolución espacial como en su precisión y número de armónicos disponibles (p. ej., Cartwright, 1991; Andersen, 1995; Eanes, 1994). En particular, desde que se dispuso de una longitud aceptable de la serie de datos del satélite T/P, se desarrollaron un gran número de modelos globales nuevos, llegando a doce tan sólo en el año 1994. La misión T/P tenía como fin principal medir la elevación de la superficie del mar para estudios de la circulación oceánica global. El satélite, con una altitud de 1.336 km, tenía una cobertura espacial

limitada al rango de latitudes de  $\pm 66^\circ$  y su órbita fue diseñada con periodos de enmascaramiento de la señal lo suficientemente cortos, para favorecer el estudio de las principales frecuencias de la marea oceánica. Por ejemplo, para separar los constituyentes de marea  $M_2$  y  $S_2$ , que presentan periodos de enmascaramiento de 62 y 58 días, respectivamente (Tabla 3.1), se necesitan al menos tres años de observaciones (Andersen et al., 1995). Por el contrario, los satélites GEOSAT y ERS-1, a pesar de tener latitudes límites más altas ( $72^\circ$  y  $82^\circ$ , respectivamente), presentaban periodos de aliasing mucho más largos (317 y 94,5 días para el constituyente  $M_2$ , respectivamente) y, además, menor precisión en la determinación de órbitas.

Junto con la calidad y la longitud del conjunto de datos altimétricos, otros factores adicionales favorecieron la proliferación de modelos oceánicos a lo largo de la década de los 90. Más concretamente, el desarrollo paralelo a la altimetría por satélite, tanto teórico como numérico, de la dinámica de marea y de las técnicas de asimilación de datos (p. ej., Ray, 1993; Le Provost et al., 1995). Exceptuando el modelo puramente hidrodinámico FES94.1 desarrollado en 1994 por Le Provost y sus colaboradores (Secc. 3.3.3), la mayoría de los modelos desarrollados a partir de esta fecha se basan en medidas altimétricas que se incorporan, bien por técnicas de interpolación o bien por procesos de asimilación de datos. Todos los modelos presentan diferencias significativas entre ellos debidas a la metodología empleada, los datos incorporados (procedentes de mareógrafos o de diferentes satélites altimétricos), las efemérides de las órbitas utilizadas en el cálculo, etc. Por ejemplo, al mismo tiempo que el modelo puramente hidrodinámico FES94.1, Eanes (1994) construyó el modelo empírico CSR2.0 a partir de T/P. La combinación de las técnicas que habían sido utilizadas para elaborar ambos modelos, FES94.1 y CSR2.0, supuso la obtención de nuevas versiones de dichos modelos, FES95 (Le Provost et al., 1998) y CSR3.0 (Eanes y Bettadpur, 1996). Por una parte, el modelo FES95 asimilaba empíricamente datos del CSR2.0 en el modelo hidrodinámico FES94.1 y, por otra parte, el modelo CSR3.0 utilizaba los datos altimétricos de CSR2.0 para proporcionar correcciones de longitudes de ondas largas<sup>3</sup> al FES94.1. Progresivamente, la combinación de técnicas, el incremento en longitud de las series de datos de satélite y la incorporación de nuevos datos mareográficos dieron lugar a sucesivas versiones de los modelos anteriores. Todos estos modelos y sus precisiones se describirán más extensamente en la Sección 3.3.3. A partir de la comparación con observaciones mareográficas, se determinó que la precisión de estos nuevos modelos había mejorado sustancialmente, tanto con respecto al modelo de Cartwright y Ray (1990, 1991) como al modelo SCH80, hasta alcanzar 2-3 cm en el océano abierto (Andersen et al., 1995; Shum et al., 1997; King et al., 2005).

---

<sup>3</sup> Las ondas de marea pueden clasificarse de acuerdo a un parámetro referido como *profundidad relativa*, definido como la razón entre la profundidad del agua y la longitud de la onda. Cuando esta razón es inferior a 1/20 las ondas se definen como *ondas largas o de aguas poco profundas*. Obsérvese que, a pesar de su nombre, estas ondas largas no se restringen a las zonas de aguas poco profundas. Entre los ejemplos de ondas largas se encuentran la marea oceánica. Por otra parte, si la profundidad relativa es mayor que, aproximadamente, 1/2 las ondas se definen como *ondas cortas o de aguas profundas*. Finalmente, la clase de ondas entre las ondas largas y las ondas cortas se definen como *ondas intermedias*.

A pesar de que la altimetría por satélite permite realizar una observación mejorada de la topografía dinámica de la superficie oceánica, esta técnica presenta una serie de inconvenientes que deben tenerse en cuenta en el desarrollo de los modelos oceánicos. Además de los errores propios de la técnica, los principales inconvenientes se deben, por una parte, a que la medida se realiza sobre la superficie instantánea del océano y, por otra parte, a su poca resolución espacial y, consecuentemente, un periodo de adquisición de datos muy grande. Por ejemplo, en el caso del satélite T/P, la resolución espacial determinada por su órbita, es decir la separación de las trayectorias o trazas en tierra del satélite es de, aproximadamente, 315 km sobre el ecuador, con un periodo exacto de repetición de 10 días. Esta resolución espacial es una cuestión crítica en regiones de aguas poco profundas, donde la marea oceánica varía rápidamente (Matsumoto et al., 2000). Otra limitación de esta técnica, es que las medidas altimétricas no se pueden realizar a menos de unos 3 km de la costa y en profundidades inferiores a los 100-150 m, debido a que al reflejarse la señal en el fondo oceánico la precisión disminuye<sup>4</sup>. Por tanto, para desarrollar modelos oceánicos globales es necesaria la acumulación continua de datos altimétricos y la combinación con observaciones in-situ y/o modelos hidrodinámicos.

### 3.3 Clasificación de los Modelos de Marea Oceánica

Los modelos de marea oceánica pueden clasificarse en función de la metodología empleada para su construcción. En general, pueden establecerse tres grandes grupos (p. ej., Penna y Baker, 2002; Gil, 2002), los cuales se subdividen, a su vez, dando lugar a una estructura más compleja.

En el primer grupo se encuentran los *modelos hidrodinámicos puros*. Este tipo de modelos se caracterizan por elaborarse exclusivamente a partir de la modelización matemática de la marea oceánica, sin la incorporación de ninguna clase de datos observados. Están basados en la resolución de un sistema de ecuaciones hidrodinámicas, que describen la respuesta del océano a las fuerzas derivadas del potencial generador de marea, así como a la fuerza de Coriolis debida a la rotación terrestre. La única fuente de información empleada en este tipo de modelos proviene, por tanto, de datos batimétricos. Una de sus principales ventajas es que pueden diseñarse con una resolución tan alta como sea necesaria, pero está limitada por la capacidad informática, de memoria y almacenamiento (Matsumoto et al., 2000). Por el contrario, estos modelos dependen sustancialmente de las imprecisiones procedentes de la utilización de datos batimétricos inadecuados, especialmente en regiones de agua poco profundas y cuencas semicerradas. Asimismo, en estas zonas, la parametrización de los efectos de la disipación de energía y la fricción con el fondo oceánico influyen significativamente en los resultados obtenidos (Ray et al., 1996; Matsumoto et al., 2000). A este grupo pertenece, por ejemplo, el modelo de elementos finitos de Grenoble FES94.1 (Le Provost et al., 1994).

---

<sup>4</sup> Actualmente, las nuevas misiones altimétricas, en particular JASON-2, están trabajando en la mejora de la técnica altimétrica y de los datos producidos en las proximidades a la costa (AVISO Users Newsletter #4, 2010).



El segundo grupo corresponde a los **modelos puramente empíricos**, obtenidos a partir del análisis de marea de **observaciones in-situ** procedentes de mareógrafos, sensores de presión de fondo y/o de **técnicas espaciales** basadas en altimetría por satélite. Dentro de este grupo, los modelos oceánicos obtenidos mediante medidas altimétricas dan origen a los conocidos como **modelos espaciales o altimétricos**. Un trabajo pionero en este campo corresponde al desarrollado por Cartwright y Ray (1990), CR91, basado en los datos altimétricos de la misión GEOSAT. Con los datos del satélite T/P, se realizan los modelos CSR de Eanes (1994) y Eanes y Bettadpur (1996), DW95 de Desai y Wahr (1995), SR95.1 de Schrama y Ray (1994) y GOT99.2b Ray (1999).

El tercer grupo, referidos como **modelos mixtos**, engloba los modelos que combinan la modelización hidrodinámica y los datos de marea observados. Gran parte de los modelos oceánicos globales desarrollados en las últimas décadas, se basan en la conjunción de técnicas, lo que hace que surja una clasificación más compleja. Por ejemplo, dentro de este grupo se encuentran los **modelos numéricos de interpolación hidrodinámica**, que relacionan métodos teóricos y empíricos, mediante **esquemas de interpolación** de datos en modelos hidrodinámicos. El pionero de estos modelos fue SCH80. En este grupo también se encuentran los **modelos de asimilación de datos**, que combinan un modelo puramente hidrodinámico con datos observados. La serie de modelos TPXO, desarrollada por Egbert y sus colegas, así como diversas versiones de la serie de modelos FES que realiza el grupo de Grenoble, pertenecen a esta categoría.

### **3.3.1 La Altimetría por Satélite Aplicada a las Investigaciones de Marea Oceánica**

La aparición de la altimetría por satélite en la década de los 80 del siglo XX supuso un avance sin precedentes en los estudios de las variaciones del nivel del mar. Su cualidad más reseñable es la distribución global de las observaciones ya que, hasta entonces, únicamente se disponía de observaciones *in situ* procedentes de mareógrafos instalados a lo largo de las costas de los diferentes continentes, así como de escasas observaciones dispersas en el océano abierto, que no podían representar la variabilidad espacial de la marea oceánica a escala global. A continuación, se describe brevemente el fundamento de la técnica de altimétrica por satélite, con especial atención a las correcciones necesarias que deben aplicarse a las medidas altimétricas. Puesto que los datos altimétricos utilizados en esta memoria corresponden al satélite T/P, se describirán sus características observacionales principales.

#### **3.3.1.1 Principios Básicos de la Altimetría por Satélite**

Un altímetro a bordo de un satélite mide la distancia entre éste y la superficie del océano. La técnica de medida se basa en que la antena del altímetro radar emite pulsos de radiación electromagnética de corta duración, generalmente en el rango de la radiación microondas, hacia la superficie del océano. Estos pulsos se reflejan sobre la superficie del mar y vuelven al satélite, donde se detectan por un receptor. La medida básica es el tiempo de retorno de la señal, de forma que,

conociendo su velocidad de propagación, esto es, la del pulso radar, a partir de la intensidad y la estructura del pulso reflejado se obtiene la velocidad del viento y la altura de las olas. Conociendo los elementos orbitales del satélite con suficiente precisión, una vez realizadas las correcciones oportunas, se obtiene la altitud instantánea del satélite sobre la superficie del mar. Finalmente, la altura instantánea de la superficie del mar sobre el elipsoide de referencia se obtiene a partir del análisis temporal de varios pulsos consecutivos. Específicamente:

- **La altura medida por el altímetro,  $h^c(AR)^5$** , es la distancia desde el centro de masas del satélite a la superficie instantánea del océano. Dicha altura se calcula a partir del tiempo transcurrido desde que el radar emite el pulso hasta que regresa al receptor, una vez reflejado por la superficie oceánica, mediante la siguiente ecuación (Callahan, 1993; Chelton et al., 2001)

$$h^c(AR) = h^{c(Ins)}(AR) + \sum_j c_j \quad [3.1]$$

siendo  $h^{c(Ins)}(AR)$  la altura calculada a partir de la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , ignorando la refracción

$$h^{c(Ins)}(AR) = ct/2 \quad [3.2]$$

El sumatorio en [3.1] incluye las correcciones a los errores instrumentales, a los sesgos causados por el estado del mar y a los retardos originados por las diferentes componentes de la atmósfera y de la propagación de la señal a través de ésta.

- **La altitud del satélite,  $h(AO)^6$** , se define como la distancia desde el centro de masas del satélite al elipsoide de referencia, por lo que se conoce también como altitud orbital. Esta altitud se calcula a partir de su posición, facilitada por las agencias que definen la órbita precisa. Puesto que existen errores en la determinación de la órbita del satélite, se tendrá que

$$h^c(AO) = h(AO) + \varepsilon_o \quad [3.3]$$

siendo  $h^c(AO)$  la altitud del satélite corregida de los errores  $\varepsilon_o$ .

- **El nivel del mar,  $h(SSH)^7$** , se define como la distancia desde la superficie del mar hasta el elipsoide de referencia. Se obtiene restando la altura medida por el altímetro a la altitud del satélite, esto es

$$h(SSH) = h^c(AO) - h^c(AR) \quad [3.4]$$

#### a) Errores y Correcciones

Existen diferentes fenómenos, principalmente factores dinámicos debidos a la interacción con la atmósfera y el océano, que actúan como fuentes de error que afectan a la altura medida por el altímetro así como a la altitud del satélite. Seguidamente, se indican las correcciones más significativas, que se han aplicado a los datos altimétricos utilizados en esta memoria (Cap. 4 y 5). Para una ampliación sobre esta técnica altimétrica se remite, por ejemplo, a Fu y Cazenave (2001), Rodríguez-Velasco (1999), Catalán y Catalán (1996).

<sup>5</sup> AR acrónimo en inglés de *Altimeter Range*.

<sup>6</sup> OA acrónimo en inglés de *Orbit Altitude*.

<sup>7</sup> SSH acrónimo en inglés de *Sea Surface Height*.

- El error en la determinación de la trayectoria teórica del satélite, o simplemente **error orbital**, afecta a la altitud del satélite (p. ej., Tejera, 1996). La mayor parte de este error puede describirse en términos de un sesgo, de la forma (Kundsen, 1993; Andersen, 1994 y 1995)

$$\varepsilon_o = A_0 + A_1 \cos[\Omega(t - t_0)] + B_1 \sin[\Omega(t - t_0)] + A_2(t - t_0) \cos[2\Omega(t - t_0)] + B_2(t - t_0) \sin[2\Omega(t - t_0)] \quad [3.5]$$

siendo  $\Omega$  la frecuencia orbital,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$  coeficientes específicos para cada traza del satélite en el conjunto de trazas colineales<sup>8</sup> y  $(t - t_0)$  el tiempo relativo al centro de cada trayectoria.

- Entre los errores instrumentales que afectan a la altura medida por el altímetro se encuentran: el error debido a la deriva de la frecuencia del oscilador, los debidos al efecto Doppler, a la diferencia entre los centros de fase de la antena del satélite y del propio satélite, los errores de calibración interna, etc. Generalmente, las alturas medidas por el altímetro se proporcionan a la comunidad científica ya corregidas de estos efectos. Además, entre los errores instrumentales se puede considerar el **sesgo debido al estado del mar** (SSB<sup>9</sup>), que afecta a la propagación de la señal a través de la atmósfera. Este efecto resulta, a su vez, de la combinación de los sesgos electromagnético (EM), del seguimiento y de rugosidad (p. ej., Chelton et al., 2001). En la práctica, la combinación de estos efectos para cada altímetro se estima en función de los parámetros del estado de mar: la **altura de la onda significativa** (SWH, expresada en m) y la **velocidad del viento** (WS, dada en m/s). Entre otros métodos, su determinación se puede llevar a cabo mediante la siguiente relación empírica entre SSB, SWH y WS (p. ej. Fernandes et al., 2006)

$$\text{SSB}(\text{en m}) = \text{SWH}(a_0 + a_1 \text{SWH} + a_2 \text{WS} + a_3 \text{WS}^2) \quad [3.6]$$

con los coeficientes  $a_i$  estimados, mediante un ajuste mínimo cuadrático del modelo, con los datos del sensor para un periodo determinado (Gaspar et al., 1994; 1996; Chambers et al., 2003b). Para el altímetro TOPEX estos son:  $a_0 = 0,0029$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0,0038$  y  $a_3 = -0,00015$ , (**modelo de Walsh**, Callahan, 1993), mientras que para el altímetro Poseidón:  $a_0 = 0,047$ ,  $a_1 = -0,001$ ,  $a_2 = 0,0023$  y  $a_3 = -0,000112$  (**modelo BM4**, Gaspar et al., 1994). La determinación de la velocidad del viento, WS, se lleva a cabo mediante el modelo definido por Witter y Chelton (1991)

$$\text{WS}(\text{en m/s}) = \sum_{n=0}^4 a_n (\sigma_{ob})^n \quad [3.7]$$

donde  $\sigma_{ob}$  es un coeficiente de retrodispersión sesgado,  $\sigma_{ob} = \sigma_0 + d\sigma$ , con  $d\sigma = -0,63$  dB para los altímetros TOPEX y Poseidón y el valor del parámetro  $\sigma_0$  y de los coeficientes polinomiales,  $a_n$ , obtenidos a partir del modelo de velocidad del viento considerado (AVISO, 1996).

- El retardo ocasionado por la **propagación de la señal a través de la troposfera y de la ionosfera**, origina un incremento del valor de la altura de la ola calculada por el satélite y una disminución aparente de la altura de la superficie del mar respecto a un elipsoide de referencia (Tejera, 1996). La **corrección por efecto de la troposfera seca** (DRY) se lleva a cabo a partir de

<sup>8</sup> Se dicen **trazas o arcos colineales** a los datos de varios ciclos que produzcan la misma trayectoria en tierra.

<sup>9</sup> SSB acrónimo en inglés de **Sea State Bias**.

un *modelo teórico de atmósfera de Saastamoinen* (1972), obtenido mediante datos empíricos correspondientes a los distintos estratos que constituyen la estructura vertical atmosférica desarrollado por el *Fleet Numerical Oceanographic Center* (FNOC)

$$\text{DRY}(\text{en mm}) = -2,277 \cdot P_{\text{atm}} \cdot [1 + 0,0026 \cos(2\phi)] \quad [3.8]$$

con  $P_{\text{atm}}$  la presión atmosférica (en mbar) y  $\phi$  la latitud. El contenido total de vapor de agua en la troposfera, para la **corrección por el efecto de la troposfera húmeda** (WET), se estima a partir de un radiómetro de microondas a bordo del satélite. Por otra parte, los electrones libres de la ionosfera modifican el índice de refracción de forma proporcional al cuadrado de la frecuencia del radar. Este error se cuantifica considerando la ionosfera como un medio dispersivo y mediante altímetros que operan en dos frecuencias distintas, de tal forma que su efecto puede ser cancelado.

- La propagación de la señal está afectada también por otros fenómenos meteorológicos. Las **lluvias**, que atenúan los pulsos y reducen su reflexión sobre la superficie del océano, se detectan porque están asociadas a valores anómalos de la desviación estándar de las medidas altimétricas. El retardo introducido por las **nubes** se tiene mediante la expresión empírica (Rummel, 1993)

$$\delta h(\text{en cm}) = 0,1510^{-6} d_{\text{nb}} e_{\text{nb}} \quad [3.9]$$

siendo  $d_{\text{nb}}$  la densidad de la nube (en  $\text{kg/m}^3$ ) y  $e_{\text{nb}}$  su espesor (en m).

#### b) El Residual del Nivel del Mar y la Determinación de la Marea Oceánica

Una vez aplicadas las correcciones anteriores, el nivel del mar (esto es, la distancia desde la superficie instantánea del océano hasta el elipsoide de referencia) se obtiene restando la altura medida por el altímetro a la altitud del satélite, según la expresión [3.4]. Para determinar la marea oceánica, este nivel del mar debe corregirse de otros efectos geofísicos y, además, debe sustraerse una **superficie media** (MSS<sup>10</sup>), que represente la posición de la superficie del océano promediada sobre un periodo de tiempo adecuado.

Las fuerzas de marea originan deformaciones en la Tierra sólida y en los océanos. Estas últimas, a su vez, inducen deformaciones del fondo oceánico de sentido contrario a las provocadas por la marea terrestre. Por tanto, cuando se trata de estudiar la marea oceánica a partir de los datos altimétricos de satélite, es necesario realizar correcciones por el efecto de la **marea terrestre** ( $\zeta_{\text{mt}}$ ) y por el **EOI** ( $\zeta_{\text{mc}}$ ). Estas correcciones se realizan siguiendo los procedimientos descritos en los Capítulos 1 y 2. Resulta conveniente en este punto, con el fin de evitar confusiones en lo que sigue, recopilar las diferentes terminologías que se pueden encontrar en la literatura en relación con las fuerzas de marea. Es habitual denotar el efecto conjunto de la marea terrestre y la carga oceánica como **marea terrestre geocéntrica o del fondo** ( $\zeta_{\text{mf}} = \zeta_{\text{mt}} + \zeta_{\text{mc}}$ ). Asimismo, en ocasiones, se denota por **marea oceánica geocéntrica instantánea**,  $\zeta_{\text{mg}}$ , a la suma de las elevaciones del océano por la marea oceánica (como observada por un mareógrafo y relativa al fondo deformable) y por la marea

<sup>10</sup> MSS acrónimo en inglés de *Mean Sea Surface*.

del fondo  $\zeta_{mg} = \zeta_{mo} + \zeta_{mf}$ . Por tanto, mediante altimetría por satélite, únicamente se observa de forma directa a lo largo de las trazas en tierra del satélite  $\zeta_{mg}$ . En el procesado de los datos altimétricos, también es habitual encontrar definida una **marea altimétrica** que resulta de aplicar la corrección por marea terrestre a la marea oceánica geocéntrica instantánea,  $\zeta_{alt} = \zeta_{mg} - \zeta_{mt} = \zeta_{mo} + \zeta_{mc}$ .

Las variaciones de la presión atmosférica causadas por la fuerza generadora de marea que actúa sobre la atmósfera se conocen como **efecto de carga atmosférica**. Su corrección,  $\zeta_{ma\ (IB)}$ , puede llevarse a cabo de diversas maneras. Una de ellas se basa en la adopción de la hipótesis de **efecto barométrico inverso** (IB) (Gill, 1982), que usa una presión atmosférica constante sobre el océano

$$\zeta_{ma\ (IB)} \text{ (en mm)} = -9,948(P_{atm} - \bar{P}) \quad [3.10]$$

siendo  $\bar{P} = 1013,3$  mbar el valor medio de la presión atmosférica global y  $P_{atm}$  la presión atmosférica superficial, dada por

$$P_{atm} \text{ (en mbar)} = DRY / (-2,277(1 + 0,0026 \cos 2\phi)) \quad [3.11]$$

con  $\phi$  la latitud (en radianes) y DRY dada por [3.8]. En [3.10] el factor de escala introducido corresponde a un valor empírico del IB en latitudes medias (Wunsch, 1972).

Finalmente, según las recomendaciones del IERS en 1995, las correcciones por el **efecto de la marea del polo**, esto es el efecto gravitatorio del movimiento del polo, se aplican siguiendo el procedimiento descrito por Wahr (1985), mediante

$$\zeta_{mp} \text{ (en mm)} = -(\Omega^2 R_T^2 / 2g_0)(\pi/648.000)(1 + k_2) \sin(2\phi) \cdot [(x_p - \bar{x}_p) \cos \lambda - (y_p - \bar{y}_p) \sin \lambda] \quad [3.12]$$

con  $\Omega$  que denota la velocidad angular media de la rotación Tierra,  $R_T$  el radio terrestre,  $g_0$  la gravedad ecuatorial media,  $k_2$  es el número de Love adimensional de grado dos (Cap. 1, Secc. 1.2.2.1) y su valor ( $k_2 = 0,302$ ) es el calculado por Warh (1985).  $\bar{x}_p$  e  $\bar{y}_p$  son los valores medios de las coordenadas del polo  $x_p$  e  $y_p$ , (proporcionadas por el IERS), respectivamente, para la época de referencia correspondiente a la solución ITRF considerada.

Con las correcciones geofísicas aplicadas, una medida instantánea del nivel del mar estará compuesta por un nivel medio del mar estático, más una parte variable (Wang, 2004). Se define el **residual del nivel del mar** (SLA), como

$$h(\text{SLA}) = h(\text{SSH}) + \{\zeta_{mt} + \zeta_{mc} + \zeta_{ma\ (IB)} + \zeta_{mp}\} - h(\text{MSS}) \quad [3.13]$$

que representa la variabilidad del nivel del mar<sup>11</sup>. Puesto que la superficie media del nivel del mar es constante en el tiempo, la elección de un modelo determinado de MSS no tiene efecto sobre la variabilidad del nivel del mar (p. ej., Fenoglio, 2001). La parte variable del nivel de mar incluye las variaciones reales de la topografía oceánica causadas por movimientos del océano de diferentes escalas espaciales y temporales (p. ej., las corrientes oceánicas, fenómenos de naturaleza

<sup>11</sup> SLA acrónimo en inglés de *Sea Level Anomaly*.

mesoescalar<sup>12</sup>, ondas internas, la marea oceánica) y otros errores (como el error orbital residual o imprecisiones en las correcciones por el EM o en el modelo MMS considerado). Para eliminar estos errores orbitales residuales y los correspondientes a las superficies estáticas no eliminados previamente (en particular del MSS y de la ondulación del geoide) se utiliza el **ajuste colineal de datos altimétricos** (p. ej., Tejera, 1996; Rodríguez-Velasco, 1999). Este método se basa en la obtención de los niveles del mar de distintos ciclos del satélite exactamente en la misma posición, de tal forma que las partes estáticas se cancelen unas con otras. Puesto que los datos de diferentes ciclos no corresponden exactamente a la misma localización geográfica (debido a perturbaciones orbitales), el satélite muestreará diferentes perfiles de anomalías del geoide en diferentes ciclos. Entonces, se consideran los datos de varios ciclos que produzcan la misma traza en tierra, tomando como un mismo punto aquéllos que estén muy próximos entre sí (denotados por **localizaciones georeferenciadas**). En cada una de estas localizaciones georeferenciadas se toma la media de todas las repeticiones de los arcos colineales (denominado **arco de referencia**). Como este arco contiene la parte invariante de la señal, sustrayéndolo de todos los arcos colineales se obtienen las variaciones residuales. Dichas variaciones contendrán la variabilidad del nivel del mar, además de los errores de la órbita. Con estos valores residuales se hace un ajuste adecuado al tamaño del arco de un posible modelo del error. Para una zona pequeña, al tener el error orbital una longitud de onda larga, se consigue eliminar parte de su contribución. De esta forma, los residuales obtenidos están libres de errores orbitales radiales y, además, de la parte del error que depende de la posición geográfica.

### 3.3.1.2 El Problema del Enmascaramiento o Aliasing de la Señal de Marea

Uno de los principales inconvenientes de las observaciones procedentes de altimetría por satélite es el enmascaramiento o aliasing de las señales de corto periodo. Éstas no pueden resolverse a partir de las series temporales observadas debido al muestreo temporal del satélite. Para cada frecuencia de marea, el periodo de tiempo para el que se produce este enmascaramiento, denominado **periodo de aliasing**, depende de las características de la órbita y del periodo de repetición de las trazas en tierra del satélite. El enmascaramiento de la señal de los datos altimétricos está ampliamente tratado en la literatura (p. ej., Parke et al., 1987; Schlax y Chelton 1994; Andersen y Knudsen, 1997; Ray, 1997). Esta Sección se limita a presentar el problema de aliasing, los periodos de enmascaramiento y de separación de las principales ondas de marea oceánica.

Un satélite que se encuentre en rotación constante alrededor de la Tierra sobre una órbita repetitiva, con un periodo de  $T$  días, proporciona a lo largo de sus trazas en tierra una serie temporal de valores discretos con un intervalo de muestreo de  $T = \Delta t$  (días). Por ejemplo, con el satélite T/P se dispone de variaciones del nivel del mar en intervalos de 9,9156 días. Como esta frecuencia de muestreo tiene un periodo mayor que los de marea, en particular que los constituyentes diurnos y

---

<sup>12</sup> El periodo de tiempo en que se produce una perturbación oceánica caracteriza su variabilidad en el espacio. En particular, los fenómenos de naturaleza mesoescalar (eddies) se producen en periodos de tiempo del orden de  $10^4$ - $10^5$  s y dan lugar a una escala espacial de longitud del orden de  $10^3$ - $10^5$  m en horizontal y  $10^3$  m en vertical.

semi-diurnos, surge el problema del aliasing. Esto es, un constituyente de marea dado aparece como una señal con periodo mucho más largo que el intervalo de muestreo. Para un constituyente armónico de frecuencia  $f$ , su periodo de aliasing,  $T_a$ , puede calcularse mediante (Parke et al., 1987)

$$T_a = 1/(f - 2f_c n) \quad [3.14]$$

donde  $n$  denota la parte entera de la expresión  $(f\Delta t + 1/2)$  y  $f_c$  es la frecuencia de Nyquist, esto es

$$f_c = 1/2\Delta t \quad [3.15]$$

En el caso de los datos de satélites altimétricos, la capacidad de separar periodos de marea próximos entre sí se expresa por el criterio de Rayleigh (ecuación [1.59]) aplicado a los periodos de aliasing.

Por tanto, para la modelización de la marea oceánica a partir de altimetría por satélite será necesario considerar diversos criterios, como son la resolución espacial y temporal de los datos, su precisión y la frecuencia de la marea considera. En la Tabla 3.1 se resumen los intervalos de tiempo ( $T_d$ ) necesarios para separar los principales constituyentes de marea en el análisis de los datos T/P.

### 3.3.1.3 La Misión TOPEX/Poseidón

El satélite **TOPEX/POSEIDÓN** (Agosto, 1992 – Enero, 2006), se puso en órbita con una inclinación de  $66^\circ$  con respecto al ecuador y a una altitud de 1.336 km. El periodo de repetición de su órbita es de 9,9156 días y la separación de las trazas en el ecuador es de unos 315 km (en particular, de 300 km en el Mar Mediterráneo). La órbita presenta una serie de ventajas: Su inclinación permite cubrir las regiones oceánicas situados entre las latitudes  $\pm 66,039^\circ$  (Lefèvre, 2000). El periodo de repetición de la órbita, en tanto que disminuye los periodos de aliasing de los principales constituyentes de marea, favorece la estimación de la marea oceánica. Asimismo, el hecho de que la órbita sea prograda y no síncrona con el Sol, evita el enmascaramiento de diferentes componentes de marea de la misma frecuencia. Por otra parte, la altitud orbital del T/P minimiza las interacciones con la atmósfera de la Tierra y su campo de gravedad. Esto último, junto con las mejoras en los modelos de geopotencial, aumenta considerablemente la precisión de la órbita, pudiendo alcanzar entre 3 y 4 cm si se calcula con el modelo JGM-2<sup>13</sup>. Por otra parte, los errores en el rango de medidas de los altímetros TOPEX y Poseidón presentan un error medio cuadrático de 3,2 y 3,7 cm, respectivamente (Desai y Wahr, 1995), de tal forma que la precisión estimada del nivel del mar,  $h(\text{SSH})$ , para cada trayectoria en tierra del satélite es de unos 5 cm (Chelton et al., 2001; Fernandes et al., 2006). Debe señalarse que, durante el tiempo de operatividad de la misión T/P, ésta experimentó diversas

<sup>13</sup> Las efemérides precisas de órbita *Joint Gravity Model* JGM-2 (con 150 días de observaciones del T/P), calculadas por el GSFC y el CSR (Nerem et al., 1994), corresponden a un modelo de geopotencial calculado hasta el grado y orden 70. La determinación de los errores orbitales residuales (en la dirección radial) alcanzados con JGM-2 fueron de unos 3-4 cm para el satélite T/P (Callahan, 1993, Tapley et al., 1994; Smith et al., 1994) y de, aproximadamente, 13 cm para el satélite ERS-1 (Scharroo et al., 1994). Debe observarse que, antes de la utilización de JGM-2, la precisión de la órbita estimada de ERS-1, calculada con el modelo de geopotencial *Goddard Earth Model-T2* (GEM-T2), presentaba un EMC de hasta 150 cm (Andersen, 1995). Posteriormente, se publicaron las *Joint Gravity Model*, JGM-3 (Tapley et al., 1996), que presentan una serie de mejoras con respecto a sus dos versiones precedentes. Entre otras: el sistema de referencia terrestre, su campo de gravedad y el modelo de marea oceánica (Nerem et al., 1994). En la dirección radial, la precisión estimada de las órbitas precisas JGM-3 es de 2-3 cm en el océano abierto, aunque es bastante más impreciso en aguas someras.

modificaciones que deben tenerse en cuenta en el procesamiento de los datos: La primera tuvo lugar durante la etapa de verificación de la misión, en la que se detectaron algunos errores en los dispositivos del sistema de control que degradaban la calidad de los datos, que fueron rectificados durante el ciclo número 9 (Hayne et al., 1994; Fu et al., 1994; Desay y Warh, 1995). En Enero de 1999, al inicio del ciclo 236, se reemplazó el altímetro TOPEX Side A por TOPEX Side B. En Septiembre de 2002, durante los ciclos 365 a 368, el T/P se intercaló entre dos trazas adyacentes del satélite JASÓN-1, en lo que se conoce como *misión intercalada T/P* (Picot et al., 2003).

**TABLA 3.1:** Intervalo de tiempo necesario para la separación de las ondas de marea ( $T_a$ , en días, calculado según [1.59] para sus correspondientes periodos de aliasing) para el satélite T/P. En la diagonal se indica el periodo de aliasing de cada onda de marea ( $T_a$ , en días, según [3.14]).

Periodo de separación de ondas para el Satélite T/P (en días)								
	$M_2$	$S_2$	$N_2$	$K_2$	$K_1$	$O_1$	$P_1$	$Q_1$
$M_2$	62,107	1084	245	220	97	173	206	594
$S_2$		58,742	316	183	89	206	173	384
$N_2$			49,528	116	69	594	112	173
$K_2$				86,596	173	97	3355	349
$K_1$					173,192	62	183	116
$O_1$						45,714	94	134
$P_1$							88,891	316
$Q_1$								69,364

### 3.3.2 La Técnica de Asimilación de Datos en el Desarrollo de Modelos de Marea Oceánica

El fundamento esencial de la técnica de asimilación de datos (AD) es la combinación óptima de un modelo teórico, esto es, las leyes de la dinámica que rigen el sistema físico objeto de investigación, con un conjunto heterogéneo de datos observados, ambos bajo la consideración de sus respectivas incertidumbres. En particular, ésta es una metodología muy útil en las investigaciones de marea oceánica, ya que permite obtener estimaciones de la marea precisas y realistas (Robinson y Lermusiaux, 2001). En este contexto, la técnica de asimilación de datos fue introducida por Bennett y McIntosh (1982) y McIntosh y Bennett (1984). En estos trabajos los autores describen el procedimiento teórico que permite modificar el modelo hidrodinámico, que representa la información a priori, reduciendo las imprecisiones causadas por las imperfecciones en la batimetría, en la delimitación de la costa y en la modelización de los procesos de disipación haciendo uso, para ello, de datos observados.

En la modelización de la marea oceánica, un proceso de asimilación de datos involucra tres integrantes principales: un *conjunto de observaciones*, un *modelo hidrodinámico* y un *esquema de asimilación* (Robinson y Lermusiaux, 2001). Básicamente, este esquema de asimilación puede considerarse como una técnica para la combinación óptima de un modelo hidrodinámico y otro puramente empírico. El primero de ellos se obtiene a partir de las ecuaciones del movimiento del fluido y de las fuerzas conocidas. En el modelo empírico, los constituyentes de marea se determinan



a partir de medidas provenientes de diferentes fuentes, de calidad variable y recopiladas en distintos periodos de tiempo (Robertson et al., 1998; Egbert et al., 1994). El resultado, denominado **modelo inverso**, será una estimación óptima de las elevaciones de marea oceánica en la escala requerida, ya sea ésta espacial o temporal. Por la metodología empleada, los modelos de marea oceánica obtenidos mediante alguna técnica de asimilación de datos presentan una serie de ventajas frente a modelos puramente hidrodinámicos o puramente empíricos (p. ej., Reichle, 2008). Así, los modelos inversos presentan grandes ventajas frente a los modelos puramente empíricos, en lo que respecta a su cobertura y resolución. A pesar de que la resolución espacial de los datos altimétricos es muy superior a la proporcionada por los mareógrafos, en determinadas zonas, como las plataformas costeras o regiones de gran variabilidad oceánica, ésta aún no es suficiente como para determinar los parámetros de marea únicamente a partir de las medidas directas. En este sentido, un proceso de asimilación puede proporcionar información adicional para solventar tales deficiencias, a través de los constreñimientos físicos impuestos por el modelo hidrodinámico (p. ej. Khanta et al., 1995). A su vez, el proceso de asimilación permite validar la consistencia del modelo hidrodinámico con los datos existentes, e incluso entre las diferentes fuentes de datos observados. Por otra parte, los datos observados pueden subsanar deficiencias en la modelización hidrodinámica. En todas las situaciones anteriores, es fundamental que todos los errores sean tratados de manera adecuada, ya que:

- Las observaciones tienen errores provenientes de diferentes fuentes (el ruido instrumental o ambiental, el muestreo de los datos o la interpretación de las medidas del sensor).
- Todos los modelos hidrodinámicos son imperfectos, con errores que proceden de la aproximación explícita de los principios dinámicos y de la resolución numérica del modelo de cálculo. Ésta última, conlleva errores de truncamiento en las ecuaciones del modelo y de interpolación en la representación tierra/agua sobre la cuadrícula de integración. Además, estos modelos están muy influenciados por las imprecisiones en la batimetría y por las condiciones impuestas en sus fronteras (McIntosh y Bennett, 1984; Robinson y Lermusiaux, 2001).

Por tanto, el proceso de asimilación debe ser tal que los datos y la hidrodinámica se combinen utilizando pesos que estén inversamente relacionados con sus errores relativos (Reichle, 2008). De esta forma, la estimación final concordará con las observaciones, dentro de los límites establecidos por sus errores, y satisfará la hidrodinámica dentro de la limitación propia que imponen sus errores.

### **Métodos de resolución utilizados en la técnica de asimilación de datos**

Existe una gran variedad de metodologías utilizadas en los procesos de asimilación de datos en modelos teóricos. Habitualmente, puesto que todas ellas están relacionadas con técnicas de aproximación, se enmarcan clásicamente dentro de las teorías matemáticas de estimación y/o de control (Robinson y Lermusiaux, 2001). En el marco de la AD, la **Teoría de Estimación o Estimación Secuencial** se basa, fundamentalmente, en el cálculo de las *variables de estado* que caracterizan el sistema físico que se quiere modelar mediante la combinación de toda la información disponible sobre dicho sistema. En el marco de esta teoría, las aproximaciones más comunes son la

*estimación de máxima verosimilitud* y la *estimación bayesiana* (Jazwinski, 1970; Anderson y Moore, 1979; Cohn, 1997). En ambos casos los *filtros de Kalman* (Kalman y Bucy, 1961) constituyen, generalmente, el algoritmo clave en la estimación. Asimismo, dentro de la teoría de estimación también pueden encuadrarse los métodos conocidos como de *inserción directa*, *método blending* o el de *interpolación óptima*. Por otra parte, la **Teoría de Control** o **Aproximación Variacional** en la AD (Le Dimet y Talagrand, 1986), se basa en la realización de un ajuste global en el espacio y en el tiempo del modelo teórico con los datos mediante un suavizado. Éste se lleva a cabo minimizando una función coste, que cuantifica el desajuste entre la solución verdadera y los datos con el constreñimiento del modelo teórico y sus parámetros. El modelo teórico puede considerarse como un constreñimiento fuerte (asume que el modelo teórico es perfecto) o débil (se permiten correcciones al modelo teórico) (Sasaki, 1970). En este último caso, la formulación de constreñimiento débil en el método variacional conduce al denominado **Problema Inverso Generalizado** (GI)<sup>14</sup> (Tarantola, 1987). En particular, el *método de los representantes* (Bennett, 1992; 2002) y el del *adjunto variacional* es un algoritmo desarrollado para resolver este tipo de problemas GI.

A continuación se describen, brevemente y en el contexto de la modelización de la marea oceánica, algunos de los métodos citados anteriormente. Para una revisión detallada de las diferentes técnicas de asimilación remitimos a Daley (1991), Bennett (1992, 2002), McLaughlin (1995), Wunsch (1996), Bouttier y Courtier (1999), Swinbank et al. (2003). Más recientemente, Reichle (2008) realiza una introducción muy interesante a los métodos más modernos de asimilación de datos en Ciencias de la Tierra y sus aplicaciones. En el contexto propiamente de las investigaciones de marea oceánica se remite a los trabajos de Egbert y Bennett (1996) y Kivman (1997).

Los **Filtros de Kalman** (FK) (Gelb, 1974), para un modelo lineal, se incluyen entre los métodos de estimación óptima, en el sentido de que minimizan la norma de la matriz covarianza de los errores estimados. El procedimiento de este método se basa en el cálculo explícito de las covarianzas de error, mediante una ecuación matricial que propaga los errores desde un instante de tiempo al siguiente, sujetas a las posibles incertidumbres de la dinámica del modelo. Los principales inconvenientes de este método se deben a su gran complejidad numérica y carga computacional.

El **Método Blending** fue introducido en la modelización de la marea oceánica por Khanta (1995) y Matsumoto et al. (1995). Mediante este método, la elevación de marea en un instante de tiempo determinado se expresa como la suma ponderada de la elevación dada por el modelo y la observada. La ponderación se realiza a partir de valores constantes del error determinados mediante una serie de cálculos, ensayo y error, de tal forma que las soluciones obtenidas sean suaves en el espacio. Así, la

---

<sup>14</sup> En el contexto de las investigaciones de marea oceánica, Bennett (1992, 2002) describe la AD en términos de la teoría de inversión matemática de la siguiente forma: *Puesto que las variables de estado están, en principio, unívocamente determinadas por la dinámica del océano, la adición de datos de observación en la AD conlleva que estas variables se conviertan en cantidades sobredeterminadas. Si se consideran los errores de las medidas y de la dinámica como cantidades incógnita, que deben determinarse mediante la AD, el problema se convierte en este caso en indeterminado. Desde este punto de vista, la AD puede considerarse como una inversión generalizada.*

elevación obtenida se utiliza para el cálculo, en el siguiente paso de tiempo, de las componentes de velocidad de la marea oceánica (Matsumoto et al., 2000).

El **Método de Interpolación Óptima** (De Mey y Robinson, 1987; Dombrowsky y De Mey, 1992; De Mey, 1992), se basa en la búsqueda de las variables de estado óptimas, a partir de unas variables de estado *a priori*<sup>15</sup> distribuidas sobre una cuadrícula regular, junto con un conjunto de observaciones irregularmente espaciadas. Con este método se puede conseguir una convergencia robusta en periodos de tiempo largos (aunque con gran carga computacional), pero no así para periodos de tiempo cortos (Morrow y De Mey 1995).

El **Método de los Representantes** (Bennett, 1992 y 2002; Chua and Bennett, 2001) se enmarca dentro los métodos de asimilación variacional 4-dimensional de constreñimiento débil (p.ej. Talagrand y Courtier, 1987). Se basa en la estimación del modelo que mejor ajusta los datos observados dentro de su error. Además, este método permite estimar las fuentes de error del modelo obtenido a partir de un tratamiento estadístico adecuado sobre los errores dinámicos. Todo esto será ampliamente detallado en la Sección 3.4.2.

El **Método del Adjunto Variacional** (Moore, 1991; Morrow y De Mey, 1995) es un caso especial de método variacional e inverso generalizado, basado en la teoría de control óptimo (Thacker y Long, 1988). En aplicaciones oceanográficas se utiliza con mucha frecuencia para resolver problemas en el cálculo práctico, como pueden ser la optimización de parámetros o el establecimiento de condiciones iniciales y de frontera en el modelo (Xian-qing et al., 2004). Por una parte, hace uso explícito del estado actual de la dinámica del modelo y las medidas se utilizan para forzar directamente la dinámica (que se considera como un constreñimiento fuerte), sin necesidad de realizar un análisis separado de la distribución de los datos o de sus propiedades estadísticas. Por otra parte, este método trabaja como un método inverso global, es decir, los datos son consistentes en cualquier lugar. Esto conlleva una importante carga computacional que puede ser un factor restrictivo en el dominio espacio-tiempo en el que quiera resolverse. La minimización de la función coste en este método se lleva a cabo utilizando algún tipo de algoritmo descendiente, como el *de los gradientes conjugados* (Polak y Ribiere, 1969; Zahel, 1991) o el *de Newton o Quasi-Newton* (Gilbert y LeMaréchal, 1989).

### 3.3.3 Modelos Globales de Marea Oceánica

En la Tabla 3.2 se resumen las principales características de los modelos globales de marea oceánica utilizados con mayor frecuencia en las investigaciones relacionadas con el cálculo del EOI. La comparación de los modelos globales entre sí y su interpretación tiene una gran importancia debido al gran número de modelos existentes, basados en diferentes metodologías (hidrodinámicos, empíricos, etc.) y en conjuntos de datos dispares. Sobre la base de estas comparaciones, se han ido

---

<sup>15</sup> En la literatura es habitual encontrar también la expresión *background*. En ambos casos se hace referencia a una primera predicción de las variables de estado sin asimilación de datos.

seleccionando a lo largo del tiempo los modelos más adecuados a escala global. Así, el IERS establece y actualiza periódicamente los modelos estándar para, por ejemplo, procesar los datos de altimetría por satélite o las observaciones GPS. Pero, como la precisión de un modelo global varía de una región del océano a otra, la confrontación entre modelos debe realizarse, fundamentalmente, en las zonas de interés. Generalmente, las técnicas utilizadas para estimar la precisión de un modelo global se basan en: (1) La comparación con otros modelos globales, aunque debe señalarse que, como ponen de manifiesto King et al. (2005), la concordancia entre modelos no implica precisión. (2) La comparación directa con observaciones de marea oceánica procedentes de mareógrafos o de altimetría por satélite. (3) La comparación del EOI calculado a partir del modelo de marea oceánica con el observado mediante alguna técnica geodésica.

Para un estudio detallado de la exactitud de los modelos globales listados en la Tabla 3.2 se remite a Andersen et al. (1995), Melchior y Francis (1996), Shum et al. (1997), Llubes y Mazzega (1997) y Zahran et al. (2005), Urschl et al. (2005). A continuación se señalan algunos aspectos relevantes que han sido tomados en consideración en esta memoria.

### **El modelo SCH80**

El modelo desarrollado por Schwiderski (1978, 1980, 1983), brevemente descrito en la Secc. 3.2 y denotado por SCH80, ha sido durante décadas uno de los más utilizados, tanto en la predicción de mareas como en el cálculo del EOI. Entre sus inconvenientes se encuentran la no modelización de algunos mares cerrados (p. ej. el Mar Mediterráneo), su resolución y que no satisface la conservación de las masas de agua. Schwiderski (1983) estimó que, en el océano abierto, el error total de SCH80 es inferior a 10 cm, e incluso inferior a 5 cm para el constituyente  $M_2$ . Contradictoriamente, las comparaciones realizadas en numerosas ocasiones de SCH80 con observaciones mareográficas independientes muestran siempre discrepancias significativas. Por ejemplo, Woodworth (1985) estimó una precisión, en las zonas donde el modelo no está constreñido por observaciones, de 15 cm y Cartwright y Ray (1990; 1991) determinaron una desviación estándar de 4,2 cm para la onda  $M_2$  y 2 cm para  $S_2$ ,  $K_1$  y  $O_1$ . Sauvaget et al. (2000), determinaron una precisión media del orden de 6 cm.

### **Los modelos CR91 y RSC94**

El modelo **CR91** (Cartwright y Ray, 1990; 1991) es uno de los primeros modelos de marea empíricos elaborado a partir de datos procedentes de altimetría por satélite. El principal inconveniente de CR91 proviene, por una parte, de los errores originados por el enmascaramiento de las señales de marea  $S_2$  y  $K_1$ , debido al periodo de repetición de la órbita del satélite GEOSAT (17 días) y, por otra parte, de los errores orbitales (del orden de 35 a 50 cm) (Le Provost et al., 1994). Shum et al. (1997) estimaron que la precisión de este modelo se encuentra en torno a 4,5 cm, mientras que Ray (1993) señaló las importantes diferencias existentes con respecto SCH80 (que exceden los 10 cm e incluso superiores en áreas). Destacar, además, que a pesar de que CR91 cubría el Mar Mediterráneo, los resultados para esta zona no eran buenos, ya que no se consideraba la región comprendida entre el Estrecho de Gibraltar y el meridiano  $0^\circ$  y, además, las amplitudes

obtenidas para el armónico  $M_2$  eran demasiado altas (en el rango de 11-18 cm para la región comprendida entre las longitudes 0°-10° E). Con respecto al modelo **RSC94** (Ray et al., 1994) debe señalarse que no incluyó el Mar Mediterráneo.

### La serie de modelos FES

La serie de modelos FES (*Finite Element Solution*), desarrollada por el grupo francés “*Modélisation des Ecoulements Océaniques à Moyenne et Grande Échelle*” (Legos y CLS Space Oceanography Division), se caracteriza por emplear elementos finitos para la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas. Esta técnica se basa en dividir la geometría en la que se quiere resolver el sistema de ecuaciones hidrodinámicas en elementos pequeños y de tamaño variable, que se asigna atendiendo a criterios geométricos o físicos. La versión **FES94.1** (Le Provost et al., 1994) es un modelo puramente hidrodinámico, basado en las ecuaciones barotrópicas de aguas poco profundas no lineales. Las imprecisiones en este modelo se deben, en su mayor parte, a la limitación de la modelización hidrodinámica que, a su vez, presenta poca precisión en la batimetría. Le Provost et al. (1995) compararon FES94.1 con el primer modelo obtenido a partir de datos del satélite T/P, el SR95.1 y los resultados indican que FES94.1 contiene errores importantes, que son del orden de 6 cm en amplitud para la onda  $M_2$  y de unos pocos cm para el resto de constituyentes. Según Sauvaget et al. (2000) la precisión media del modelo es de 3 cm. Por otra parte, **FES99** (Lefèvre et al., 2002) y **FES2004** (Lyard et al., 2004) se desarrollaron, a partir de la asimilación de datos (medidas mareográficas y de altimétrica por satélite) en un modelo hidrodinámico, mediante el método de los representantes (Egbert et al., 1994). Lyard et al. (2006) determinan, a partir de la comparación con medidas altimétricas procedentes de ENVISAT, que la precisión de FES2004 es un 7% superior a la de FES99 (un 23% en aguas someras). A pesar de este aumento en la precisión, Lyard et al. (2006) y Pairaut et al. (2008) señalan que sobre plataformas y áreas costeras la precisión de FES2004 tiende a degradarse, ya que su resolución espacial aun no es suficiente.

### La serie de modelos CSR

Esta serie desarrollada en el *Center for Space Research* de la Universidad de Tejas (Austin), se caracteriza, principalmente, por la utilización de datos altimétricos T/P. Debe destacarse que los modelos CSR presentan un inconveniente importante. La cuadrícula espacial en la que se distribuyen presenta a lo largo de las costas mundiales, continentales e insulares, celdas establecidas como agua, con sus valores correspondientes de marea, cuando en realidad se encuentran situadas sobre tierra (Bos y Baker, 2005). Este hecho, que se pondrá de manifiesto en los Capítulos 5 y 6, afecta significativamente a los resultados del EOI calculado cuando se utiliza este modelo.

### La serie de modelos GOT

Se inicia con el modelo **SR95.1** (Schrama y Ray, 1994), que tenía como fin confirmar la validez de los datos T/P (para los 12 primeros meses de observación) para mejorar el desarrollo de los modelos globales de marea. Los autores de este modelo determinan, mediante la comparación con

observaciones, un EMC de las diferencias de 2,63 cm. El modelo **GOT00.2** (Ray, 1999)<sup>16</sup>, que es un ajuste de las longitudes de onda larga del modelo puramente hidrodinámico FES94.1 a partir de observaciones T/P (ERS-1 y ERS-2 en mares poco profundos y regiones polares), fue recomendado, junto a FES99, en las convenciones establecidas por el IERS el año 2000 (McCarthy, 2003). Ray y Egbert (2008) estiman, a partir de la comparación con observaciones mareográficas, EMC de 1,5 cm y 0,9 cm en el océano abierto para  $M_2$  y  $O_1$ , respectivamente. En aguas someras, su precisión es cuatro veces inferior a la que tiene en aguas profundas (el EMC excede los 10 cm).

### **Los Modelos ORI96 y NAO.99b**

Son dos modelos globales independientes desarrollados en el *Ocean Research Institute*, de la Universidad Tokio. **ORI96** (Matsumoto et al., 1995) se basa en la incorporación de tres años de observaciones T/P en un modelo hidrodinámico, mediante un esquema de interpolación hidrodinámica similar al desarrollado por Schwiderski (1978, 1980), mientras que **NAO.99b** (Matsumoto et al., 2000) asimila 5 años de observaciones T/P mediante la técnica de asimilación de datos denominada como *método blending* (Secc. 3.3.2). Según Matsumoto et al. (2000), en áreas de aguas poco profundas NAO.99b reduce los errores de CSR4.0 y GOT.99b. Las diferencias entre los tres modelos en aguas someras, como la plataforma continental europea, superan los 5 cm.

### **La serie de modelos TPXO (Oregon State University, OSU)**

Esta serie de modelos se basa en la obtención de la solución global de marea oceánica que mejor ajusta la dinámica, obtenida a partir de las LTE, y los datos observados (Egbert et al., 1994). Las versiones **TPXO.2** (Egbert et al., 1994), **TPXO.3** (Egbert, 1997) y **TPXO.4** (Egbert y Ray, 2000) se construyeron a partir de una selección homogénea de medidas altimétricas en puntos de cruce de las trazas en tierra del satélite T/P, mientras que **TPXO.5** (Egbert y Ray, 2000) utilizó, por primera vez, observaciones mareográficas. Hasta la fecha, las sucesivas actualizaciones de los modelos TPXO incluyen diversas mejoras en metodología de asimilación de datos e incorporan nuevos datos altimétricos y mareográficos y diversas mejoras en determinadas regiones oceánicas. La versión 7.0 incluye datos procedentes de JASÓN-1 y la número 7.2 incorpora, por primera vez, datos procedentes de la misión GRACE. Además, se distribuyen una serie de modelos regionales, basados en la misma metodología, denominados **soluciones regionales OSU TDB**. Estas soluciones incluyen, por ejemplo, un modelo para el Mar Mediterráneo, de resolución  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$ , para los 4 constituyentes de marea principales. En este caso, como ponen de manifiesto Martin et al. (2009), el modelo presenta una serie de limitaciones debidas a diversos factores (p. ej., imprecisiones en la batimetría). Su precisión en zonas costeras, donde la escala de longitud espacial de la marea es más pequeña y su variación más grande, es considerablemente inferior a la del océano abierto.

---

<sup>16</sup> La versión más reciente de esta series de modelos es **GOT4.7** (Com. personal R. Ray, 2008).

**TABLA 3.2: Resumen de los principales modelos globales de marea oceánica.** Se indica su nombre, dominio, resolución de la cuadrícula oceánica y número de constituyentes. Se muestra, además, la metodología de desarrollo y el conjunto de datos altimétricos y/o mareográficos utilizados.

Nombre/Vers.		Dominio		Resolución	Nº Const.	Datos <sup>(5)</sup>		Método <sup>(8)</sup>	Antecedentes <sup>(9)</sup>
		Latitud	Med <sup>(1)</sup>			ALTIM	MAREOG		
SCH80		±90°	No	1°×1°	11+5 <sup>(3)</sup>	No	Sí	IH (L)	No
CR91		±69°	Sí	1°×1,5°	60 <sup>(4)</sup>	GEO	No	E (RES, O)	No
RSC94		±65°	Sí	1°×1°	60 <sup>(4)</sup>	TP	Sí	E (RES, O)	No
DW95		±66°	Sí	1°×1°	60 <sup>(4)</sup>	TP	No	E (RES, O)	No
ORI96		±90°	Sí	0,5°×0,5°	8+8 <sup>(3)</sup>	TP	No	IH (L)	No
NAO.99b		-83°/90°	Sí	0,5°×0,5°	16	TP	No	EA (NUD, L)	NAO.99L
AG	95.1	±90° <sup>(2)</sup>	Sí	0,5°×0,5°	13	TP	Sí <sup>(6)</sup>	E (RES, O)	FES94
	2006	-85°/90°	No	0,25°×0,25°	13	TP/JAS1/GFO/ERS/ENV		---	---
SR	95.1	±90°	No	0,5°×0,5°	5	TP	No	E (HAR)	FES94
GOT	99.2b	±90°	---	0,5°×0,5°	8	TP	No	E (HAR)	FES94
	00.2	±90°	---	0,5°×0,5°	8	TP/ERS	No	E (HAR)	FES94
	4.7	±90°	---	0,5°×0,5°	10	TP/JAS1/GFO/ERS		---	---
CSR	2.0	±90° <sup>(2)</sup>	---	1°×1°	60 <sup>(4)</sup>	TP	No	E (RES, O)	FES94/CR91/SCH80
	3.0	-78°/90°	Sí	0,5°×0,5°	60 <sup>(4)</sup>	TP	No	E (RES, O)	AG95/FES94
	4.0	±90°	Sí	0,5°×0,5°	16	TP	No	E (RES, O)	FES94
TPXO	2.0	-80°/70°	Sí	0,58°×0,7°	8+9 <sup>(3)</sup>	TP	No	EA (L)	No
	3.0	-80°/70°	Sí	0,58°×0,7°	8	TP	No	EA (L)	No
	5.0	-86°/70°	---	0,5°×0,5°	10	TP	No	EA (L)	No
	6.2	±90°	---	0,25°×0,25°	10	TP/ERS	Sí	EA (L)	No
	7.1	±90°	---	0,25°×0,25°	10	TP/ERS/JAS1	Sí	EA (L)	No
FES	94.1	±90°	Sí	0,5°×0,5°	8+5 <sup>(3)</sup>	No	Sí <sup>(7)</sup>	PH (NL), EF	No
	95	-85°/90°	Sí	0,5°×0,5°	8+18 <sup>(3)</sup>	TP	Sí <sup>(7)</sup>	EA (REP, NL), EF	FES94
	98	±90°	---	0,25°×0,25°	7	No	Sí	PH, EF	No
	99	-86°/90°	---	0,25°×0,25°	8+19 <sup>(3)</sup>	TP	Sí	EA (NL), EF	No
	2000	---	---	0,25°×0,25°	---	TP/ERS	Sí	---	---
	2004	±90°	Sí	0,125°×0,125°	14	TP/ERS	Sí	EA (NL), EF	No
EOT	08a	±90°	Sí	0,125°×0,125°	9	TP, ERS, ENV, JAS1, GFO	No	E(RES)	FES2004

Continúa en la página siguiente

- (1) Se indica si el modelo incluye el Mar **Mediterráneo**.
- (2) AG95.1 cubre el área delimitada por las latitudes  $\pm 65^\circ$ , fuera de las cuales corresponde a FES94.1. CSR2.0 cubre el área delimitada por las latitudes  $\pm 66^\circ$ , fuera de las cuales corresponde parcialmente a CR91 y a SCH80. EOT08a es idéntico a FES2004 a partir de las latitudes  $\pm 75^\circ$ .
- (3) Constituyentes adicionales inferidos mediante la función de transferencia.
- (4) Número de constituyentes incluidos en el potencial generador de marea para el *método de respuesta*.
- (5) Datos incluidos en el modelo procedentes de: ALTIM = Altimetría por satélite (GEO = GEOSAT, TP = TOPEX/Poseidón, JAS=JASÓN-1, ENV = ENVISAT, GFO = GEOSAT Follow-On), MAREOG = Mareógrafos.
- (6) Los datos mareográficos considerados corresponden a los del modelo FES94.1, ver Nota (7).
- (7) Datos mareográficos restringidos a las fronteras entre subdominios.
- (8) Método de construcción: PH = Puramente Hidrodinámico, IH = Interpolación Hidrodinámica, E = Empírico, EA = Asimilación de datos en modelo hidrodinámico. Cuando corresponde se indica, además: La hipótesis hidrodinámica (L = Lineal, NL = No Lineal), El método de análisis en la aproximación empírica (RES = de Respuesta, O = Aproximación de Ortomarea, HAR = Armónico), la técnica de asimilación de datos (REP = Representantes, NUD = Nudging) y si el modelo es de Elementos Finitos (EF).
- (9) Si el modelo global se basa en uno previo (ya sea como condiciones de frontera, para interpolación hidrodinámica o datos considerados).

### **3.4 Desarrollo de un Modelo de Marea Oceánica Mediante la Técnica de Asimilación de Datos**

La metodología seguida para la construcción de un modelo de marea oceánica se basa en la asimilación de datos (AD). Como se describió en la Sección 3.3.2 cualquier técnica de AD comprende un conjunto de observaciones, un modelo hidrodinámico y un esquema para la asimilación de datos. En este caso:

- El conjunto de observaciones corresponde a las elevaciones del nivel del mar, obtenidas a partir de medidas mareográficas y de altimetría por satélite.
- El modelo hidrodinámico se obtiene, en el apartado Secc. 3.4.1, mediante la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas 2D, en sus forma lineal y no lineal.
- El esquema de asimilación de datos corresponde, esencialmente, al método de los representantes (Bennett, 1992; 2002). La descripción del método y su implementación numérica se presentará en el apartado 3.4.2. El apartado 3.4.3 se dedicará, íntegramente, al estudio y asignación a priori de los errores en el modelo hidrodinámico y en los datos observados, que actuarán como pesos en el esquema de AD.



- Una de las principales ventajas de este método es la posibilidad de realizar a posteriori estudios estadísticos de los errores en el modelo inverso, sobre la base de las hipótesis consideradas en el esquema de AD (se realizará en los Cap. 4 y 5).

### 3.4.1 Desarrollo del Modelo Hidrodinámico Numérico

La *dinámica del océano*, entendida como el comportamiento físico de las aguas de los océanos bajo la influencia de las fuerzas que producen aceleración, como la fuerza generadora de marea, se describe en términos de un conjunto de *ecuaciones hidrodinámicas*. Estas ecuaciones comprenden las leyes básicas y principios de la física oceánica, que involucran las variables que caracterizan el estado del mar y su evolución en el tiempo (Robinson y Lermusiaux, 2001; Pugh, 1987).

En esta Sección se presenta el sistema bidimensional de ecuaciones que describe el fenómeno de marea oceánica, denominado *ecuaciones de aguas poco profundas* (SWE, acrónimo en inglés de *Shallow Water Equations*). La hipótesis de aguas poco profundas se justifica, como se detallará en lo que sigue, por el hecho de que la respuesta del océano a la fuerza de marea corresponde a la clase de movimiento conocido como ondas de gravedad largas (p. ej., Lynch, 1983; Leendertse, 1967).

#### 3.4.1.1 El Sistema de Ecuaciones de Aguas Poco Profundas

El modelo hidrodinámico que se va a describir se basa en la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas, barotrópicas, no lineales, promediadas en profundidad (p. ej., Robertson et al., 1998; Kowalik y Polyakov, 1998; Gill, 1982). Este sistema de ecuaciones, que por simplicidad se denotará como 2D-SWE, se obtiene de este modo:

- Promediando en el tiempo las ecuaciones en tres dimensiones de Navier-Stokes para un flujo turbulento. El carácter turbulento del flujo se introduce mediante la conocida como *descomposición de Reynolds*<sup>17</sup>, que consiste en considerar las componentes de la velocidad y la presión compuestas de una cantidad promedio en el tiempo, más un término de fluctuación turbulenta. A su vez, la *hipótesis de Boussinesq*<sup>18</sup> (Boussinesq, 1877) permite obtener expresiones para los términos provenientes de las fluctuaciones turbulentas, denominados *tensiones de Reynolds*, relacionando dichos términos con el gradiente de la velocidad mediante un factor de escala denominado *viscosidad cinemática turbulenta*. El sistema de ecuaciones así obtenido, junto con la conservación de masas, sujetos ambos a diversas hipótesis adicionales, se denotan frecuentemente por *ecuaciones de Reynolds 3D para flujos turbulentos*<sup>19</sup>.
- Por otra parte, se tienen en cuenta las siguientes hipótesis:
  - i) La *hipótesis de aguas someras* que asume, por un lado, que la escala característica de la longitud horizontal del movimiento es mucho mayor que su longitud vertical característica (esta condición se conoce como *hipótesis de ondas largas*) y, por otro lado, que la

<sup>17</sup> Ecuación [C.31], Apéndice 1.

<sup>18</sup> Ecuación [C.34] y [C.35], Apéndice 1.

<sup>19</sup> Ecuación [C.37], Apéndice 1.

componente vertical de la velocidad es pequeña en comparación con sus componentes horizontales<sup>20</sup>. Puesto que las escalas de la marea oceánica son las propias de las ondas largas, la hipótesis de aguas poco profundas es adecuada para la modelización de este fenómeno (González et al., 1995).

ii) La *aproximación de Boussinesq*, según la cual las variaciones en la densidad del océano son tan pequeñas que ésta puede considerarse constante<sup>21</sup>, excepto en los términos donde interviene la aceleración de la gravedad (p. ej., Broomans, 2002).

iii) La *aproximación hidrostática*, por la que los únicos términos que intervienen en la ecuación del momento en la dirección vertical son la gravedad y los gradientes de presión<sup>22</sup>.

Con las hipótesis anteriores, las ecuaciones genéricas del momento se reducen a sus dos componentes horizontales y el flujo es, por tanto, bidimensional. Las ecuaciones de Reynolds 3D (que comprenden ahora la conservación del momento y las dos componentes horizontales del movimiento) pueden integrarse en la dirección vertical, desde el fondo oceánico hasta la superficie libre, dando lugar a las *ecuaciones de Reynolds 2D para flujos turbulentos*<sup>23</sup>.

Además, los términos turbulentos comprenden:

- i) Una tensión tangencial que actúa sobre el fondo oceánico<sup>24</sup>, esto es, la fricción causada por el rozamiento del flujo con el fondo marino y que se considera a través de algún tipo de parametrización.
- ii) Una turbulencia que representa, principalmente, los efectos de las corrientes oceánicas que se manifiestan a una escala inferior al tamaño de la cuadrícula espacial adoptada para la resolución de las ecuaciones.

En ambos casos, para que el sistema de ecuaciones quede completamente determinado, se requiere la especificación de dos coeficientes: uno es el coeficiente de arrastre para la fricción con el fondo (o la velocidad de fricción, si se considera una parametrización lineal de este efecto) y, el segundo coeficiente, es el correspondiente a la viscosidad turbulenta horizontal.

- Finalmente, se incorporan en las ecuaciones las fuerzas de marea que actúan sobre el océano, incluyendo las perturbaciones causadas por la marea terrestre y el efecto de carga provocada por la marea oceánica.

---

<sup>20</sup> La hipótesis de aguas someras conlleva que las partículas de agua se desplazan sobre una misma vertical a igual velocidad (en módulo, dirección y sentido). Por tanto, las componentes horizontales de la velocidad son independientes de la vertical (lo que satisface el teorema de Taylor-Proudman de flujo bidimensional, Pedlosky, 1987). En el océano abierto esta hipótesis está justificada, ya que éste constituye una fina capa de fluido sobre la superficie terrestre (la profundidad media del océano es del orden de 4 km, mientras que sus dimensiones horizontales son de miles de kilómetros (Lefevre, 2000). Además, la hipótesis de aguas someras excluye la descripción de fenómenos de longitud de onda corta donde las aceleraciones verticales son significativas.

<sup>21</sup> Entonces la cantidad de volumen y de masa también permanecerán constantes e independientes de la presión.

<sup>22</sup> Esta aproximación está justificada por las dos hipótesis anteriores. Además, se desprecia el gradiente de presión horizontal debido a las diferencias de densidad en la dirección horizontal (término baroclínico) y la contribución de la presión atmosférica. La ecuación de la distribución de presión hidrostática viene dada por [C.40] (en Apéndice 1).

<sup>23</sup> Las ecuaciones de Reynolds 2D puede expresarse de cualquiera de las formas [C.69] a [C.74] descritas en Apéndice 1.

<sup>24</sup> Se desprecia las tensiones que actúan sobre la superficie libre del océano como, p. ej., la acción del viento.

En el Apéndice 1 (Secc. C) se describen detalladamente los fundamentos esenciales, aproximaciones e hipótesis para la obtención de un modelo clásico de aguas someras, que se han reseñado anteriormente. En lo que sigue, se presentan las ecuaciones 2D-SWE promediadas en profundidad (esto es, integradas en la dirección de la vertical), describiendo brevemente los términos involucrados y los parámetros y constantes considerados.

### Formulación de las Ecuaciones

En el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \lambda, \phi)$ , con  $\lambda$  y  $\phi$  positivos en la dirección Este y Norte, respectivamente, y la coordenada radial  $r$  constante e igual al radio medio terrestre (Fig. 3.1), las ecuaciones 2D-SWE se expresan de la forma ([C.76], Apéndice 1)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu) + \frac{\partial}{\partial \phi} (Hv \cos \phi) \right\} = 0 \quad [3.16]$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial (Hu)}{\partial t}}_{\text{Aceleración local}} + \underbrace{\frac{1}{R_T \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu^2) + \frac{\partial}{\partial \phi} (Huv \cos \phi) \right\}}_{\text{Aceleración convectiva}} - \frac{Huv}{R_T} \tan \phi = \\ & = \underbrace{fHv}_{\text{F. Coriolis}} - \underbrace{\frac{gH}{R_T \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \zeta - \frac{\Gamma}{g} + \delta \right]}_{\text{Gradiente de presión + Fuerzas de marea}} - \underbrace{\frac{F_\lambda}{H}}_{\text{Fricción}} + \underbrace{\frac{M_\lambda}{H}}_{\text{Viscosidad}} \end{aligned} \quad [3.17]$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial (Hv)}{\partial t}}_{\text{Aceleración local}} + \underbrace{\frac{1}{R_T \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (Huv) + \frac{\partial}{\partial \phi} (Hv^2 \cos \phi) \right\}}_{\text{Aceleración convectiva}} + \frac{Hu^2}{R_T} \tan \phi = \\ & = \underbrace{-fHu}_{\text{F. Coriolis}} - \underbrace{\frac{gH}{R_T} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \zeta - \frac{\Gamma}{g} + \delta \right]}_{\text{Gradiente de presión + Fuerzas de marea}} - \underbrace{\frac{F_\phi}{H}}_{\text{Fricción}} + \underbrace{\frac{M_\phi}{H}}_{\text{Viscosidad}} \end{aligned} \quad [3.18]$$

Equivalentemente, en notación con operadores

$$\begin{cases} \zeta_t + \nabla \cdot (\mathbf{U}) = 0 \\ \mathbf{U}_t + \nabla (\mathbf{U}\mathbf{U}/H) = f\mathbf{k} \times \mathbf{U} - gH\nabla (\zeta - \zeta_{EQ} - \zeta_{SAL}) - \mathbf{F}/H + \mathbf{M} \end{cases} \quad [3.19]$$

En este sistema de ecuaciones, las variables de estado que caracterizan la marea oceánica son:

$\zeta(\lambda, \phi, t)$  La elevación de la marea oceánica<sup>25</sup> (en m). Esto es, la elevación de la superficie del agua sobre su nivel medio.

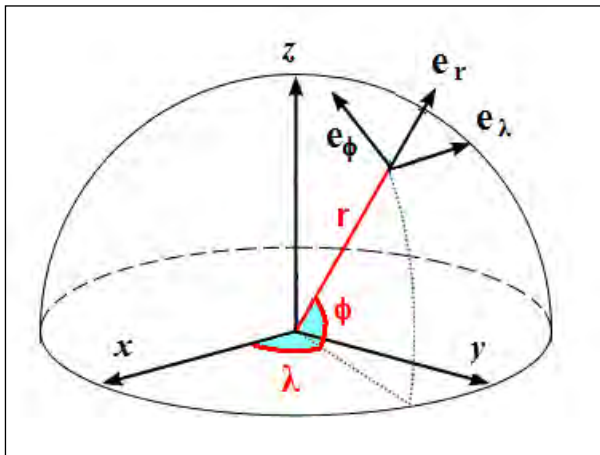
<sup>25</sup> En la Secc. 3.3.1 la marea oceánica se denotó por  $\zeta_{mo}$ . En adelante, por simplicidad, ésta se referirá por  $\zeta$ .

$u(\lambda, \phi, t)$  Las componentes horizontales del vector velocidad de la columna de agua promediado en profundidad,  $\mathbf{u}(\lambda, \phi, t)$ .  $u$  y  $v$  son, respectivamente, las componentes en la dirección Este y en la dirección Norte (en m/s)<sup>26</sup>.  $\mathbf{u}_t$  denota la derivada de la velocidad respecto del tiempo. Las expresiones anteriores puede considerarse, equivalentemente, en términos de las componentes horizontales del vector transporte del flujo de agua promediado en profundidad, esto es:

$$\mathbf{U} = H\mathbf{u}$$

Las componentes de  $\mathbf{U}$  en las direcciones zonal y meridional se denotan por  $U$  y  $V$ , respectivamente.

Tanto la elevación de la marea oceánica como las componentes horizontales de la velocidad son funciones del tiempo  $t$  (en s) y de la posición en el océano  $(\lambda, \phi)$ .



**FIGURA 3.1:** Convenciones utilizadas para el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \phi, \lambda)$  en el desarrollo de las 2D-SWE.

La ecuación [3.16] es la denominada *ecuación de continuidad*. Corresponde a la condición de conservación de masas, relacionando los cambios en la elevación de agua con los flujos netos de masa en una columna de agua<sup>27</sup>. Las ecuaciones [3.17] y [3.18] establecen la conservación de la cantidad de movimiento, de ahí el nombre de *ecuaciones de conservación del momento*. Relacionan, para cada componente, la aceleración del agua con las fuerzas que actúan sobre ella. En ellas, los símbolos utilizados denotan<sup>28</sup>:

$R_T$  El radio medio de la Tierra,  $R_T = 6.378.136,6$  m.

$h(\lambda, \phi)$  La profundidad del agua por debajo del nivel medio del mar (en m)<sup>29</sup>.

$H(\lambda, \phi, t)$  La profundidad total del océano (en m), esto es  $H(\lambda, \phi, t) = h(\lambda, \phi) + \zeta(\lambda, \phi, t)$

$f$  El parámetro de Coriolis (en  $s^{-1}$ ), dado por  $f = 2\omega \sin\phi$ , siendo  $\omega$  la velocidad angular de rotación de la Tierra  $\omega = 7.292.115 \times 10^{-11} s^{-1}$ . [3.21]

$\mathbf{k}$  El vector unitario en la dirección vertical, se considera positivo en la dirección del

<sup>26</sup> Propiamente,  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad promediadas en el tiempo e integradas en la dirección vertical ([C.32] y [C.50], Apéndice 1).

<sup>27</sup> La ecuación de continuidad promediada en la vertical, está sujeta a la hipótesis de fluido incompresible o bajo la aproximación de Boussinesq.

<sup>28</sup> Las constantes indicadas corresponden a las establecidas por el *IERS Numerical Standards* (McCarthy y Petit, 2003).

<sup>29</sup> Se considera que el fondo marino en reposo está especificado por alguna batimetría.

	cénit.
$g$	La aceleración de la gravedad, que toma un valor medio en el ecuador de $g = 9,7893278 \text{ m/s}^2$ .
$\Gamma$	El potencial generador de marea total, ( $\Gamma/g$ en m). [3.25]
$\delta$	Los desplazamientos verticales de la Tierra elástica inducidos por el potencial astronómico y la carga ejercida por la marea oceánica (en m). [3.26]
$\zeta_{EQ}$ y $\zeta_{SAL}$	La marea de equilibrio y la marea de carga y atracción oceánica, respectivamente (Tabla 3.3).
$\mathbf{F}$	$= (F_\lambda, F_\phi)$ . Las componentes en longitud y latitud del término de fricción con el fondo oceánico. [3.30] y [3.31]
$\mathbf{M}$	$= (M_\lambda, M_\phi)$ . La viscosidad turbulenta horizontal, expresada en sus componentes zonal y meridional. [3.33]
$\nabla$ y $\nabla \cdot$	Los operadores gradiente de un campo escalar y divergencia de un campo vectorial, respectivamente <sup>30</sup> .

A continuación se describe la representación física de cada uno de los términos, aceleraciones y fuerzas que actúan sobre el fluido en las ecuaciones de conservación del momento.

### (1) Aceleración del fluido con respecto al sistema de referencia fijo en la Tierra

$$\mathbf{U}_t + \nabla \left( \frac{\mathbf{U}\mathbf{U}}{H} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{U^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{UV}{H} \cos \phi \right) \right\} - \frac{UV}{R_T H} \tan \phi \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{UV}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{V^2}{H} \cos \phi \right) \right\} + \frac{U^2}{R_T H} \tan \phi \end{array} \right\} \quad [3.20]$$

El movimiento del océano está siempre referido a un punto fijo sobre la superficie terrestre en rotación, por tanto, este movimiento es siempre relativo. La aceleración del agua medida en este sistema en rotación, que corresponde a los términos situados en el miembro izquierdo de las ecuaciones [3.17] y [3.18], resulta de la suma de una aceleración local, que representa la variación de la velocidad con el tiempo en un punto fijo, y una aceleración inercial no lineal (o aceleración convectiva), que representa el efecto del transporte con el flujo del gradiente de la velocidad.

Generalmente, en el océano abierto los términos convectivos son despreciables, ya que tienen efectos de segundo orden sobre las variables (Tabla C.2, Apéndice 1). En zonas de aguas poco profundas estos términos no pueden despreciarse (Smith, 1999). Como los dos primeros términos convectivos no lineales en [3.20] son, regularmente, dos órdenes de magnitud más grandes que el tercero (término métrico procedente de la curvatura de la Tierra), éste último sí puede despreciarse (Kowalik, 1994).

### (2) Fuerza de Coriolis

$$f\mathbf{k} \times \mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{l} fV \\ -fU \end{array} \right\} \quad [3.21]$$

<sup>30</sup> En el Apéndice 1 se resumen los operadores diferenciales utilizados, en coordenadas cartesianas y esféricas.

La aceleración de Coriolis expresa, junto a la fuerza centrípeta, la restauración del equilibrio de fuerzas en el sistema de referencia relativo. Esta aceleración se expresa en términos del parámetro de Coriolis,  $f$ . En la expresión [3.21] se han despreciado los términos:

- $w \cos \phi$ , por ser la componente vertical de la velocidad,  $w$ , muy pequeña.
- $-2\omega \cos \phi$ , ya que su magnitud es varios órdenes inferior al resto de términos en las ecuaciones.

Por otra parte, debe señalarse que la fuerza centrípeta, que resulta de la transformación al sistema de ejes fijos en la Tierra, se engloba dentro de la fuerza gravitatoria. Además, la aceleración de la gravedad se considera constante,  $g = -g\mathbf{k}$ , con un valor de  $g \sim 9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

### (3) Gradiente de presión horizontal debido a las variaciones del nivel del mar y a las fuerzas generadoras de marea

$$-gH\nabla(\zeta - \zeta_{EQ} - \zeta_{SAL}) = \begin{Bmatrix} -(gH/R_T \cos \phi) \partial(\zeta - \Gamma/g + \delta)/\partial\lambda \\ -(gH/R_T) \partial(\zeta - \Gamma/g + \delta)/\partial\phi \end{Bmatrix} \quad [3.22]$$

El segundo término, en el miembro derecho de las ecuaciones de conservación del momento, corresponde al gradiente de presión horizontal debido a la variación del nivel del mar y a las fuerzas generadoras de marea, tanto directas como indirectas.

a) El gradiente de presión horizontal debido a la variación del nivel del mar:

$$-gH\nabla\zeta = \begin{Bmatrix} -(gH/R_T \cos \phi) \partial\zeta/\partial\lambda \\ -(gH/R_T) \partial\zeta/\partial\phi \end{Bmatrix} \quad [3.23]$$

El término del gradiente de presión en las ecuaciones 2D-SWE se limita a las diferencias en la elevación de la marea oceánica, esto es, la componente barotrópica del gradiente de presión horizontal. Este término proviene de la ecuación de la conservación de momento que, por la hipótesis de aguas poco profundas, se reduce en la dirección vertical a la presión hidrostática ([C.40], Apéndice 1). Asimismo, la aproximación de Boussinesq, por la cual se omiten todas las variaciones de densidad excepto cuando está multiplicada por la aceleración de la gravedad, permite despreciar la contribución baroclínica del gradiente de presión horizontal (que expresa las diferencias de densidad en la dirección horizontal). Además de lo anterior, se ha despreciado la contribución de la presión atmosférica.

b) Las fuerzas generadoras de marea:

$$-H\nabla(-\Gamma + g\delta) = \begin{Bmatrix} -(gH/R_T \cos \phi) \partial(-\Gamma/g + \delta)/\partial\lambda \\ -(gH/R_T) \partial(-\Gamma/g + \delta)/\partial\phi \end{Bmatrix} \quad [3.24]$$

Las fuerzas de marea que actúan sobre el océano comprenden las que derivan, por una parte, directamente del potencial astronómico de marea y, por otra parte, del potencial inducido por la marea oceánica. En ambos casos debe tenerse en cuenta, además, las variaciones causadas indirectamente en dichos potenciales por la deformación elástica terrestre. Así, en las ecuaciones de conservación del momento, [3.17] y [3.18],  $\Gamma$  denota el **potencial generador de marea total** (p. ej., Hendershott, 1981)

$$\Gamma = (1 + k_2)U_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k_n') g (R_T / M_T) P_n (\cos \psi) \quad [3.25]$$

que es la suma de:

- i) El potencial astronómico de marea debido al efecto directo de los planetas (p. ej., Pugh, 1987). Obsérvese que, puesto que la mayor contribución a este potencial procede de los términos de grado dos, se desprecian los términos de grado tres y superiores.
- ii) El potencial inducido por la deformación elástica de la Tierra sólida y la consecuente redistribución de masas. Según se definió en [1.36], este potencial es proporcional, grado a grado, al potencial astronómico de marea, con el factor de proporción dado por el número de Love  $k_n$ .
- iii) El potencial inducido por la carga ejercida por la marea oceánica, definido en [2.23].
- iv) El potencial adicional causado por la redistribución de masas originada por la deformación elástica terrestre bajo el peso de la marea oceánica, definida en [2.25]. En este caso, el potencial adicional es proporcional, grado a grado, al potencial inducido por la marea oceánica, con el factor de proporción dado por el número de Love de carga  $k_n'$ .

Adicionalmente, sobre la Tierra elástica habrá que considerar los **desplazamientos verticales**,  $\delta$ , (Munk y MacDonald, 1960)

$$\delta = h_2 U_2 / g + (R_T / M_T) \sum_{n=0}^{\infty} h_n' P_n (\cos \psi) \quad [3.26]$$

causados, a su vez, por:

- i) El potencial astronómico, en cuyo caso el desplazamiento viene dado por [1.34], y corresponde al primer sumando en [3.26].
- ii) El potencial inducido por la marea oceánica, que conlleva un potencial adicional proporcional al número de Love de carga  $h_n'$  (véase el término correspondiente en la ecuación [2.29] o [2.31]), y corresponde al segundo sumando en [3.26] (p. ej., Baker, 1984).

Así, la fuerza generadora de marea total viene expresada por

$$\nabla (-\Gamma + g\delta) = \nabla \left( -(1 + k_2 - h_2)U_2 - g R_T / M_T \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k_n' - h_n') P_n (\cos \psi) \right) \quad [3.27]$$

#### Cálculo del término de la marea de equilibrio:

Es habitual encontrar en la literatura el término  $(1 + k_2 - h_2)U_2/g$  en la ecuación [3.27] representado por el símbolo  $\zeta_{EQ}$ , denominado **marea de equilibrio**<sup>31</sup> (p. ej. Pugh, 1987; Hendershott, 1981; Cartwright, 1977), así como el término  $h_2 U_2 / g$  representado por  $\zeta_{mt}$ , es decir, la **marea terrestre** (Secc. 3.3.1). El cálculo del término de la marea de equilibrio se deduce analíticamente del potencial astronómico de marea y de los números de Love  $k_2$  y  $h_2$ .

<sup>31</sup>  $\zeta_{EQ}$  representa la marea de equilibrio inducida astronómicamente y modificada por el factor  $(1 + k_2 - h_2)$  que, como se trató en el Cap. 2, tiene en cuenta la deformación elástica de la tierra causada por el efecto de marea y la perturbación en el potencial gravitatorio resultante de esta deformación. Para evitar confusiones se han resumido en la Tabla 3.3 las notaciones y definiciones utilizadas en este Capítulo.

### Cálculo del término de la marea de carga y atracción oceánica:

Análogamente al caso anterior, es común encontrar en la literatura el término  $(R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k'_n - h'_n) P_n(\cos \psi)$  referido por  $\zeta_{SAL}$  y denominado **marea de carga y atracción oceánica**. Obsérvese que, en este caso, el desplazamiento radial  $(R_T/M_T) \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos \psi)$  se denotó en la Sección 3.3 por **marea de carga**  $\zeta_{mc}$ . El término  $\delta = \zeta_{mt} + \zeta_{mc}$  corresponde, por tanto, a la **marea del fondo**  $\zeta_{mf}$ . Siguiendo las notaciones introducidas, las fuerzas de marea que actúan sobre el océano, dadas por [3.24], pueden expresarse de la forma

$$-H \nabla (-\Gamma + g \delta) = g H \nabla (\zeta_{EQ} + \zeta_{SAL}) \quad [3.28]$$

En 1972, Hendershott puso de manifiesto la necesidad de incluir en la modelización hidrodinámica de la marea oceánica el término de carga y atracción oceánica ya que, aunque su amplitud es de, aproximadamente, sólo una décima parte de la amplitud de la marea oceánica, su gradiente introduce en las ecuaciones del momento una perturbación de un orden de magnitud (Hendershott, 1972; Gordoev et al., 1977; Arbic et al., 2004). En la práctica, el cálculo del término  $g \zeta_{SAL}$  puede realizarse (según se detalló en el Cap. 2) de dos formas diferentes:

- A través del *formalismo de convolución de la marea oceánica con la correspondiente función de Green* (Secc. 2.5.1). En este caso, se necesita un modelo preexistente de marea oceánica.
- Mediante el *formalismo del desarrollo en serie de armónicos esféricos*, según [2.85].

En ambos casos, el cálculo implícito de este término dentro de las ecuaciones hidrodinámicas resulta, por lo general, inviable, debido a limitaciones de cálculo computacional. Por esta razón, clásicamente se han utilizado dos aproximaciones:

- La primera, más simple, se basa en considerar el término  $\zeta_{SAL}$  proporcional a la propia elevación de la marea oceánica. Con este fin se introduce un factor de escala  $\beta$ , de forma que  $\zeta_{SAL} \sim \beta \zeta$ . Diversos autores han estimado esta constante mediante procesos iterativos basados, esencialmente, en lo siguiente: Se determina una primera estimación de la marea oceánica, denotada por  $\zeta_I$ , mediante la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas omitiendo el término  $\zeta_{SAL}$ . Con  $\zeta_I$ , se resuelven nuevamente las ecuaciones para obtener una estimación de  $\zeta_{SAL}$ , y así sucesivamente. Cabe señalar que esta aproximación implica la presunción de que los efectos de carga se encuentran necesariamente en fase con la marea oceánica (p. ej., Francis y Mazzega, 1990). Siguiendo este método Accad y Pekeris (1978) y Parke (1982) estimaron un valor para las ondas semi-diurnas  $\beta = 0,085$ . Posteriormente, Ray (1998) determinó un valor ligeramente más bajo que el anterior,  $\beta = 0,08$ , ya que consideró en los cálculos un modelo oceánico que incluía más zonas de aguas someras que los considerados previamente. Análogamente, Arbic et al. (2004) estimaron un factor  $\beta = 0,094$ , aunque restringieron sus cálculos a las zonas de aguas profundas. De los resultados anteriores, Ray (1998) y Arbic et al. (2004) concluyen que, en aguas profundas se requiere un factor de proporción más alto que reduzca los errores,



mientras que en zonas próximas a la costa este factor debe disminuir considerablemente. Estos resultados ponen de manifiesto que esta aproximación simple tiene implicaciones importantes en la modelización hidrodinámica y, por tanto, los autores cuestionan su adecuación. Más aun, Francis y Mazzega (1990) estiman que una evaluación inapropiada del término de carga y atracción oceánica, utilizando aproximaciones proporcionales a la elevación de la marea oceánica, introduce errores en los modelos de marea oceánica que alcanzan en amplitud valores del orden de 1 cm en el océano abierto y en el rango de 2 a 5 cm en zonas de plataforma continental. Además, los autores señalan que en estas zonas de aguas someras, las diferencias en fase son significativas y aumentan hasta alcanzar diferencias de varias decenas de grados en regiones adyacentes a puntos anfidrómicos.

- El segundo método, y más eficiente, se basa en la incorporación explícita del término  $\zeta_{SAL}$  en las ecuaciones hidrodinámicas a través de una solución pre-existente. Estas soluciones pueden calcularse, como se ha mencionado anteriormente, a partir del método de la convolución de las funciones de Green o mediante el método de desarrollo en armónicos esféricos. En particular, en este caso, dos argumentos justifican la utilización del segundo método: El primero, que las funciones de Green para la variación del potencial no se encuentran, hasta la fecha, tabuladas y publicadas por ningún autor<sup>32</sup>. El segundo, la rapidez de la convergencia de la series (Cap. 2).

**TABLA 3.3:** Notaciones utilizadas, en relación con las fuerzas generadoras de marea.

Nombre	Símbolo	Ecuación
Marea oceánica	$\zeta \equiv \zeta_{mo}$	
Marea terrestre	$\zeta_{mt}$	$= h_2 U_2 / g$
Marea de equilibrio	$\zeta_{EQ}$	$= (1 + k_2 - h_2) U_2 / g$
Marea de carga	$\zeta_{mc}$	$= (R_T / M_T) \sum_{n=0}^{\infty} h_n' P_n(\cos \psi)$
Marea del fondo	$\zeta_{mf} \equiv \delta$	$= \zeta_{mt} + \zeta_{mc}$
Marea oceánica geocéntrica instantánea	$\zeta_{mg}$	$= \zeta_{mo} + \zeta_{mf}$
Marea de carga y atracción oceánica	$\zeta_{SAL}$	$= (R_T / M_T) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + k_n' - h_n') P_n(\cos \psi)$
Marea altimétrica	$\zeta_{ma}$	$= \zeta_{mg} - \zeta_{mt} = \zeta_{mo} + \zeta_{mc}$

#### (4) Términos de disipación

Los términos de disipación en las ecuaciones del momento, [3.17] y [3.18], comprenden los efectos de la fricción con el fondo oceánico y de la viscosidad turbulenta horizontal<sup>33</sup>

$$-\mathbf{F}/H + \mathbf{M} = \left\{ \begin{array}{l} -F_{\lambda}/H + M_{\lambda} \\ -F_{\phi}/H + M_{\phi} \end{array} \right\} \quad [3.29]$$

Además de la fricción causada por el rozamiento del flujo oceánico con el fondo marino, existen otras fuerzas de fricción, como las causadas por el viento sobre la superficie del mar, que generalmente acelera el fluido, y por las diferencias en la densidad del agua entre capas, lo que origina una fricción interna. Ambos tipos de fricción se desprecian (véase Apéndice 1).

<sup>32</sup> Exceptuando Francis y Mazzega (1990), quienes publican unas funciones conexas.

<sup>33</sup> En el Apéndice 1 se deducen las expresiones correspondientes a los términos de disipación que aquí se introducen.

a) El término de fricción con el fondo oceánico:

El rozamiento o fricción del flujo de agua con el fondo oceánico ocasiona, además de una oposición a dicho flujo (que decelera su velocidad), una disipación de la energía por el movimiento (Pugh, 1987). Claramente, este efecto de fricción está directamente relacionado con la topografía del fondo oceánico y, por tanto, varía en el espacio y con la profundidad del agua. Así, en el caso de la elevación de la marea oceánica, la fricción con el fondo perturba su distribución espacial y su magnitud, ya que la disipación de la energía disminuye la amplitud de la onda de marea (Lu y Zhang, 2006; Arbic et al., 2004). En el océano abierto (en profundidades superiores a 1.000 m) los efectos causados por la fricción del fondo pueden considerarse despreciables, pero no así en aguas someras. En estas zonas de aguas poco profundas, donde las corrientes de marea son fuertes, la fricción del fondo es grande y produce términos no lineales en las componentes horizontales de la velocidad,  $u$  y  $v$ , inversamente proporcionales a la profundidad del agua (Davies et al., 1997). Más aún, para los principales constituyentes de marea, la no linealidad más significativa en las ecuaciones hidrodinámicas proviene del arrastre con el fondo oceánico.

Habitualmente, en la modelización de la marea oceánica, los efectos de la fricción del fondo se incluyen en las SWE a través de diferentes parametrizaciones, lineales o cuadráticas, mediante un coeficiente de arrastre. En cualquier caso, estas parametrizaciones constituyen sólo una aproximación a los procesos de disipación, ya que no se incluyen otros efectos, como la disipación efectiva de la marea barotrópica debido a la conversión baroclínica sobre la topografía (Andersen et al., 2006).

#### Parametrización cuadrática de la fricción con el fondo oceánico:

La fricción con el fondo oceánico puede incorporarse en las ecuaciones de conservación del momento mediante una **parametrización cuadrática**, consistente en un término cuadrático en las componentes horizontales del transporte,  $u$  y  $v$ , inversamente proporcional a la profundidad total del agua. Según esta parametrización, y denotando por  $|\mathbf{U}| = (U^2 + V^2)^{1/2}$ , los términos correspondientes a la fricción con el fondo oceánico en las ecuaciones [3.17] y [3.18],  $-F_\lambda/H$  y  $-F_\phi/H$ , se expresan de la forma (p. ej. Le Cann, 1990)

$$-\mathbf{F}/H = -C_b \mathbf{U}|\mathbf{U}|/H^2 = \{-C_b U|\mathbf{U}|/H^2, -C_b V|\mathbf{U}|/H^2\} \quad [3.30]$$

donde  $C_b$  es el **coeficiente de arrastre del fondo** (adimensional), o también denotado por **parámetro de disipación**. Este término presenta dos aspectos no lineales (p. ej. Parker, 1991):

- Uno, la parte cuadrática  $|\mathbf{U}|\mathbf{U}$  en el numerador, que causa una atenuación máxima y una velocidad de propagación mínima cuando el flujo entrante o saliente es máximo o mínimo.
- El segundo, la elevación de la marea oceánica  $\zeta$  en el denominador (recuérdese que  $H = h + \zeta$ ).

#### Parametrización lineal de la fricción con el fondo oceánico:

La fricción del fondo puede considerarse, también, a través de una parametrización lineal. En este caso, en la ecuación [3.30] se sustituye el término  $|\mathbf{U}|/H = (u^2 + v^2)^{1/2} = |\mathbf{u}|$  por un valor característico (adecuado a la zona de estudio)  $u_0 \equiv |\mathbf{u}|$  de tal forma que, denotando por  $r = C_b u_0$  el

**coeficiente de fricción lineal** (expresado en m/s) (o por  $\kappa = C_b u_0 / H = r/H$ )<sup>34</sup>, se tiene la siguiente **parametrización lineal de la fricción con el fondo** (p. ej. McInerney, 2005)

$$-\mathbf{F}/H = -C_b u_0 \mathbf{U}/H = -r\mathbf{U}/H = \{-ru, -rv\} = \{-\kappa U, -\kappa V\} \quad [3.31]$$

El parámetro  $u_0$ , denominado **velocidad de fricción**, puede seleccionarse o bien constante en el dominio del modelo<sup>35</sup>, o bien variable en el espacio<sup>36</sup>. En este último caso, pueden utilizarse diferentes métodos para su determinación como, por ejemplo, el método de perturbación desarrollado por Le Provost et al. (1981) o a través de métodos iterativos como realizan Egbert y Erofeeva (2002) o Logutov y Lermusiaux (2008). Básicamente, en estos esquemas iterativos se considera inicialmente un valor  $u_0$  constante y se resuelven las ecuaciones hidrodinámicas lineales obteniendo una primera solución para las componentes horizontales de la marea oceánica. Con este modelo preliminar, las componentes de la velocidad se promedian en el tiempo y en función de la posición, para obtener una velocidad de fricción que será utilizada en una segunda resolución de las SWE.

#### Especificación del coeficiente de arrastre del fondo:

El coeficiente de fricción del fondo depende localmente de la naturaleza del fondo oceánico y su variación puede tener efectos considerables sobre la amplitud de la marea. Por esta razón, es importante tener en cuenta y analizar los diferentes métodos empleados para su determinación, tanto en la parametrización cuadrática como en la lineal del término de la fricción:

- $C_b$  constante en todo el dominio: En un gran número de aplicaciones, y en particular en la modelización de la marea oceánica a escalas global y regional, el coeficiente de arrastre en la parametrización cuadrática de la fricción con el fondo se considera constante en la región modelada (p. ej. Egbert et al., 2004). En este caso, su valor constante se determina empíricamente a partir de la comparación de un modelo de corrientes oceánicas con observaciones in-situ, para un mínimo de dos profundidades diferentes (p. ej., Foreman y Thomson, 1997). Generalmente, este coeficiente toma un valor comprendido entre  $1 \times 10^{-3}$  y  $3 \times 10^{-3}$  (Bills, 1992), siendo el valor más comúnmente utilizado en el océano abierto de  $C_b = 3 \times 10^{-3}$  (Le Provost et al., 1994), aunque también es frecuente el valor de  $C_b = 2,5 \times 10^{-3}$  (p. ej. Pascual, 1987; Flather, 1988; Le Cann, 1990; Fanjul, 1997; Andersen et al., 2006).
- $C_b$  constante en cada una de las subregiones en las que se divide el dominio: Se divide la región de estudio en diversas subregiones y, para cada una de ellas, se emplea un valor  $C_b$  constante (p. ej., Lardner et al., 1993; Sannino et al., 2004). A su vez, el valor de  $C_b$  en cada subregión se determina atendiendo a diversas consideraciones de diferente complejidad. Así, puede seleccionarse un valor de  $C_b$  en cada subregión basándose en la profundidad del agua en la misma (p. ej. Lardner et al., 1993; Lu y Zhang, 2006).  $C_b$  también puede parametrizarse en términos de

<sup>34</sup> Es frecuente en la literatura encontrar cualquiera de las dos expresiones anteriores.

<sup>35</sup> En el océano abierto el valor de  $u_0$  no excede, por lo general, de unos pocos cm/s (Egbert y Erofeeva, 2002).

<sup>36</sup> La velocidad de fricción debe considerarse promediada en el tiempo, incluyendo todos los constituyentes de marea involucrados en el cálculo. Esto se ampliará convenientemente en la implementación numérica del método (Secc. 3.4.1.4).

los coeficientes de Chezy ( $C$ , en  $\text{m}^{1/2}/\text{s}$ ) o de Manning ( $n$ , en  $\text{m}^{-1/3}\text{s}$ ), mediante las siguientes expresiones (p. ej., Davies et al., 1997; Bills, 1992; Chow, 1959)

$$C_b = g/C^2, \quad C_b = gn^2/H^{1/3} \quad [3.32]$$

Ambos coeficientes,  $n$  y  $C$ , dependen de la rugosidad del fondo oceánico y de su profundidad<sup>37</sup> y, generalmente, se determinan a partir de observaciones de los factores que los afectan y su ajuste en un modelo numérico. Aumentando en complejidad, puede determinarse un valor constante del coeficiente  $C_b$  mediante una ley de distribución vertical de la velocidad de la corriente, como la *ley logarítmica del muro o Prandtl-Karman* (Bode y Hardy, 1997; Tuckey et al., 2006).

- $C_b$  variable en el espacio: Puesto que el coeficiente de arrastre  $C_b$  varía en el espacio sería razonable considerar, en la parametrización de la fricción, dicho coeficiente variando en el espacio a lo largo del dominio del modelo (p. ej. Das y Lardner, 1991, 1992; Gross y Werner, 1994; Ullman y Robert, 1998). En la práctica, para llevar a cabo este método, se seleccionan un número de puntos para los que se consideran valores independientes de  $C_b$ , mientras que en el resto de puntos de la malla se obtienen mediante interpolación lineal de éstos. La selección de los puntos independientes puede realizarse en función de la distribución espacial de la profundidad del agua, puesto que la fricción del fondo varía con ésta (p. ej. Lu y Zhang, 2006). Davies (1993) señala la adecuación de los modelos de marea 2D promediados en profundidad para la obtención de las elevación de marea oceánica, justificando esta afirmación por el hecho de que, con una parametrización cuadrática del término de fricción con el fondo, las componentes horizontales de la velocidad y la elevación de la marea oceánica promediadas en profundidad no varían significativamente para valores de  $C_b$  constantes o como función de la profundidad.

b) El término de viscosidad turbulenta horizontal:

Los términos correspondientes a la viscosidad turbulenta horizontal en las ecuaciones [3.17] y [3.18] no son estrictamente tensiones reales, si no que proceden del promedio temporal para la obtención de las ecuaciones de Reynolds 3D para flujos turbulentos (Apéndice 1). Estos términos, denotados por  $M_\lambda$  y  $M_\phi$ , se expresan de la forma (Kowalik y Polyakov, 1998; Davies et al., 1997)

$$\mathbf{M} = A_H \Delta(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} M_\lambda \\ M_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_H \left( \frac{1}{R_t^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R_t^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) \right) \\ A_H \left( \frac{1}{R_t^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R_t^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \right) \end{Bmatrix} \quad [3.33]$$

donde  $A_H$  denota el coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta<sup>38</sup> (en  $\text{m}^2/\text{s}$ ) y  $\Delta$  el operador laplaciano bidimensional en coordenadas esféricas ([C.77], Apéndice 1).

Debido a las grandes dimensiones de los océanos, los movimientos de sus aguas inducidos por el potencial astronómico deben considerarse como turbulentos. Uno de los principales rasgos que

<sup>37</sup> En este caso, se considera un valor de la profundidad oceánica de referencia en toda la región, de tal forma que  $C_b$  sea constante en la misma.

<sup>38</sup> En el Apéndice C el coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta horizontal se denota, de forma genérica, por  $\nu_t^H \equiv A_H$ .

caracterizan este tipo de flujos es el desplazamiento de las partículas de agua en trayectorias formando pequeños remolinos de diferentes escalas espacio-temporales<sup>39</sup>. Como se señaló anteriormente y se detalla en el Apéndice 1, el carácter turbulento del flujo oceánico se introduce en las ecuaciones de partida<sup>40</sup> mediante la descomposición de Reynolds, el promediado en el tiempo de las ecuaciones resultantes y la hipótesis de Boussinesq.

Cuando se trata de modelar la marea oceánica, la parametrización de las tensiones turbulentas contiene los efectos que se manifiestan a escalas de espacio y tiempo pequeñas y que no se pueden resolver por la resolución espacial horizontal de la cuadrícula empleada. En aguas poco profundas, donde las corrientes de marea son fuertes (del orden de 1 m/s) y la fricción del fondo es grande, si se utiliza una resolución espacial de la cuadrícula oceánica lo suficientemente alta, comparada con la longitud de la onda de marea, puede obtenerse una solución de marea estable sin incluir el término de turbulencia horizontal (p. ej. Castanedo y Medina, 2002; Davies y Aldridge, 1993). Por el contrario, en estas mismas zonas, cuando existe un fuerte gradiente de profundidad (p. ej., en los extremos de las plataformas continentales) si la resolución espacial de la cuadrícula es baja será necesario incluir los términos viscosos horizontales en las SWE con el fin principal de evitar el ruido introducido en las ecuaciones hidrodinámicas, a través de los términos no lineales por los fenómenos con una escala de longitud espacial inferior a la resolución de la cuadrícula oceánica (Arbic et al., 2004; Davies et al., 1997). Por tanto, el término de viscosidad turbulenta horizontal se incluye en las SWE, más que para modelar los efectos de disipación turbulenta de las corrientes de marea, para suavizar las soluciones numéricas y por estabilidad numérica (Apéndice 1). Es más, si se suprimen los términos convectivos en las SWE el coeficiente  $A_H$  puede tomar el valor igual a cero (Egbert y Ray, 2003). De esta forma, el factor de proporcionalidad o viscosidad turbulenta horizontal,  $A_H$ , se convierte en una incógnita a determinar que da lugar a numerosos modelos (Castanedo y Medina, 2002).

#### Especificación del coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal (de eddy):

Frecuentemente, cuando se considera el término de viscosidad turbulenta horizontal en las ecuaciones de aguas poco profundas, el valor del coeficiente  $A_H$  se considera constante en todo el dominio. En este caso, su valor se determina, habitualmente, mediante la comparación de un modelo numérico, empleando diferentes valores de  $A_H$ , con observaciones de elevaciones del mar y corrientes. Por ejemplo, Abdennadher y Boukthir (2006) llevaron a cabo test sobre  $A_H$ , empleando

---

<sup>39</sup> Estos desplazamientos se deben a los intercambios de cantidad de movimiento en la interacción viscosa con otras partículas de agua. Asimismo, esta transferencia de cantidad de movimiento de una partícula de agua a otra ocasiona que se desarrollen mayores esfuerzos cortantes (o cizalladura) y pérdidas de energía en el fluido (Apéndice 1).

<sup>40</sup> Como se describió al inicio de esta Secc., las ecuaciones de partida son las de Navier-Stokes 3D para un fluido viscoso, donde las fuerzas que afectan a su movimiento son la presión, la gravedad y la fricción viscosa. Al introducir el régimen turbulento del fluido se considera, por hipótesis, que la viscosidad molecular es despreciable frente a la viscosidad turbulenta, así como lo son las variaciones espaciales y con la profundidad de esta última.

valores en el rango de 200 m<sup>2</sup>/s y 1.000 m<sup>2</sup>/s, obteniendo sólo pequeñas variaciones en las elevaciones de marea y en las corrientes<sup>41</sup>.

Puesto que la difusión turbulenta horizontal está directamente relacionada con la resolución espacial de la cuadrícula y, además, con los pasos temporales utilizados para resolver numéricamente las SWE, el valor de  $A_H$  se selecciona, generalmente, en función de estos dos parámetros (Montero, 1999; Sánchez y Pascual, 1988; Schwiderski, 1978). Por ejemplo, Madsen et al. (1988) proponen<sup>42</sup>

$$A_H = 0,05(\Delta x \Delta y / \Delta t) \quad [3.34]$$

donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  son las longitudes de la cuadrícula oceánica en sus direcciones correspondientes en coordenadas cartesianas. En algunos casos, resulta conveniente considerar  $A_H$  variable en el espacio, especialmente cuando el dominio del modelo abarca desde regiones profundas a poco profundas. En este caso, es habitual consiste el valor de  $A_H$  incrementando con la profundidad del agua (p. ej., Flather, 1981) o dependiente de los gradientes de las velocidades, según (Smagorinsky, 1963):

$$A_H = C_s \Delta x \Delta y (S_{ij} S_{ji})^{1/2}$$

siendo  $C_s$  una constante empírica que toma valores en el rango de 0,4 a 0,8 y  $S_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ .

### 3.4.1.2 La Topografía del Fondo Marino

La profundidad del océano es uno de los parámetros más importantes en la modelización de la marea oceánica. Generalmente, los modelos batimétricos se obtienen mediante sondeos acústicos desde un barco. Entre los modelos batimétricos disponibles se encuentran las bases de datos ETOPO (desarrollada por el *National Geophysical Data Center*, Boulder, Colorado) y GEBCO (elaborada por GEBCO, IHB y NOAA, entre otras organizaciones). La versión ETOPO5 (de 5 minutos de resolución) contiene datos de profundidades oceánicas obtenidas a partir de sondeos de resonancia y elevaciones de Tierra. Las versiones ETOPO2 (de 2 minutos de resolución) y ETOPO1 (1 minuto) combinan los datos de profundidades oceánicas obtenidos a partir de sondeos de resonancia con los datos altimétricos de GEOSAT y ERS1, proporcionados por Sandwell y Smith (1997, versión número 8.2). Análogamente, la versión más reciente de la base de datos GEBCO, de resolución 30 segundos, combina los datos proporcionados por Sandwell y Smith (versión 16.1) con una base de datos de unos 290 millones de sondeos batimétricos procedentes de diversas fuentes.

### 3.4.1.3 Condiciones de Frontera y de Contorno

Para resolver el sistema de ecuaciones hidrodinámicas se necesita establecer una serie de condiciones sobre los contornos costeros. A escala regional se precisa, además, condiciones sobre los límites de la región modelada. Para ello, en primer lugar, las fronteras se clasifican en dos tipos: El primero corresponde a las **fronteras abiertas**, que son las que delimitan el dominio modelado y que

<sup>41</sup> Generalmente, para garantizar la estabilidad numérica se consideran valores grandes de  $A_H$ , del orden de 1.000 m<sup>2</sup>/s (p. ej. Egbert y Ray, 2003; Wunsch et al., 1997).

<sup>42</sup> El régimen de ondas largas se caracteriza por que la longitud de la onda es grande en comparación con la profundidad, esto es, la profundidad relativa  $h_c/L_c < 1/20$ .

lindan con el océano. El segundo tipo corresponde a las *fronteras cerradas y los contornos costeros*. En lo que sigue, se denotará por  $\Omega$  el dominio del modelo y por  $\partial\Omega_A$  y  $\partial\Omega_C$  sus fronteras abiertas y cerradas (estas últimas incluyen los contornos costeros), respectivamente. La modelización hidrodinámica numérica estará limitada por la elección de las condiciones impuestas sobre las fronteras abiertas, ya que estas condiciones tendrán una influencia significativa sobre las soluciones de marea obtenidas en el interior del dominio del modelo (p. ej., Bourret et al., 2005; Zhang et al., 2003; Davies et al., 1997). Por tanto, la elección apropiada de unas condiciones de frontera sobre la cuadrícula oceánica puede mejorar substancialmente la modelización hidrodinámica.

#### **a) Fronteras abiertas**

El tratamiento de las condiciones de frontera abierta (CFA) es un problema intrínseco asociado con la formulación de modelos de marea oceánica a escala regional. Las fronteras abiertas de un dominio deben ser tales que permitan la propagación de la marea oceánica proveniente del exterior hacia su interior, y la propagación de los efectos generados en el interior hacia fuera. Como primera consideración, las fronteras abiertas deben seleccionarse, en la medida de lo posible, sobre el océano abierto, evitando áreas batimétricas complejas y alejadas de zonas caracterizadas por una alta variabilidad de la marea oceánica y de fuertes corrientes. Si es posible, deben situarse en regiones donde los términos no-lineales (como la fricción del fondo) sean pequeños (Izquierdo et al., 2001).

A groso modo, las condiciones de frontera abierta pueden clasificarse, a su vez, en dos tipos: activas o pasivas (p. ej., Bourret et al., 2005). Se denominan *condiciones activas* a aquéllas que imponen las características de la circulación oceánica externa sobre las fronteras y, por tanto, constriñen la solución en su interior. Estas condiciones se establecen especificando sobre las fronteras el valor de las componentes de la velocidad de fluido o de la elevación de marea, a partir de su conocimiento fuera de ella. Generalmente, esta información se obtiene o bien a partir de observaciones (mareográficas o de altimetría por satélite) disponibles sobre las fronteras o en sus proximidades, o bien a partir de modelos preexistentes que abarquen un área más extensa que la región a modelar y de menor resolución. En el primer caso, hay que tener en cuenta la precisión de los datos observados y el número de observaciones disponibles. Por ejemplo, en las proximidades de las costas la precisión de los datos altimétricos no es, en general, como puede ser la de las observaciones in-situ. Por el contrario, estas últimas, generalmente son escasas y su interpolación sobre los nodos abiertos (celdas de la cuadrícula situados sobre la frontera abierta) puede introducir errores en el interior del dominio del modelo. En el segundo caso, el principal inconveniente de la imposición de las CFA obtenidas de modelos globales proviene de que éstos no son los suficientemente precisos, incluso los más recientes y de mayor resolución. En esta línea se encuentran, por ejemplo, los trabajos de Sauvaget et al. (2000) quienes modelan las corrientes de marea en el entorno de la costa Portuguesa a partir de CFA activas obtenidas del modelo global FES94, o Chen y Mellor (1999) quienes determinan empíricamente información sobre las soluciones del modelo para fuerzas de frontera arbitrarias. Por otra parte, las *condiciones pasivas*, son tales que

la dinámica de marea en el interior del dominio determina los valores sobre sus fronteras. Este tipo de condiciones permite la propagación hacia el exterior de los fenómenos generados en su interior, sin perturbar la propia solución interior (Roed y Cooper, 1986). En el caso de la marea barotrópica, las CFA pasivas se establecen a partir de diferentes métodos de mayor o menor complejidad. Así, por ejemplo, entre los métodos más simples se encuentran *la condición de Newmann*, que impone la condición de gradiente nulo, la *condición de gradiente constante* o la *condición de radiación* (Sommerfeld, 1949). En Bourret et al. (2005) se encuentra una revisión interesante sobre los diferentes tipos de condiciones de frontera pasivas.

En el caso de la modelización de la marea oceánica, las CFA más comúnmente utilizadas son las condiciones activas. Es más, son muy poco frecuentes los trabajos que, en marea oceánica y para los principales constituyentes armónicos, tratan con condiciones pasivas. A pesar de esto, para la elección más adecuada del tipo de fronteras abiertas, deben tenerse en cuenta diversas consideraciones geométricas e hidrodinámicas (Bourret et al., 2005). Entre ellas, las siguientes:

- El patrón de propagación de las corrientes de marea y de sus elevaciones. Si éstas se dirigen hacia al interior del dominio, las fronteras se considerarán activas. En caso contrario, se consideran fronteras pasivas.
- Si las fronteras abiertas yacen sobre áreas de plataforma continental deberá tenerse en cuenta la geometría costera. Por ejemplo, si la plataforma continental es muy extensa y las isobatas paralelas a la costa y perpendiculares a la frontera (de tal forma que los nodos abiertos se distribuyen a lo largo de la dirección que va desde la costa hasta la pendiente continental), las fronteras abiertas pueden considerarse activas, si el espaciado de los nodos es tal que cubren suficientemente los diferentes desniveles de la plataforma continental.

La implementación numérica de las condiciones de frontera abierta activas se lleva a cabo de la siguiente forma: Para cada constituyente de marea  $k$  se prescribe, sobre los nodos de la frontera abierta, la marea oceánica obtenida a partir de observaciones o de un modelo global, esto es

$$\zeta_{inob}^k = A_{inob}^k \cos(\Theta_k(t) - G_{inob}^k) \quad [3.35]$$

el subíndice  $inob$  denota los nodos de la cuadrícula situados sobre  $\partial\Omega_A$ .  $A_{inob}^k$  y  $G_{inob}^k$  son la amplitud y la fase conocidas, respectivamente, de la marea oceánica.  $\Theta_k(t)$  es el argumento astronómico en Greenwich (ecuación [1.52]). Cuando las condiciones de frontera abierta se imponen sobre las componentes horizontales del transporte del flujo,  $U_{inob}^k$  y  $V_{inob}^k$ , entonces

$$(U_{inob}^k, V_{inob}^k) \cdot \mathbf{n} = \text{Conocido} \quad [3.36]$$

donde  $\mathbf{n}$  denota la dirección normal a la frontera.

## b) Fronteras cerradas y condiciones de contorno

Para limitar el problema de la perturbación del flujo oceánico por una frontera de tierra, deben establecerse una serie de condiciones de contorno. Denotando por  $U$  y  $V$  las componentes de transporte horizontal de flujo en los nodos situados en  $\partial\Omega_C$ , se establecen:



- La **condición de impermeabilidad** en las fronteras, que limitan el dominio del modelo y que no contienen entrada de agua,

$$(U, V)^T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad [3.37]$$

- La **condición de flujo normal cero** en las costas. Esta condición expresa que se anulan las componentes horizontales del transporte de flujo normales a la frontera de tierra, esto es, que no exista flujo a través de la costa

$$\begin{aligned} \text{Para costas con orientación N-S : } U &= 0 \\ \text{Para costas con orientación E-O : } V &= 0 \end{aligned} \quad [3.38]$$

#### 3.4.1.4 Esquemas Numéricos para la Resolución del Sistema de Ecuaciones.

Dependiendo de diversas características de la región en la que se pretende modelar la marea oceánica (p. ej., la extensión del dominio o la profundidad oceánica, etc.) será conveniente, en ocasiones, realizar distintas simplificaciones en las SWE descritas en [3.16] a [3.18]. Dichas simplificaciones se deben, generalmente, a la importancia que adquieran los diferentes términos en las SWE en la región (véase Apéndice 1), así como a limitaciones computacionales (p. ej., velocidad CPU, memoria, etc.). Por ejemplo, como se señaló anteriormente, en el océano abierto los efectos causados por la fricción del fondo pueden considerarse despreciables, pero no así en aguas someras. Al mismo tiempo, la inclusión del término de turbulencia horizontal en zonas de aguas someras estará condicionada, entre otros, por la importancia de las corrientes de marea (sólo cuando las velocidades características y sus gradientes sean importantes, los términos inerciales no lineales serán significativos) y de la fricción del fondo en la misma, de la resolución de la cuadrícula oceánica o del gradiente de profundidad.

Por estas razones, en esta memoria se consideran dos formulaciones de las SWE. La primera corresponde a su forma no lineal, es decir, el sistema especificado por [3.16] a [3.18], con la parametrización cuadrática del fondo dada por [3.30] y la viscosidad turbulenta horizontal en [3.33]. La segunda formulación corresponde a su forma linealizada. Esto es, en [3.17] y [3.18] se omiten los términos correspondientes a la aceleración convectiva y a la viscosidad turbulenta horizontal y la fricción con el fondo marino se incorpora mediante la parametrización lineal dada por [3.31]. Cada formulación conlleva un esquema numérico diferente para su resolución, que se presentan a continuación.

##### a) SWE no lineales: Método de discretización en el espacio y el tiempo

Para resolver numéricamente las SWE no lineales, éstas deben discretizarse en el tiempo y en el espacio. Existen numerosas técnicas de resolución numérica como son las diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos (p. ej. Foreman, 1984; Abbot y Basco, 1989). La elección de un esquema numérico se realiza, principalmente, con el fin de optimizar el cálculo en función del problema planteado. En esta memoria se ha adoptado el método de las diferencias finitas por su gran versatilidad y eficacia computacional.

La *técnica de diferencias finitas* (p. ej. Kim y Lee, 1994) consiste en aproximar una función continua y sus derivadas por expresiones que tomen valores sólo en un número finito y discreto de puntos. El dominio continuo se sustituye por uno discreto formado, en este caso, por una cuadrícula rectangular bidimensional compuesta por un número limitado de nodos. Dentro de la técnica de diferencias finitas existen diferentes métodos, caracterizados por la disposición de las variables de estado (elevación y velocidad de la marea) sobre la cuadrícula de cálculo y por el esquema numérico de resolución de las ecuaciones, explícito o implícito, aplicado sobre dicha cuadrícula.

#### La cuadrícula de cálculo:

La cuadrícula de cálculo seleccionada es una cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C (Arakawa y Lamb, 1977), que se caracteriza por que las diferentes variables no se calculan en los mismos puntos, lo que minimiza el esfuerzo computacional (Balzano, 1998). La cuadrícula espacial se compone de un número determinado de celdas rectangulares (que se consideran que contienen tierra o agua) a lo largo de los ejes  $\lambda$  y  $\phi$ , respectivamente. Cada celda se numera en el centro de la misma con los índices  $(i, j)$ . Para esta cuadrícula se introduce una serie de notaciones que se resumen en la Tabla 3.4 y se representan en la Figura 3.2.

**TABLA 3.4:** Notaciones utilizadas sobre la cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C I.

<b>NOTACIONES I: Cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C</b>	
$n, m$	Número máximo de subdivisiones de la cuadrícula en las direcciones zonal y meridional, respectivamente.
$N = m \times n$	Número de nodos en la cuadrícula (de agua y tierra).
$(\lambda_{i,j}, \phi_{i,j})$	Longitud y latitud, respectivamente, sobre la cuadrícula.
$(\lambda_{\min}, \phi_{\min})$	Longitud y latitud mínimas del dominio, es decir, sus fronteras oeste y sur.
$\Delta\lambda, \Delta\phi$	Resolución de la cuadrícula en las direcciones zonal y meridional, respectivamente.
$\Delta t$	Incremento de tiempo o paso temporal (en s).
$t_k = k\Delta t$	Instante de tiempo $k$ -ésimo. $t_k$ es el tiempo transcurrido desde el instante inicial, $t_0 = 0$ , en el que establecen las condiciones iniciales y el instante final $t_{\text{fin}} = K\Delta t$ .
	El conjunto de variables de estado definidas sobre la cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C (Fig. 3.2), para $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ y $k = 0, \dots, K$ , son:
$\zeta_{i,j}^k$	La elevación de la marea oceánica (análogamente $h_{i,j}$ y $H_{i,j}^k$ ), definida en el centro de la celda de índices $(i, j)$ , de coordenadas $(\lambda_{i,j}^\zeta, \phi_{i,j}^\zeta)$ : $\lambda_{i,j}^\zeta = (\lambda_{\min} + \Delta\lambda/2) + (j-1)\Delta\lambda \quad \phi_{i,j}^\zeta = (\phi_{\min} + \Delta\phi/2) + (i-1)\Delta\phi$ en el instante de tiempo $t_k$ . Las localizaciones sobre la cuadrícula de la variable $\zeta$ se denominan <b><math>\zeta</math>-nodos</b> . Para cada $k$ , $\{\zeta_{i,j}^k\} \in \mathbb{C}^N$ .
$U_{i,j}^k$	La componente en la dirección $\lambda$ del transporte se define en el punto medio del lado izquierdo de la celda $(i, j)$ -ésima (en el punto $\lambda - \Delta\lambda/2, \phi$ ) y el instante $t_{k-1/2}$ . $\{U_{i,j}^k\} \in \mathbb{C}^N$ .
$V_{i,j}^k$	La componente en la dirección $\phi$ del transporte se define en el punto medio del lado inferior de la celda $(i, j)$ -ésima (en el punto de coordenadas $\lambda, \phi - \Delta\phi/2$ ) y el instante $t_{k-1/2}$ . $\{V_{i,j}^k\} \in \mathbb{C}^N$ .

En las fronteras abiertas del dominio, se especificarán o bien las elevaciones de la marea oceánica, según [3.35], o bien las componentes normales de la velocidad, según [3.36]. Las fronteras

### Esquema de cálculo numérico aplicado sobre la cuadrícula Arakawa-C:

$$\Delta t \leq \min \{ \Delta \lambda, \Delta \phi \} / \sqrt{2gh_{\max}} \quad [3.39]$$

Los *métodos explícitos*, constituyen un método simple de discretización en el tiempo, donde los términos del sistema se evalúan en pasos temporales,  $k$ ,  $(k + 1)$ , etc., de forma que cualquier instante

<sup>45</sup> Para las ondas de gravedad superficiales debe verificarse, además, que  $\Delta t \leq (1/f)$ , siendo  $f$  el parámetro de Coriolis.

de tiempo se conoce de pasos anteriores. Por tanto, aunque estos métodos no involucran la inversión de matrices, presentan una serie de inconvenientes. Entre ellos, destaca la restricción de estabilidad impuesta por la condición de CFL, que implica trabajar con pasos temporales más pequeños (p. ej., Casulli, 1990).

Los *métodos implícitos* evalúan las variables de estado del sistema en cada nodo de la cuadrícula en un paso  $(k + 1)$  a partir de los valores en los nodos adyacentes en los instantes de tiempo  $k$  y  $(k + 1)$ . Así, estos métodos involucran la solución simultánea de un gran número de ecuaciones no lineales acopladas y la inversión de matrices de gran tamaño (Casulli, 1990). A diferencia de los métodos explícitos, los implícitos son, generalmente, incondicionalmente estables (esto es, no están limitados por criterios de estabilidad), aunque el tamaño del paso no debe ser arbitrariamente grande ya que, en ese caso, el coste computacional sería muy grande.

Existen esquemas alternativos, denominados *semi-implícitos*, que permiten tratar algunos términos de forma implícita y los restantes explícitamente (p. ej. Robert et al, 1972; Fanjul, 1997). Dentro de los esquemas semi-implícitos sobre cuadrículas descentradas, el más comúnmente utilizado para la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas integradas en profundidad es el conocido como *esquema ADI*<sup>46</sup> o *técnica implícita de dirección alternante* (Abbott et al., 1973). Mediante esta técnica, la aproximación numérica se realiza con un avance en el tiempo en dos pasos resolviendo, en cada uno, las ecuaciones en una sola de las direcciones espaciales. Esta técnica se caracteriza, principalmente, porque evita el problema de la inversión de matrices que ocurre en los esquemas implícitos y, además, es incondicionalmente estable (Gjevik y Straume, 1989). Estas características conllevan una mejora en eficacia y precisión. A pesar de esto, surgen problemas al aplicar la técnica ADI con números de Courant grandes (de 3 a 5), lo que puede influir en la velocidad de propagación numérica de la onda de marea (Stelling et al., 1986). Por esta razón, a pesar la estabilidad incondicional, deben utilizarse números de Courant adecuados a las características geométricas del problema.

#### Resolución numérica de las SWE no lineales mediante la técnica de diferencias finitas y un esquema implícito de dirección alternante, sobre una cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C:

Para aplicar este esquema de cálculo se necesita establecer previamente:

- El **tamaño del paso espacial** ( $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\phi$ ), para alcanzar un compromiso entre (Le Cann, 1990; Paireaud et al., 2008): (i) La resolución necesaria para resolver la escala horizontal típica de la onda de marea. En el caso de la elevación de marea, la resolución espacial debe ser, al menos, igual a la longitud de la onda de marea. (ii) La resolución necesaria para representar las características costeras. (iii) La capacidad de memoria y almacenamiento disponibles.
- El **tamaño del paso temporal** ( $\Delta t$ ), según el criterio CFL dado por [3.39]. Aunque la estabilidad del método está garantizada, es adecuado considerar este criterio para evitar los problemas citados anteriormente.

<sup>46</sup> Acrónimo en inglés de *Alternating Direction Implicit*.

- Los **valores constantes en las SWE**, de las magnitudes  $g, f, \rho_w, C_b$  y  $A_H$ , más adecuados para la región considerada.
- La **batimetría** sobre los nodos de la cuadrícula oceánica.
- Las **condiciones de frontera abierta**, si éstas se establecen a partir de datos procedentes de observaciones o de un modelo global.
- Unas **condiciones iniciales** en todos los puntos de la cuadrícula. Puesto que, generalmente, no se dispone de unos valores iniciales, en la práctica se comienza la resolución numérica a partir del estado de reposo (p. ej. Flather, 1988)

$$\zeta_{i,j} = U_{i,j} = V_{i,j} = 0 \text{ en el instante } t = 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad [3.40]$$

Este estado es válido siempre que el procedimiento numérico se ejecute durante un periodo de tiempo lo suficientemente grande como para que cualquier perturbación inicial, causada por esta condición, desaparezca. Para ello, se deja transcurrir el tiempo necesario para que se disipen estas perturbaciones, lo que se denomina **periodo de estabilización**, logrando así unas condiciones iniciales más adecuadas y tomando en consideración las soluciones (esto es, las elevaciones del mar que se analizan armónicamente para obtener la solución final) a partir de dicho instante de tiempo (**periodo de ejecución efectivo**) (p. ej. McInerney, 2005).

- Una **restricción adicional** (sin consecuencias en la modelización hidrodinámica) en el término de la fricción con el fondo oceánico, que consiste en imponer una profundidad mínima de la columna de agua ( $h_0$ ), para evitar singularidades.

A continuación, se resume la formulación básica en diferencias finitas de las SWE no lineales mediante el esquema ADI. Para ello, a las notaciones introducidas previamente sobre la cuadrícula Arakawa-C (Tabla 3.4) se añaden las presentadas en la Tabla 3.5.

**TABLA 3.5:** Notaciones utilizadas sobre la cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C II.

<b>NOTACIONES II: Cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C</b>	
$h_{i,j}^{\zeta}$	Topografía del fondo en $\zeta$ -nodos, establecida a partir de un modelo digital.
$M_{i,j}^{\zeta}$	Máscara que representa si el $\zeta$ -nodo se establece como tierra ( $M_{i,j}^{\zeta} = 0$ ) o agua ( $M_{i,j}^{\zeta} = 1$ ). Para garantizar la imposición de las CFA, se establece $M_{i,j}^{\zeta} = 0 \quad \forall (i, j) \in \partial\Omega_A$ .
$M_{i,j}^U, M_{i,j}^V$	Máscaras de tierra/agua en los $U, V$ -nodos. Sus valores se establecen a partir de los dos $\zeta$ -nodos adyacentes:
$\begin{cases} M_{i,j}^U = M_{i,j}^{\zeta} M_{i,j-1}^{\zeta} \\ M_{i,1}^U = M_{i,n+1}^U = M_{m+1,j}^U = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{i,j}^V = M_{i,j}^{\zeta} M_{i-1,j}^{\zeta} \\ M_{1,j}^V = M_{i,n+1}^V = M_{m+1,j}^V = 0 \end{cases} \quad [3.41]$	

**TABLA 3.5:** Continuación

NOTACIONES II: Cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C	
$h_{i,j}^U, h_{i,j}^V$	<p>Batimetrías en los <math>U, V</math>-nodos:</p> $\begin{cases} h_{i,j}^U = \begin{cases} (h_{i,j}^\zeta + h_{i,j-1}^\zeta)/2 & \text{si } M_{i,j}^U = 1 \\ 0 & \text{si } M_{i,j}^U = 0 \end{cases} \\ h_{i,1}^U = 1 \quad h_{i,n+1}^U = 1 \quad h_{m+1,j}^U = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} h_{i,j}^V = \begin{cases} (h_{i,j}^\zeta + h_{i-1,j}^\zeta)/2 & \text{si } M_{i,j}^V = 1 \\ 0 & \text{si } M_{i,j}^V = 0 \end{cases} \\ h_{i,n+1}^V = 1 \quad h_{1,j}^V = 1 \quad h_{m+1,j}^V = 1 \end{cases} \quad [3.42]$
$\tilde{V}_{i,j}^k$	<p>Valor promedio de la variable <math>V</math> en el <math>U</math>-nodo (Fig. 3.2):</p> $\tilde{V}_{i,j}^k = [V_{i,j}^k M_{i,j}^U + V_{i,j-1}^k M_{i,j-1}^U + V_{i+1,j}^k M_{i+1,j}^U + V_{i+1,j-1}^k M_{i+1,j-1}^U] / M^V \quad [3.43]$ <p>donde <math>M^V = M_{i,j}^V M_{i,j}^U + M_{i,j-1}^V M_{i,j-1}^U + M_{i+1,j}^V M_{i+1,j}^U + M_{i+1,j-1}^V M_{i+1,j-1}^U</math></p>
$\tilde{U}_{i,j}^k$	<p>Valor promedio de la variable <math>U</math> en el <math>V</math>-nodo:</p> $\tilde{U}_{i,j}^k = \left[ \frac{U_{i,j}^k \cos \phi_{i,j}^U}{h_{i,j}^U} + \frac{U_{i,j+1}^k \cos \phi_{i,j+1}^U}{h_{i,j+1}^U} + \frac{U_{i-1,j}^k \cos \phi_{i-1,j}^U}{h_{i-1,j}^U} + \frac{U_{i-1,j+1}^k \cos \phi_{i-1,j+1}^U}{h_{i-1,j+1}^U} \right] \frac{h_{i,j}^V}{M^U} \quad [3.44]$ <p>donde <math>M^U = M_{i,j}^U + M_{i,j+1}^U + M_{i-1,j}^U + M_{i-1,j+1}^U</math></p>

Con las notaciones introducidas en las Tablas 3.4 y 3.5, las ecuaciones de continuidad, de conservación del momento, las condiciones iniciales y de frontera discretizadas (en el espacio y el tiempo) siguiendo el esquema ADI se formulan de la siguiente manera<sup>47</sup>:

- **La ecuación de continuidad:**

En el interior del dominio del modelo, la ecuación de continuidad se discretiza en el centro de cada celda  $(i, j)$ , esto es, en los  $\zeta$ -nodos, siguiendo un esquema de diferencias centradas en el espacio, usando medio tamaño de paso  $(\Delta\lambda/2$  y  $\Delta\phi/2)$  y centradas en el tiempo (en pasos  $\Delta t$ ), en los instantes  $t_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ). Así, en cada paso temporal  $k$

$$\zeta_{i,j}^{k+1} = M_{i,j}^\zeta \left\{ \zeta_{i,j}^k - \left( \Delta t / R_T \cos \phi_{i,j}^U \right) \left( (U_{i,j+1}^{k+1} - U_{i,j}^{k+1}) / \Delta\lambda + (V_{i+1,j}^{k+1} \cos \phi_{i-1,j}^V - V_{i,j}^{k+1} \cos \phi_{i,j}^V) / \Delta\phi \right) \right\} \quad [3.45]$$

En el instante inicial se considera, por [3.40], que  $\zeta_{i,j}^0 = U_{i,j}^0 = V_{i,j}^0 = 0$ . Además,  $M_{i,j}^\zeta$ , que denota la máscara tierra/agua en el  $\zeta$ -nodo de índices  $(i, j)$ , garantiza que la expresión anterior se reduce a cero en los nodos establecidos como tierra. Por otra parte, para los nodos  $(i, j)$  sobre las fronteras abiertas se establecen las elevaciones de marea proporcionadas por el modelo global. Si para un constituyente de marea  $l$  en el nodo  $(i, j)$  de la cuadrícula de cálculo,  $(\zeta_0^l)_{i,j}$  denota la elevación de la marea oceánica en forma compleja, ésta puede expresarse en función de sus componentes amplitud  $(A_{i,j}^l)$  y fase  $(G_{i,j}^l)$ . De esta forma, en el instante  $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$  la elevación de marea total se expresa, en forma compleja, como la suma de los  $L$  constituyentes de marea considerados, mediante

$$\zeta_{i,j}^{k+1} = \sum_{l=1}^L A_{i,j}^l e^{i(\omega^l t_{k+1} - G_{i,j}^l)} \quad \forall (i, j) \in \partial\Omega_A \quad [3.46]$$

<sup>47</sup> El tratamiento numérico expuesto en esta Secc. corresponde al implementado en el paquete de programas de cálculo *OSU Tidal Inversion Software* (OTIS) (Egbert y Erofeeva, 2002; 2006).

siendo  $\omega_l$  la frecuencia de marea del constituyente  $l$ .

**- Las ecuaciones del momento:**

La ecuación del momento en la dirección  $\lambda$  se discretiza, fundamentalmente, siguiendo el mismo esquema pero, en este caso, en el punto medio del lado izquierdo de cada celda  $(i, j)$ . Análogamente, la ecuación del momento en la dirección  $\phi$  se discretiza en el punto medio del lado inferior de cada celda  $(i, j)$ . En ambas direcciones,  $\lambda$  y  $\phi$ , el cálculo se lleva a cabo en los instantes  $t_{k-1/2} = (k-1/2)\Delta t$  y en pasos temporales alternos (de esta forma, los términos se calcularán explícitamente con diferencias centradas en un paso de tiempo e implícitamente en el siguiente paso). Así

$$U_{i,j}^{k+1} = M_{i,j}^U \left\{ U_{i,j}^k + (a_1)_{i,j}^{k+1} + \sum_{s=2}^6 (a_s)_{i,j}^{k+1} \Delta t \right\} \quad V_{i,j}^{k+1} = M_{i,j}^V \left\{ V_{i,j}^k + (b_1)_{i,j}^{k+1} + \sum_{s=2}^6 (b_s)_{i,j}^{k+1} \Delta t \right\} \quad [3.47]$$

Siendo  $U_{i,j}^k$  y  $V_{i,j}^k$  las componentes del transporte calculadas en los pasos previos y  $(a_s)_{i,j}^{k+1}$  y  $(b_s)_{i,j}^{k+1}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , los términos discretos correspondientes a las aceleraciones y las fuerzas calculados en el paso temporal actual  $(k+1)$  en la posición  $(i, j)$ . Como antes, se introducen las máscaras  $M_{i,j}^U$  y  $M_{i,j}^V$  para garantizar que en nodos de tierra los términos se hagan cero. Debe observarse que en estas ecuaciones se han introducido las condiciones de frontera cerrada asignando las máscaras  $M_{i,j}^U = M_{i,j}^V = 0$  en los nodos correspondientes. Los términos  $(a_s)_{i,j}^{k+1}$  y  $(b_s)_{i,j}^{k+1}$  en las direcciones  $\lambda$  y  $\phi$ , respectivamente, se calculan según las expresiones listadas a continuación:

Fuerza de Coriolis:

$$(a_2)_{i,j}^{k+1} = 2\omega \sin \phi_{i,j}^U \tilde{V}_{i,j}^{k+1} \quad (b_2)_{i,j}^{k+1} = -2\omega \sin \phi_{i,j}^U \tilde{U}_{i,j}^k$$

Aceleración convectiva:

$$(a_1)_{i,j}^{k+1} = (1/2R_T \cos \phi_{i,j}^U h_{i,j}^U) U_{i,j}^k (U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k) / \Delta \lambda + (1/2R_T h_{i,j}^U) \tilde{V}_{i,j}^{k+1} (U_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k) / \Delta \phi$$

$$(b_1)_{i,j}^{k+1} = (1/2R_T \cos \phi_{i,j}^V h_{i,j}^V) \tilde{U}_{i,j}^k (V_{i,j+1}^k - V_{i,j-1}^k) / \Delta \lambda + (1/2R_T h_{i,j}^V) V_{i,j}^k (V_{i+1,j}^k - V_{i-1,j}^k) / \Delta \phi$$

Gradiente de presión:

$$(a_3)_{i,j}^{k+1} = -(g/R_T \cos \phi_{i,j}^U) h_{i,j}^U (\zeta_{i,j}^k - \zeta_{i,j-1}^k) / \Delta \lambda \quad (b_3)_{i,j}^{k+1} = -(g/R_T) h_{i,j}^V (\zeta_{i,j}^k - \zeta_{i-1,j}^k) / \Delta \phi$$

Fuerzas de marea<sup>48</sup>:

$$(a_4)_{i,j}^{k+1} = (gh_{i,j}^U/R_T) \sum_{s,l} \alpha^{l,s} A^{l,s} L_{i,j}^{s,U} \sin(s\lambda_{i,j}^U + \omega^{l,s} t_{k-1/2}) + (gh_{i,j}^U/R_T \cos \phi_{i,j}^U) (\zeta_{i,j}^{SAL} - \zeta_{i,j-1}^{SAL}) / \Delta \lambda$$

$$(b_4)_{i,j}^{k+1} = (gh_{i,j}^V/R_T) \sum_{s,l} \alpha^{l,s} A^{l,s} L_{i,j}^{s,V} \cos(s\lambda_{i,j}^U + \omega^{l,s} t_{k-1/2}) + (gh_{i,j}^V/R_T) (\zeta_{i,j}^{SAL} - \zeta_{i-1,j}^{SAL}) / \Delta \phi$$

con el primer sumando que corresponde al gradiente de la marea de equilibrio y el segundo al gradiente de la marea de carga y atracción oceánica (Tabla 3.3).  $L_{i,j}^{s,U}$  y  $L_{i,j}^{s,V}$  denotan las funciones definidas para cada especie de marea diurna ( $s = 1$ ) o semi-diurna ( $s = 2$ ) en las direcciones  $\lambda$  y  $\phi$ , respectivamente, por

<sup>48</sup> El gradiente de la marea de equilibrio en las direcciones  $\lambda$  y  $\phi$  se obtienen derivando, en sendas direcciones, los términos correspondientes en la ecuación [3.24] (véanse también [3.27] y [3.28]).

$$L_{i,j}^{s,U} = \begin{cases} -2\sin\phi_{i,j}^U & s=1 \\ -2\cos\phi_{i,j}^U & s=2 \end{cases} \quad L_{i,j}^{s,V} = \begin{cases} 2\cos 2\phi_{i,j}^V & s=1 \\ -\sin 2\phi_{i,j}^V & s=2 \end{cases}$$

$A^{l,s}$  y  $\omega^{l,s}$  son la amplitud (en m, en el instante de referencia  $t_0 = 0$ ) y la frecuencia angular (en rad/s) de la marea de equilibrio  $l$ -ésima<sup>49</sup>.  $\alpha^{l,s}$  es el factor dado por  $\alpha^{l,s} = (1 + k_2^{l,s} - h_2^{l,s})$ , con  $k_2^{l,s}$  y  $h_2^{l,s}$  que denotan los correspondientes números de Love. Para los principales constituyentes en las bandas de marea diurna y semi-diurna los valores de  $A$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  están listados en la Tabla 3.6. El término  $\zeta_{i,j}^{SAL}$  se incorpora explícitamente en las ecuaciones a través de un modelo preexistente, en cada nodo  $(i, j)$ .

#### Viscosidad turbulenta:

$$\begin{aligned} (a_5)_{i,j}^{k+1} &= A_H \left\{ \left( \frac{1}{R_T \cos \phi_{i,j}^U} \right)^2 (U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k - 2U_{i,j}^k) / \Delta \lambda^2 + (1/R_T^2) (U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k - 2U_{i,j}^k) / \Delta \phi^2 \right\} \\ (b_5)_{i,j}^{k+1} &= A_H \left\{ \left( \frac{1}{R_T \cos \phi_{i,j}^V} \right)^2 (V_{i,j+1}^k + V_{i,j-1}^k - 2V_{i,j}^k) / \Delta \lambda^2 + (1/R_T^2) (V_{i+1,j}^k + V_{i-1,j}^k - 2V_{i,j}^k) / \Delta \phi^2 \right\} \end{aligned}$$

Término cuadrático de la fricción con el fondo oceánico, que se calcula en dos partes

$$(a_6)_{i,j}^{k+1} = (a_{6,1})_{i,j}^{k+1} + (a_{6,2})_{i,j}^{k+1} \quad (b_6)_{i,j}^{k+1} = (b_{6,1})_{i,j}^{k+1} + (b_{6,2})_{i,j}^{k+1}$$

siendo

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a_{6,1})_{i,j}^{k+1} = -(1/2) \left[ \left( C_b / \left( \max \{ h_{i,j}^U, h_0 \} \right)^2 \right) U_{i,j}^k \sqrt{(U_{i,j}^k)^2 + (\tilde{V}_{i,j}^{k+1})^2} \right] \\ (a_{6,1})_{i,j}^{k+1} = -(1/2) \left[ \left( C_b / \left( \max \{ h_{i,j}^V, h_0 \} \right)^2 \right) V_{i,j}^k \sqrt{(V_{i,j}^k)^2 + (\tilde{U}_{i,j}^k)^2} \right] \end{cases} \\ \begin{cases} (a_{6,2})_{i,j}^{k+1} = -(1/2) \left[ \left( C_b / \left( \max \{ h_{i,j}^U, h_0 \} \right)^2 \right) U_{i,j}' \sqrt{(U_{i,j}^k)^2 + (\tilde{V}_{i,j}^{k+1})^2} \right] \\ (b_{6,2})_{i,j}^{k+1} = -(1/2) \left[ \left( C_b / \left( \max \{ h_{i,j}^V, h_0 \} \right)^2 \right) V_{i,j}' \sqrt{(V_{i,j}^k)^2 + (\tilde{U}_{i,j}^k)^2} \right] \end{cases} \\ U_{i,j}' = M_{i,j}^U \left\{ U_{i,j}^k + (a_1)_{i,j}^{k+1} + \sum_{s=2}^5 (a_s)_{i,j}^{k+1} \Delta t + (a_{6,1})_{i,j}^{k+1} \Delta t \right\} \\ V_{i,j}' = M_{i,j}^V \left\{ V_{i,j}^k + (b_1)_{i,j}^{k+1} + \sum_{s=2}^5 (b_s)_{i,j}^{k+1} \Delta t + (b_{6,1})_{i,j}^{k+1} \Delta t \right\} \end{aligned}$$

**TABLA 3.6:** Amplitud y frecuencia angular de las principales mareas de equilibrio en las bandas de marea diurna y semi-diurna. Se indica, para cada una de ellas, el factor  $\alpha = (1 + k_2 - h_2)$ .

	A (m)	$\omega$ (rad/s)	$\alpha = 1 + k_2 + h_2$		A (m)	$\omega$ (rad/s)	$\alpha = 1 + k_2 + h_2$
$s = 2$				$s = 1$			
M <sub>2</sub>	0,242334	1,405189×10 <sup>-4</sup>	0,693	O <sub>1</sub>	0,100661	6,759774×10 <sup>-5</sup>	
S <sub>2</sub>	0,112743	1,454441×10 <sup>-4</sup>	0,693	P <sub>1</sub>	0,046848	7,252295×10 <sup>-5</sup>	
N <sub>2</sub>	0,046397	1,378797×10 <sup>-4</sup>	0,693	K <sub>1</sub>	0,141565	7,292117×10 <sup>-5</sup>	
K <sub>2</sub>	0,030684	1,458423×10 <sup>-4</sup>	0,693	Q <sub>1</sub>	0,019273	6,495854×10 <sup>-5</sup>	

<sup>49</sup> La fase de la marea de equilibrio en Greenwich en el instante de referencia,  $t_0 = 0$ , toma el valor cero.



En las ecuaciones anteriores debe observarse que:

- $\tilde{V}_{i,j}^{k+1}$  denota el valor promedio de la variable  $V$  en el  $U$ -nodo (según [3.43]) y  $\tilde{U}_{i,j}^k$  el promedio de la variable  $U$  en el  $V$ -nodo (según [3.44]).
- En los términos correspondientes a los gradientes de la presión y de las fuerzas generadoras de marea, aceleración convectiva y fricción, se ha utilizado la hipótesis de que la elevación del nivel del mar es despreciable frente a la profundidad total de la columna de agua, para poder aproximar  $H_{i,j} = h_{i,j} + \zeta_{i,j} \approx h_{i,j}$ . Además, se han despreciado los términos métricos provenientes de la curvatura de la Tierra en la aceleración convectiva (Kowalik, 1994) y en la viscosidad turbulenta horizontal.
- El término de fricción con el fondo oceánico se ha calculado en dos partes: La primera, correspondiente a la mitad de la parametrización del término de fricción, a partir del instante de tiempo anterior y, la segunda, a partir del instante de tiempo actual,  $(k+1)$ , determinando las componentes del transporte con la mitad del término de fricción anterior. En ambos casos,  $h_0$  denota la profundidad mínima establecida a priori para este término.
- $R_T$  denota el radio de la Tierra y  $g$  la aceleración de la gravedad.

Con esta formulación, la resolución numérica del sistema se lleva a cabo en  $k = 0, \dots, K$  pasos, incrementándose en tiempo en cada uno desde  $t_0$  hasta  $t_{fin}$ :

- En el instante  $t_0 = 0$ , las variables de estado toman los valores asignados por las condiciones iniciales [3.40] y de frontera [3.46].
- En un paso de tiempo  $k + 1$  impar:
  - Se calcula, para el instante de tiempo  $t_{k+1/2}$ ,  $V_{i,j}^{k+1}$ , de acuerdo a la ecuación [3.47] y con los valores  $U_{i,j}^k$  y  $V_{i,j}^k$  obtenidos en pasos previos.
  - Con los  $V_{i,j}^{k+1}$  obtenidos se calculan los valores promedios  $\tilde{V}_{i,j}^{k+1}$ , según [3.43].
  - Con  $V_{i,j}^{k+1}$  y  $\tilde{V}_{i,j}^{k+1}$ , se calcula  $U_{i,j}^{k+1}$  en  $t_{k+1/2}$  de acuerdo a la ecuación [3.47].
  - Se calcula  $\zeta_{i,j}^{k+1}$ , para el tiempo  $t_{k+1}$ , mediante la ecuación [3.45] en el interior del dominio del modelo y mediante [3.46] sobre sus fronteras abiertas.
- En un paso de tiempo  $k + 1$  par:
  - Se calcula  $U_{i,j}^{k+1}$  para el instante de tiempo  $t_{k+1/2}$  de acuerdo a la ecuación [3.47] y con los valores  $U_{i,j}^k$  y  $V_{i,j}^k$  obtenidos en pasos previos.
  - Con los  $U_{i,j}^{k+1}$  obtenidos se calculan los valores promedios  $\tilde{U}_{i,j}^{k+1}$ , según [3.44].
  - Con  $U_{i,j}^{k+1}$  y  $\tilde{U}_{i,j}^{k+1}$ , se calcula  $V_{i,j}^{k+1}$  en  $t_{k+1/2}$  de acuerdo a la ecuación [3.47].
  - Se calcula  $\zeta_{i,j}^{k+1}$  en  $t_{k+1}$  mediante la ecuación [3.45] en el interior del dominio del modelo y mediante [3.46] sobre sus fronteras abiertas.

En cada nodo de la cuadrícula oceánica, la solución del sistema de ecuaciones discretas producirá un único conjunto de elevaciones de marea (amplitudes complejas), correspondientes a

cada uno de los pasos temporales. La solución final, esto es, el modelo hidrodinámico (que describe las elevaciones de marea en cada nodo de la cuadrícula) se obtiene mediante el análisis armónico de las series temporales, una vez transcurrido el periodo de estabilización.

### b) Método de factorización directa de las SWE linealizadas en el dominio de frecuencias

Al igual que en el método anterior, es conveniente introducir una serie de notaciones que serán utilizadas para la formulación y resolución de las ecuaciones linealizadas de aguas poco profundas en el dominio de frecuencias. Estas notaciones se resumen en la Tabla 3.7.

**TABLA 3.7:** Notaciones utilizadas para la formulación y resolución en el dominio espectral de las SWE linealizadas.

NOTACIONES III: Formulación en el dominio espectral de las SWE linealizadas	
$K$	Número finito de constituyentes armónicos en el modelo oceánico ( $k = 1, \dots, K$ ).
$\omega_k$	Frecuencia del constituyente $k$ .
$\mathbf{x} = (\lambda, \phi)$	Posición en el océano.
$\mathbf{U}^k(\mathbf{x})$	Trasporte horizontal de flujo de la columna de agua, para la onda $k$ , en las direcciones zonal y meridional ( $\mathbf{U}^k = u^k H, \mathbf{V}^k = v^k H$ con $u^k$ y $v^k$ las respectivas componentes de la velocidad). $\mathbf{U}_t$ denota la derivada en el tiempo del vector $\mathbf{U}$ .
$\zeta^k(\mathbf{x})$	Elevación de la marea oceánica para la onda $k$ . $\zeta_t$ denota su derivada en el tiempo.
$\mathbf{S}_k$	Conjunto de operadores en las SWE linealizadas y sus condiciones de frontera. [3.55]
$\mathbf{T}_k$	Véanse ecuaciones [3.56] y [3.57].
$\mathbf{f}_0^k$	$= (\mathbf{f}_0^{\zeta,k} \quad \mathbf{f}_0^{\mathbf{U},k})^T$ , vector que representa:
$\mathbf{f}_0^{\zeta,k}$	Las condiciones de frontera abierta, impuestas sobre la elevación de la marea oceánica, a partir de un modelo preexistente. [3.52] y [3.68]
$\mathbf{f}_0^{\mathbf{U},k}$	Las fuerzas astronómicas ( $f_{EQ}^k$ ), de atracción y carga ( $f_{SAL}^k$ ) y las condiciones de flujo normal cero en las fronteras cerradas. [3.54] y [3.69]
$\kappa$	$\kappa = r/H$ es el coeficiente de fricción lineal (en $s^{-1}$ ). [3.31]

Con estas notaciones, las ecuaciones linealizadas de aguas poco profundas se expresan en forma de transporte ([C.72], Apéndice 1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \zeta_t + \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{U}_t &= -f\mathbf{k} \times \mathbf{U} - gH\nabla\zeta + gH\nabla(\zeta_{SAL} + \zeta_{EQ}) - \kappa\mathbf{U} \end{aligned} \quad [3.48]$$

Las componentes horizontales del transporte y la elevación de marea oceánica pueden expresarse como la suma de  $K$  frecuencias armónicas, de la forma

$$\{U, V, \zeta\}(\lambda, \phi, t) = \mathbb{R} \left\{ \sum_{k=1}^K \{\bar{U}^k, \bar{V}^k, \bar{\zeta}^k\}(\lambda, \phi) e^{i\omega_k t} \right\} \quad [3.49]$$

con  $\bar{U}^k$ ,  $\bar{V}^k$  y  $\bar{\zeta}^k$  que denotan las amplitudes complejas de las componentes  $U$ ,  $V$  y  $\zeta$  para la onda de marea de frecuencia  $\omega_k$ . Para esta onda, las derivadas con respecto al tiempo de las variables anteriores resultan

$$\partial \{U^k, V^k, \zeta^k\}(\lambda, \phi, t) / \partial t = i\omega_k \{\bar{U}^k, \bar{V}^k, \bar{\zeta}^k\}(\lambda, \phi) e^{i\omega_k t} = i\omega_k \{U^k, V^k, \zeta^k\}(\lambda, \phi, t) \quad [3.50]$$

Se considera que las variables de estado para la frecuencia  $\omega_k$  satisfacen el sistema [3.48] en el dominio del modelo,  $\Omega$ , lo que se expresa como

$$\begin{aligned} i\omega_k \bar{\zeta}^k + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}^k \\ \bar{V}^k \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} i\omega_k + \kappa & -f & gH \partial/\partial x \\ f & i\omega_k + \kappa & gH \partial/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}^k \\ \bar{V}^k \\ \bar{\zeta}^k \end{pmatrix} &= gH \nabla (\zeta_{EQ}^k + \zeta_{SAL}^k) \end{aligned} \quad [3.51]$$

Para resolver numéricamente este sistema de ecuaciones es necesario especificar para las variables  $\bar{U}^k$ ,  $\bar{V}^k$  y  $\bar{\zeta}^k$  en  $\Omega$ :

- Sobre las fronteras abiertas,  $\partial\Omega_A$ , las elevaciones de marea proporcionadas por un modelo global (ecuación [3.35]).
- Sobre las fronteras cerradas,  $\partial\Omega_C$ , la condición de flujo normal cero (ecuación [3.38]).

Esto es

$$\bar{\zeta}^k|_{\partial\Omega_A} = \zeta_0^k \quad \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}^k \\ \bar{V}^k \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega_C} = 0 \quad [3.52]$$

En este caso,  $\zeta_0^k$  denota la amplitud de la marea oceánica prescrita por el modelo global y  $\mathbf{n} = (n_\lambda, n_\phi)^T$  el vector normal a la frontera cerrada. Reescribiendo el sistema [3.51] en forma abreviada:

$$\mathbf{S}_k \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}^k \\ \bar{\zeta}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0^{U,k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3.53]$$

donde se han denotado

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_0^{U,k} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gH \nabla (\zeta_{EQ}^k + \zeta_{SAL}^k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3.54]$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_k & gH \nabla \\ \nabla \cdot & i\omega_k \end{pmatrix} \quad [3.55]$$

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} i\omega_k + \kappa & -f \\ f & i\omega_k + \kappa \end{pmatrix} \quad [3.56]$$

El determinante de esta última matriz,  $\det(\mathbf{T}_k) = (i\omega_k + \kappa)^2 + f^2$ , es no nulo si  $\kappa \neq 0$  o  $\omega_k \neq f^{50}$ . En general, bastará considerar  $\kappa \neq 0$  para que exista la inversa de  $\mathbf{T}_k$

$$\mathbf{T}_k^{-1} = \frac{1}{(i\omega_k + \kappa)^2 + f^2} \begin{pmatrix} i\omega_k + \kappa & f \\ -f & i\omega_k + \kappa \end{pmatrix} \quad [3.57]$$

Así, en el dominio de frecuencias, el sistema [3.53] se resuelve:

- Despejando  $(\bar{U}_k, \bar{V}_k)$  en la primera ecuación en términos de  $\bar{\zeta}_k$

<sup>50</sup> Si  $\kappa = 0$  y  $\omega_k = f \equiv 2\omega \sin \phi$  (lo que sucede en la latitud  $\phi = 30^\circ$  cuando la frecuencia del constituyente,  $\omega_k$ , es igual a la frecuencia de Coriolis,  $\omega$ ), entonces el determinante de la matriz [3.56] es cero y, por tanto, se produce una singularidad. Este caso particular se estudiará más adelante.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}^k &= -\mathbf{T}_k^{-1} \left[ gH \nabla \bar{\zeta}^k - gH \nabla (\zeta_{EQ}^k + \zeta_{SAL}^k) \right] = \\ &= \frac{-gH}{(i\omega_k + \kappa)^2 + f^2} \begin{pmatrix} i\omega_k + \kappa & f \\ -f & i\omega_k + \kappa \end{pmatrix} \left( \nabla \bar{\zeta}^k - \nabla (\zeta_{EQ}^k + \zeta_{SAL}^k) \right)\end{aligned}\quad [3.58]$$

- Sustituyendo en la segunda ecuación de [3.53] (primera ecuación en [3.51])

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_k^{-1} gH \nabla \bar{\zeta}^k - i\omega_k \bar{\zeta}^k = \nabla \cdot \mathbf{T}_k^{-1} gH \nabla (\zeta_{EQ}^k + \zeta_{SAL}^k) \quad [3.59]$$

se obtiene una ecuación para una única variable,  $\bar{\zeta}_k$ , que se resuelve con las condiciones de frontera [3.52].

Resolución numérica de las SWE linealizadas mediante la técnica de factorización directa sobre una cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C:

Las ecuaciones [3.59] y [3.52] se resuelven numéricamente sobre una cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C, mediante el método de diferencias finitas<sup>51</sup>. Se emplea la misma notación introducida en el método anterior (Tabla 3.4) omitiendo, en este caso, la dependencia temporal (e introduciendo la dependencia de la frecuencia). El conjunto de variables de estado  $\{\zeta_{i,j}\}$ ,  $\{U_{i,j}\}$ ,  $\{V_{i,j}\}$ , se definen según se muestra en la Figura 3.2. Por simplicidad, en lo que sigue se omiten el subíndice correspondiente al constituyente de marea y la barra superior para denotar que las variables de estado corresponden ahora a su amplitud compleja (véase [3.49]). Nuevamente:

- En los  $\zeta$ -nodos, la topografía del fondo oceánico y las máscaras tierra/agua

$$\mathbf{h}^\zeta = \{h_{i,j}^\zeta : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \mathbf{M}^\zeta = \{M_{i,j}^\zeta : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

se definen directamente a partir de un modelo digital.

- En los  $U$ ,  $V$ -nodos, la topografía del fondo oceánico,  $\mathbf{h}^U = \{h_{i,j}^U\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{h}^V = \{h_{i,j}^V\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , se determinan mediante [3.42] y sus respectivas máscaras  $\mathbf{M}^U = \{M_{i,j}^U\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{M}^V = \{M_{i,j}^V\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , se establecen como tierra si la máscara de cualquier  $\zeta$ -nodo adyacente está establecido como tal, y como agua en caso contrario (véase [3.41]).
- En este caso, los valores promedio de las variables  $U$  ( $V$ ) en los  $V$  ( $U$ )-nodos,  $\tilde{U}_{i,j}$  y  $\tilde{V}_{i,j}$  respectivamente, se definen mediante

$$\begin{cases} \tilde{U}_{i,j} = \frac{(U_{i,j} M_{i,j}^U + U_{i,j+1} M_{i,j+1}^U + U_{i-1,j} M_{i-1,j}^U + U_{i-1,j+1} M_{i-1,j+1}^U)}{(M_{i,j}^V + M_{i,j+1}^V + M_{i-1,j}^V + M_{i-1,j+1}^V)} \\ \tilde{U}_{i,j} = 0 \quad \text{si } M_{i,j}^V = M_{i,j+1}^V = M_{i-1,j}^V = M_{i-1,j+1}^V = 0 \\ \tilde{V}_{i,j} = \frac{(V_{i,j} M_{i,j}^V + V_{i,j-1} M_{i,j-1}^V + V_{i+1,j} M_{i+1,j}^V + V_{i+1,j-1} M_{i+1,j-1}^V)}{(M_{i,j}^U + M_{i,j-1}^U + M_{i+1,j}^U + M_{i+1,j-1}^U)} \\ \tilde{V}_{i,j} = 0 \quad \text{si } M_{i,j}^U = M_{i,j-1}^U = M_{i+1,j}^U = M_{i+1,j-1}^U = 0 \end{cases} \quad [3.60]$$

<sup>51</sup> El tratamiento numérico expuesto en esta Secc. corresponde al implementado en el paquete de programas de cálculo *OSU Tidal Inversion Software* (OTIS) (Egbert y Erofeeva, 2006).

Además, se introducen los operadores **G**, **D**, **C** y **A**, que se definen sobre la cuadrícula descentrada de la siguiente forma (se omite el subíndice  $k$  correspondiente a la frecuencia de marea):

- El operador gradiente  $\mathbf{G} \equiv gH\nabla$  aplica  $\zeta$ -nodos sobre los  $U$  o  $V$ -nodos

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j} \xrightarrow{\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow U}} U_{i,j} &= M_{i,j}^U \frac{g}{R_T \cos \phi_{i,j}^U} \left( \frac{M_{i,j}^\zeta \zeta_{i,j} - M_{i,j-1}^\zeta \zeta_{i,j-1}}{\Delta \lambda} \right) \rightarrow \begin{cases} U_{i,j} = U_{i,j} h_{i,j}^U \\ \tilde{U}_{i,j} = U_{i,j} h_{i,j}^V \end{cases} \\ \zeta_{i,j} \xrightarrow{\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow V}} V_{i,j} &= M_{i,j}^V \frac{g}{R_T} \left( \frac{M_{i,j}^\zeta \zeta_{i,j} - M_{i-1,j}^\zeta \zeta_{i-1,j}}{\Delta \phi} \right) \rightarrow \begin{cases} V_{i,j} = V_{i,j} h_{i,j}^V \\ \tilde{V}_{i,j} = V_{i,j} h_{i,j}^U \end{cases} \end{aligned} \quad [3.61]$$

$\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow U}$ ,  $\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  son matrices bidiagonales y  $\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow U} \{\zeta_{i,j}\}_{i,j}$ ,  $\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow V} \{\zeta_{i,j}\}_{i,j}$  pertenecen a  $\mathbb{C}^N$ .

- El operador **C** multiplicación por  $\mathbf{T}^{-1}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{U \rightarrow U} & \mathbf{C}_{V \rightarrow U} \\ \mathbf{C}_{U \rightarrow V} & \mathbf{C}_{V \rightarrow V} \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} \mathbf{C}_{U \rightarrow U} \equiv \{c_{i,j}^{UU}\} \in \mathbb{C}^{N \times N} & \mathbf{C}_{V \rightarrow U} \equiv \{c_{i,j}^{UV}\} \in \mathbb{C}^{N \times N} \\ \mathbf{C}_{U \rightarrow V} \equiv \{c_{i,j}^{VU}\} \in \mathbb{C}^{N \times N} & \mathbf{C}_{V \rightarrow V} \equiv \{c_{i,j}^{VV}\} \in \mathbb{C}^{N \times N} \end{cases}$$

Los operadores  $\mathbf{C}_{U \rightarrow U}$  y  $\mathbf{C}_{V \rightarrow V}$  se aplican sobre los mismos nodos de la cuadrícula, luego son matrices diagonales. Por el contrario, los operadores  $\mathbf{C}_{V \rightarrow U}$  y  $\mathbf{C}_{U \rightarrow V}$  cruzan los  $U$  y  $V$  nodos y requieren el uso de sus valores promedios. De esta forma, resultan matrices 4-diagonales. Expresado esquemáticamente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{i,j} & \tilde{V}_{i,j} \end{pmatrix} &\xrightarrow{(\mathbf{C}_{U \rightarrow U} \quad \mathbf{C}_{V \rightarrow U})} U_{i,j} = c_{i,j}^{UU} U_{i,j} + c_{i,j}^{UV} \tilde{V}_{i,j} \\ \begin{pmatrix} \tilde{U}_{i,j} & V_{i,j} \end{pmatrix} &\xrightarrow{(\mathbf{C}_{U \rightarrow V} \quad \mathbf{C}_{V \rightarrow V})} V_{i,j} = c_{i,j}^{VU} \tilde{U}_{i,j} + c_{i,j}^{VV} V_{i,j} \end{aligned} \quad [3.62]$$

$$\begin{aligned} c_{i,j}^{UU} &= M_{i,j}^U \left( i\omega + (\kappa^U)_{i,j}^{VV} \right) / \det(\mathbf{T}_{i,j}^U) & c_{i,j}^{UV} &= M_{i,j}^U \left( f_{i,j}^U - (\kappa^U)_{i,j}^{VU} \right) / \det(\mathbf{T}_{i,j}^U) \\ c_{i,j}^{VU} &= -M_{i,j}^V \left( f_{i,j}^V - (\kappa^V)_{i,j}^{UV} \right) / \det(\mathbf{T}_{i,j}^V) & c_{i,j}^{VV} &= M_{i,j}^V \left( i\omega + (\kappa^V)_{i,j}^{UU} \right) / \det(\mathbf{T}_{i,j}^V) \end{aligned}$$

con los determinantes de la matriz **T** en las direcciones  $\lambda$  y  $\phi$  dados por

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{T}_{i,j}^U) &= \left( i\omega + (\kappa^U)_{i,j}^{UU} \right) \left( i\omega + (\kappa^U)_{i,j}^{VV} \right) + \left( f_{i,j}^U - (\kappa^U)_{i,j}^{UV} \right) \left( f_{i,j}^U - (\kappa^U)_{i,j}^{VU} \right) \\ \det(\mathbf{T}_{i,j}^V) &= \left( i\omega + (\kappa^V)_{i,j}^{UU} \right) \left( i\omega + (\kappa^V)_{i,j}^{VV} \right) + \left( f_{i,j}^V - (\kappa^V)_{i,j}^{UV} \right) \left( f_{i,j}^V - (\kappa^V)_{i,j}^{VU} \right) \end{aligned}$$

Las componentes del término de fricción<sup>52</sup> en la dirección  $\lambda$  se obtienen mediante

$$\begin{aligned} (\kappa^U)_{i,j}^{UU} &= (\kappa^U)_{i,j}^{VV} = M_{i,j}^U \left[ C_b u_0 / \max \{h_{i,j}^U, h_0\} \right] \\ (\kappa^U)_{i,j}^{UV} &= (\kappa^U)_{i,j}^{VU} = M_{i,j}^U \left[ \left( C_b u_0 / \max \{h_{i,j}^U, h_0\} \right) \cdot 2,5 \times 10^{-3} \right] \end{aligned} \quad [3.63]$$

Mientras que, en la dirección  $\phi$ , están dadas por

$$\begin{aligned} (\kappa^V)_{i,j}^{UU} &= (\kappa^V)_{i,j}^{VV} = M_{i,j}^V \left[ C_b u_0 / \max \{h_{i,j}^V, h_0\} \right] \\ (\kappa^V)_{i,j}^{UV} &= (\kappa^V)_{i,j}^{VU} = M_{i,j}^V \left[ \left( C_b u_0 / \max \{h_{i,j}^V, h_0\} \right) \cdot 2,5 \times 10^{-3} \right] \end{aligned} \quad [3.64]$$

<sup>52</sup> Generalmente, los valores asignados a la profundidad mínima  $h_0$  y al parámetro  $r = C_b u_0$  se seleccionan mediante la resolución del SWE para un rango de valores de ambos parámetros y la posterior comparación de los resultados con observaciones (Egbert et al., 1994). Los valores más comúnmente utilizados son  $h_0 = 200$  m y  $r = 0,03$  m/s.

Además, se modifica la expresión [3.62] de tal forma que la aplicación de  $\mathbf{C}$  sobre los  $U$  y  $V$ -nodos-frontera sea la identidad, con el fin de implementar las condiciones de frontera. Con esta modificación resulta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{i,j} & \tilde{V}_{i,j} \end{pmatrix} &\xrightarrow{(C_{U \rightarrow U} \quad C_{V \rightarrow U})} U_{i,j} = \left( c_{i,j}^{UU} U_{i,j} + c_{i,j}^{UV} \tilde{V}_{i,j} \right) M_{i,j}^U + U_{i,j} (1 - M_{i,j}^U) \\ \begin{pmatrix} \tilde{U}_{i,j} & V_{i,j} \end{pmatrix} &\xrightarrow{(C_{U \rightarrow V} \quad C_{V \rightarrow V})} V_{i,j} = \left( c_{i,j}^{VU} \tilde{U}_{i,j} + c_{i,j}^{VV} V_{i,j} \right) M_{i,j}^V + V_{i,j} (1 - M_{i,j}^V) \end{aligned} \quad [3.65]$$

Debe señalarse que, en las expresiones anteriores se ha considerado que:

- 1) La frecuencia del constituyente  $k$  no es igual al parámetro de Coriolis.
- 2) La velocidad de fricción  $u_0$  es constante en el dominio del modelo.

Más adelante se estudiarán variaciones a estas dos opciones.

- El operador divergencia  $\mathbf{D} \equiv \nabla \cdot$  que aplica  $U$  y  $V$ -nodos sobre el  $\zeta$ -nodo adyacente (si  $M_{i,j}^\zeta = 1$ ) a partir de los cuatro  $U$  y  $V$ -nodos circundantes, de tal forma que  $\mathbf{D}_{U \rightarrow \zeta}, \mathbf{D}_{V \rightarrow \zeta} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  son matrices 2-diagonales dadas por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_{i,j} \\ V_{i,j} \end{Bmatrix} &\xrightarrow[\mathbf{D}_{V \rightarrow \zeta}]{\mathbf{D}_{U \rightarrow \zeta}} \zeta_{i,j} \\ \zeta_{i,j} &= \frac{1}{R_T \cos \phi_{i,j}^U} \left( \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta \lambda} \right) + \frac{1}{R_T \cos \phi_{i,j}^U} \left( \frac{V_{i+1,j} \cos \phi_{i+1,j}^V - V_{i,j} \cos \phi_{i,j}^V}{\Delta \phi} \right) \end{aligned} \quad [3.66]$$

con  $\mathbf{D}_{U \rightarrow \zeta} \{U_{i,j}\}_{i,j}, \mathbf{D}_{V \rightarrow \zeta} \{V_{i,j}\}_{i,j} \in \mathbb{C}^N$ .

- El operador concatenación de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{G}$  más un término  $i\omega$  ( $\mathbf{A} = \mathbf{DCG} - i\omega$ ) aplica  $\zeta$ -nodos sobre  $\zeta$ -nodos. De esta forma  $\mathbf{A}_{\zeta \rightarrow \zeta} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  en una matriz 9-diagonal. Por las construcciones anteriores, la aplicación de  $\mathbf{A}$  sobre los  $\zeta$ -nodos es cero y, además, se establece que sobre los nodos frontera abierta el operador  $\mathbf{A}$  sea la identidad.

Finalmente, designando por  $\mathbf{f}_0^\zeta$  el vector definido sobre los  $\zeta$ -nodos compuesto por las elevaciones de marea proporcionadas por el modelo global en los nodos frontera abierta (primera ecuación en [3.52]) y con las definiciones establecidas para los operadores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{D}$  y la definición de  $\mathbf{f}_0^U$  ([3.54] y [3.69]), la solución del sistema [3.53] con las condiciones de frontera [3.52] se obtiene mediante

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_0^\zeta + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{DC} \mathbf{f}_0^U \\ -\mathbf{CG} \zeta + \mathbf{C} \mathbf{f}_0^U \end{pmatrix} \quad [3.67]$$

El cálculo práctico del proceso anterior se llevaría a cabo, para el constituyente de marea  $k$ , mediante los siguientes pasos:

- I. Cálculo de las fuerzas de marea, de atracción y carga oceánica y condiciones de frontera (abiertas y cerradas). Asignación en el vector de parámetros  $\mathbf{b}$ .
  - 1) Se establecen sobre los  $\zeta$ -nodos-frontera-abierta las elevaciones de marea a partir del modelo preexistente

$$f_{i,j}^{0,k} = \zeta_{i,j}^0 \quad \forall (i,j) \in \partial\Omega_A \quad [3.68]$$

2) Sobre los  $U, V$ -nodos se calculan las fuerzas de marea

$$f_{i,j}^{U,k} = (f_{EQ}^k)^U_{i,j} + (f_{SAL}^k)^U_{i,j} \quad f_{i,j}^{V,k} = (f_{EQ}^k)^V_{i,j} + (f_{SAL}^k)^V_{i,j} \quad [3.69]$$

donde:

- $f_{EQ}^k$  denota el gradiente de la  $k$ -ésima marea de equilibrio ( $gH\nabla\zeta_{EQ}^k$ )

$$\begin{aligned} (f_{EQ}^k)^{U,s}_{i,j} &= M_{i,j}^U (gh_{i,j}^U/R_T) \alpha^{k,s} A^{k,s} e^{i(\lambda_{i,j}^U s + G^{k,s})} (2i) L_{i,j}^{s,U} \\ (f_{EQ}^k)^{V,s}_{i,j} &= M_{i,j}^V (gh_{i,j}^V/R_T) \alpha^{k,s} A^{k,s} e^{i(\lambda_{i,j}^V s + G^{k,s})} 2L_{i,j}^{s,V} \end{aligned}$$

con  $L_{i,j}^{s,U}$  y  $L_{i,j}^{s,V}$  que denotan las funciones definidas para cada especie de marea diurna ( $s = 1$ ) o semi-diurna ( $s = 2$ ) en las direcciones  $\lambda$  y  $\phi$ , respectivamente, por

$$L_{i,j}^{s,U} = \begin{cases} \cos(\pi/2 - \phi_{i,j}^U) & s = 1 \\ \sin(\pi/2 - \phi_{i,j}^U) & s = 2 \end{cases} \quad L_{i,j}^{s,V} = \begin{cases} 2\sin^2(\pi/2 - \phi_{i,j}^V) - 1 & s = 1 \\ -\sin(\pi/2 - \phi_{i,j}^V) \cos(\pi/2 - \phi_{i,j}^V) & s = 2 \end{cases}$$

Para los principales constituyentes en las bandas de marea diurna y semi-diurna los valores de  $A^{k,s}$ ,  $\omega^{k,s}$  y  $\alpha^{k,s}$  están listados en la Tabla 3.6.

- $f_{SAL}^k$  representa el gradiente de la carga y atracción oceánica para el constituyente armónico  $k$  ( $gH\nabla\zeta_{SAL}^k$ ), calculado a través de una solución preexistente

$$(f_{SAL}^k)^U_{i,j} = M_{i,j}^U \frac{gh_{i,j}^U}{R_T \cos\phi_{i,j}^U} \left( \frac{\zeta_{i,j}^{SAL} - \zeta_{i,j-1}^{SAL}}{\Delta\lambda} \right) \quad (f_{SAL}^k)^V_{i,j} = M_{i,j}^V \frac{gh_{i,j}^V}{R_T} \left( \frac{\zeta_{i,j}^{SAL} - \zeta_{i-1,j}^{SAL}}{\Delta\phi} \right)$$

Con las expresiones anteriores se tiene que sobre los  $U$ -nodos-fronteras-cerradas ( $M_{i,j}^U = 0$ )

$f_{i,j}^U = 0$ . Análogamente, si  $M_{i,j}^V = 0$  resulta  $f_{i,j}^V = 0$ .

- 3) Se promedian  $f_{i,j}^U, f_{i,j}^V$  sobre  $V, U$ -nodos mediante las expresiones [3.60]. El resultado de esta operación se denota por  $\tilde{f}_{i,j}^U, \tilde{f}_{i,j}^V$ .
- 4) Se aplica el operador **C** a  $\tilde{f}_{i,j}^U, \tilde{f}_{i,j}^V$  mediante [3.65] (usando los promedios  $\tilde{f}_{i,j}^U, \tilde{f}_{i,j}^V$ ). El resultado se denota por  $f_{i,j}^{2,U}, f_{i,j}^{2,V}$  y, por su construcción, se garantiza que sobre las fronteras cerradas  $f_{i,j}^{2,U} = f_{i,j}^U, f_{i,j}^{2,V} = f_{i,j}^V$ .
- 5) Se aplica el operador **D** a  $f_{i,j}^{2,U}, f_{i,j}^{2,V}$  mediante [3.66]. El resultado se denota por  $\zeta_{i,j}^1$  y es tal que sobre los  $\zeta$ -nodos-frontera-abierta  $\zeta_{i,j}^1 = f_{i,j}^{0,l}$  y sobre los  $\zeta$ -nodos de tierra ( $M_{i,j}^\zeta = 0$ ) y/o fronteras cerradas ( $M_{i,j}^U = 0 / M_{i,j}^V = 0$ )  $\zeta_{i,j}^1 = 0$ .

Con el paso I se ha obtenido el vector de parámetros  $\mathbf{b} = \mathbf{f}_0^\zeta + \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{f}_0^U = \{\zeta_{i,j}^1\}$  expresado como un vector en  $\mathbb{C}^N$  (correspondiente al segundo miembro de la primera ecuación en [3.67] o, equivalentemente, [3.59] junto con las CFA).

II. Cálculo de la matriz de diseño  $\mathbf{A}$  (del sistema  $\mathbf{A}\zeta = \mathbf{b}$ , para la variable incógnita  $\zeta$ ). Para ello, se determina el operador resultado de la composición de:

- La matriz  $\mathbf{G} \equiv \{\mathbf{G}_{\zeta \rightarrow U}, \mathbf{G}_{\zeta \rightarrow V}\}$ , especificadas por [3.61]. Los  $\zeta$ -nodos de tierra, fronteras abiertas y cerradas se excluyen en este operador a través de las máscaras de tierra/agua  $\mathbf{M}^\zeta$ ,  $\mathbf{M}^U$  y  $\mathbf{M}^V$ .
- El operador  $\mathbf{C}$  actuando sobre  $\mathbf{G}$ , según [3.65].
- El operador  $\mathbf{D}$  actuando sobre  $\mathbf{C}\mathbf{G}$ , según [3.66].
- La substracción de  $i\omega_k$ . Esto es,  $\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{G} - i\omega_k$ .

El resultado es una matriz  $\mathbf{A}$  9-diagonal de dimensión  $N$ , o matriz de diseño del sistema de ecuaciones  $\mathbf{A}\zeta = \mathbf{b}$ , definida tal que la aplicación de  $\mathbf{A}$  en  $\zeta$ -nodos de tierra ( $M_{i,j}^\zeta = 0$ ) es cero y en  $\zeta$ -nodos-frontera-abierta es la identidad.

III. La solución  $\zeta$  al sistema  $\mathbf{A}\zeta = \mathbf{b}$  se obtiene mediante factorización directa de la matriz  $\mathbf{A}$  o descomposición LU (acrónimo del inglés Lower-Upper, p. ej., Golub y Van Loan, 1996). De aquí recibe el nombre la técnica de *método de factorización directa* (Egbert y Erofeeva, 2002).

IV. Finalmente, con las elevaciones de marea calculadas se obtienen las componentes del transporte (según [3.67]).

- 1) Para el cálculo del término  $-\mathbf{C}\mathbf{G}\zeta$  en la segunda ecuación de [3.67], se aplica el operador  $-\mathbf{G}$  (según [3.61]) a las elevaciones de marea obtenidas en el paso anterior,  $\zeta$ . Los valores resultantes, que se denotan por  $U_{i,j}^1$  y  $V_{i,j}^1$ , se promedian sobre  $V$ ,  $U$ -nodos mediante las expresiones [3.60], dando lugar a  $\tilde{U}_{i,j}^1$  y  $\tilde{V}_{i,j}^1$ , respectivamente. Aplicando el operador  $\mathbf{C}$  a  $U_{i,j}^1$  y  $V_{i,j}^1$  (mediante [3.65] y usando los promedios  $\tilde{U}_{i,j}^1$  y  $\tilde{V}_{i,j}^1$ ) se obtienen  $U_{i,j}^2$  y  $V_{i,j}^2$ .
- 2) Para el cálculo del término  $\mathbf{C}\mathbf{f}_0^U$  en la segunda ecuación de [3.67], se aplica el operador  $\mathbf{C}$  (según [3.65]) a las fuerzas calculadas en [3.69] y sus promedios. Los resultados se denotan  $U_{i,j}^3$  y  $V_{i,j}^3$ .
- 3) Sumando las componentes obtenidas en los dos pasos anteriores se obtiene el vector transporte,  $\mathbf{U}$ , solución final.

En el procedimiento anterior deben tenerse en cuenta las siguientes situaciones:

- a) La frecuencia del constituyente armónico es igual al parámetro de Coriolis  $f$  cuando la latitud toma el valor  $\phi \sim 30^\circ$  y  $\omega_k = \omega = 7.292.115 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ . En este caso, se asigna a todos los  $U, V$ -nodos de la cuadrícula el siguiente valor mínimo



$$b_{i,j}^{c,U} = 1 \times 10^{-5} \left[ e^{-i(\phi_{i,j}^U - \phi^c)^2/2} + e^{-i(\phi_{i,j}^U + \phi^c)^2/2} \right] \quad b_{i,j}^{c,V} = 1 \times 10^{-5} \left[ e^{-i(\phi_{i,j}^V - \phi^c)^2/2} + e^{-i(\phi_{i,j}^V + \phi^c)^2/2} \right]$$

Así, si las componentes del término de fricción en la dirección  $\lambda$  (ecuación [3.63]) son inferiores a  $b_{i,j}^{c,U}$ , estas se reemplazan por

$$\text{Si } (\kappa^U)_{i,j}^{UU} < b_{i,j}^{c,U} \Rightarrow \begin{cases} (\kappa^U)_{i,j}^{UU} = b_{i,j}^{c,U} \\ (\kappa^U)_{i,j}^{UV} = 0 \end{cases} \quad \text{Si } (\kappa^U)_{i,j}^{VV} < b_{i,j}^{c,U} \Rightarrow \begin{cases} (\kappa^U)_{i,j}^{VV} = b_{i,j}^{c,U} \\ (\kappa^U)_{i,j}^{VU} = 0 \end{cases}$$

Análogamente, en la dirección  $\phi$  (ecuación [3.64])

$$\text{Si } (\kappa^V)_{i,j}^{UU} < b_{i,j}^{c,V} \Rightarrow \begin{cases} (\kappa^V)_{i,j}^{UU} = b_{i,j}^{c,V} \\ (\kappa^V)_{i,j}^{UV} = 0 \end{cases} \quad \text{Si } (\kappa^V)_{i,j}^{VV} < b_{i,j}^{c,V} \Rightarrow \begin{cases} (\kappa^V)_{i,j}^{VV} = b_{i,j}^{c,V} \\ (\kappa^V)_{i,j}^{VU} = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, en la construcción del modelo oceánico de Canarias CIAM2 (Cap. 5), cuyo dominio se encuentra comprendido entre las latitudes 26,5°N y 30°N, la implementación numérica del método de factorización directa conlleva que se produzcan situaciones críticas para los constituyentes armónicos y latitudes listadas en la Tabla 3.8. Para evitar la singularidad que se produce en estas situaciones, se ha garantizado que el término de fricción del fondo sea no nulo según se ha descrito anteriormente.

- b) Si la velocidad de fricción,  $u_0$ , se considera dependiente de la posición en el dominio del modelo, ésta se reemplaza en [3.63] y [3.64] por una velocidad de fricción dependiente de la posición en el dominio del modelo,  $u_0 \equiv u_0(\lambda, \phi)$ , obtenida mediante el siguiente proceso:

- Sean  $u_{i,j}^k$  y  $v_{i,j}^k$  las componentes de la velocidad (expresadas en forma de amplitud compleja) en la dirección zonal y meridional, respectivamente, para el constituyente de marea  $k$ , obtenidas a partir de un modelo preliminar<sup>53</sup>. Para cada componente  $u$  ( $v$ ) se denotan por  $\bar{u}_{i,j}^k$  y  $G_{i,j}^{u,k}$  ( $\bar{v}_{i,j}^k$  y  $G_{i,j}^{v,k}$ ) la amplitud y fase correspondientes

$$\begin{cases} \bar{u}_{i,j}^k = |u_{i,j}^k| \\ G_{i,j}^{u,k} = \arctan \left[ \frac{\text{Im}(u_{i,j}^k)}{\text{Re}(u_{i,j}^k)} \right] \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \bar{v}_{i,j}^k = |v_{i,j}^k| \\ G_{i,j}^{v,k} = \arctan \left[ \frac{\text{Im}(v_{i,j}^k)}{\text{Re}(v_{i,j}^k)} \right] \end{cases}$$

Denotando por  $\Delta t$  el tamaño del paso temporal (en s),  $t_n = n\Delta t$  el instante de tiempo  $n$ -ésimo, con  $n = 1, \dots, N$  el número de pasos tal que  $t_{\text{fin}} = N\Delta t$  es el instante final. Para cada paso temporal  $n$ , se calculan las componentes totales de la velocidad como suma de  $K$  frecuencias armónicas

$$u_{i,j}^{t_n} = \sum_{k=1}^K \bar{u}_{i,j}^k \cos(\omega_k t_n + G_{i,j}^{u,k}) \quad v_{i,j}^{t_n} = \sum_{k=1}^K \bar{v}_{i,j}^k \cos(\omega_k t_n + G_{i,j}^{v,k})$$

<sup>53</sup> Generalmente, el valor de la velocidad de fricción constante utilizado para obtener un modelo preliminar se considera más alto que los reales, con el fin de estabilizar los cálculos, sin que esto afecte a las elevaciones de marea. Además, si el modelo preliminar proporciona las componentes del transporte ( $U_{i,j}^k$  y  $V_{i,j}^k$ ) en lugar de la velocidad, entonces será  $u_{i,j}^k = U_{i,j}^k / \max\{h_{i,j}^u, h_0\}$ ,  $v_{i,j}^k = V_{i,j}^k / \max\{h_{i,j}^v, h_0\}$ , siendo  $h_0$  una profundidad mínima establecida, frecuentemente a 10 m.

Asimismo, se calcula el promedio de las componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  en  $V$  y  $U$ -nodos

$$\tilde{u}_{i,j}^{t_n} = (u_{i,j}^{t_n} + u_{i,j+1}^{t_n} + u_{i-1,j+1}^{t_n} + u_{i-1,j}^{t_n})/4 \quad \tilde{v}_{i,j}^{t_n} = (v_{i,j}^{t_n} + v_{i,j-1}^{t_n} + v_{i+1,j-1}^{t_n} + v_{i+1,j}^{t_n})/4$$

- Entonces, las componentes de la velocidad de fricción en la ecuación, para la dirección  $\lambda$  vienen, dadas por

$$\begin{aligned} (u_0^U)_{i,j}^{UU} &= \sum_{t=t_0}^{t_{\text{fin}}} \sqrt{(u_{i,j}^t)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^t)^2} / N + \sum_{t=t_0}^{t_{\text{fin}}} (u_{i,j}^t)^2 / N \sqrt{(u_{i,j}^t)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^t)^2} \\ (u_0^U)_{i,j}^{UV} &= (u_0^U)_{i,j}^{VU} = \sum_{t=t_0}^{t_{\text{fin}}} u_{i,j}^t \tilde{v}_{i,j}^t / N \sqrt{(u_{i,j}^t)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^t)^2} \\ (u_0^U)_{i,j}^{VV} &= \sum_{t=t_0}^{t_{\text{fin}}} \sqrt{(u_{i,j}^t)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^t)^2} / N + \sum_{t=t_0}^{t_{\text{fin}}} (\tilde{v}_{i,j}^t)^2 / N \sqrt{(u_{i,j}^t)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^t)^2} \end{aligned} \quad [3.70]$$

La primera ecuación corresponde al coeficiente de la variable  $U$ , mientras que la segunda al coeficiente de la variable  $V$ , ambas en la dirección  $\lambda$ . Cada uno de los sumandos en las expresiones anteriores corresponde a las componentes de la velocidad  $u_0$  en  $U$ -nodos.

Expresiones análogas a éstas pueden obtenerse para la dirección  $\phi$ .

**TABLA 3.8:** *Constituyentes armónicos y latitudes críticas para la implementación del método de factorización directa del dominio del modelo oceánico CIAM2 (Cap. 5).*

Onda	$\omega_k$	Latitud crítica, $\phi^\circ$ (en grados)
K <sub>1</sub>	1.1714292E-09	30,00053
O <sub>1</sub>	5.3222539E-06	27,61359
P <sub>1</sub>	3.9704901E-07	29,82004

### 3.4.2 Construcción del Modelo Inverso o Solución Final

El esquema de asimilación de datos seguido para la obtención del modelo inverso se basa, fundamentalmente, en la teoría del problema inverso generalizado (GI). En este caso, el problema GI se desarrolla bajo la consideración de las incertidumbres en la dinámica y en las observaciones, mediante una formulación mínimos cuadrados variacional basada, a su vez, en el método de los representantes (Bennett y McIntosh, 1982; Egbert et al., 1994). Los principios fundamentales del método, su desarrollo y justificaciones teóricas se encuentran ampliamente detallados en numerosa bibliografía (Tabla D.1 en Apéndice 1). Por esta razón, en esta Sección sólo se presentan los aspectos básicos del método y su resolución práctica.

### 3.4.2.1 Especificación del Espacio Modelo, el Conjunto de Datos y la Función Coste

**TABLA 3.9:** Notaciones utilizadas para la formulación del procedimiento de asimilación de datos.

NOTACIONES IV: Formulación del procedimiento de asimilación de datos	
$N$	$= m \times n$ . Número de nodos en la cuadrícula oceánica
$S$	Conjunto de operadores en las SWE. [3.71] y [3.74]
$\mathbf{f}_0$	Vector que representa las fuerzas en las SWE. [3.71] y [3.74]
$\mathbf{u}^k(\mathbf{x})$	Vector $3 \times N$ -dimensional de variables de estado que caracteriza la onda de marea $k$ . Éstas son funciones complejas dependientes de la posición en el espacio y corresponden a:
$U^k, V^k$	Las componentes horizontales del vector transporte del flujo de agua en las direcciones zonal y meridional, respectivamente.
$\zeta^k$	La elevación de la marea oceánica para la onda $k$ .
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	$= (\mathbf{u}^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}^K(\mathbf{x}))$ . Vector de dimensión $3K \times N$ de las variables de estado para los $K$ constituyentes de marea. [3.71]
$\tau$	<i>Espacio modelo</i> formado por todos los posibles modelos $\mathbf{u}$ .
$\mathbf{u}_{\text{ver}}$	Valor verdadero de la variable incógnita.
$\mathbf{u}_0$	Modelo dinámico a priori, obtenido mediante la resolución de las SWE.
$\mathbf{d}$	$= (d_1, \dots, d_L)$ . Vector de datos observados de dimensión $L$ .
$L$	$= [L_1 \dots L_L]$ . Conjunto de funcionales lineales que relacionan los datos con $\mathbf{u}$ . [3.73] y [3.72]
$J$	Función coste. [3.75]
$\hat{\mathbf{u}}$	Mínimo de la función $J$ , solución final. [3.76]
$\delta \mathbf{f}$	Vector de error de la dinámica, $\delta \mathbf{f} = \{\delta \mathbf{f}_I, \delta \mathbf{f}_C, \delta \mathbf{f}_A\}$
$\delta \mathbf{f}_I$	Vector de errores en las ecuaciones hidrodinámicas.
$\delta \mathbf{f}_C$	Vector de errores en las condiciones de frontera cerrada y contornos costeros.
$\delta \mathbf{f}_A$	Vector de errores en las condiciones de frontera abierta.
$E[\cdot]$	Esperanza matemática.
$\text{var}(\cdot)$	Varianza.
$\mathbf{C}_f$	Matriz covarianza de error de la dinámica, $\mathbf{C}_f = \{\mathbf{C}_I, \mathbf{C}_C, \mathbf{C}_A\}$ :
$\mathbf{C}_I$	Covarianza de los errores en las ecuaciones hidrodinámicas.
$\mathbf{C}_C$	Covarianza de los errores en las condiciones de frontera cerrada y contornos costeros.
$\mathbf{C}_A$	Covarianza de los errores en las condiciones de frontera abierta.
$\mathbf{r}$	$= (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L)$ . Vector de los representantes. [3.76], [3.93]
$\boldsymbol{\beta}$	$= (\beta_1, \dots, \beta_L)$ . Vector de coeficientes de los representantes. [3.76] y [3.88]
$\mathbf{C}_\varepsilon$	Matriz covarianza de error en los datos.

Con las notaciones introducidas, el sistema de ecuaciones [3.16] a [3.18] y las condiciones de frontera [3.35] o [3.36] y [3.37] y [3.38], se expresan en forma abreviada como

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{f}_0 \quad [3.71]$$

siendo  $\mathbf{u}$  el vector de las variables de estado incógnita para los  $K$  constituyentes de marea. Se designa por *espacio modelo*,  $\tau$ , al formado por todos los valores posibles del conjunto de variables de estado que caracterizan el sistema. Cada elemento  $\mathbf{u}$  de  $\tau$  se denomina *modelo*. Por otra parte, cada valor observado  $d_l$  está relacionado con los elementos de  $\tau$  mediante un funcional lineal,  $L_l$ . Para el vector de datos  $\mathbf{d}$  esto se expresa como

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}[\mathbf{u}] \quad [3.72]$$

siendo  $\mathbf{L} = [L_1 \dots L_L]$  el conjunto de los  $L$  funcionales que relacionan los datos observados con  $\mathbf{u}$ . En particular, en el caso de las medidas in situ y de las procedentes de satélite, por valor observado se entiende la elevación de marea, analizada armónicamente, en un emplazamiento dado,  $\mathbf{x}_l$ , por lo que el funcional se escribe

$$d_l = \zeta(\mathbf{x}_l) = (\zeta^1(\mathbf{x}_l), \dots, \zeta^K(\mathbf{x}_l)) = L_l[\mathbf{u}(\mathbf{x})] \quad [3.73]$$

donde el funcional  $L_l$  es el vector  $N$ -dimensional con la componente  $l$ -ésima igual a uno y el resto cero.

Expresando conjuntamente [3.71] y [3.72], se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad [3.74]$$

Aunque teóricamente es posible encontrar una solución exacta (y única),  $\mathbf{u}_0$ , al sistema de ecuaciones [3.71], en general, ningún modelo  $\mathbf{u}$ , satisface exactamente el conjunto completo de ecuaciones [3.74]. Por una parte, debido a los errores introducidos en la dinámica (por la parametrización de la fricción con el fondo oceánico, por la batimetría, etc.) el modelo verdadero,  $\mathbf{u}_{\text{ver}}$ , no satisfará exactamente las ecuaciones hidrodinámicas consideradas. Por otra parte, puesto que los datos observados contienen ruido y otras señales cuyo origen no es de marea, los datos tampoco se ajustarán exactamente. Así, como ningún  $\mathbf{u}$  satisface exactamente [3.74], el objetivo será encontrar una solución  $\mathbf{u}$  que sea razonablemente consistente con la dinámica y con los datos observados. Siguiendo el método de inversión generalizada (GI), dicha solución se obtendrá minimizando una *función coste*,  $J$ .

Especificación de la función coste:

Sean  $\mathbf{C}_e$  y  $\mathbf{C}_f$  las covarianzas de los errores en los datos y en la dinámica, respectivamente, que expresan la incertidumbre a priori sobre la magnitud y la estructura espacial de los respectivos errores (en la Secc. siguiente se especificarán estos errores y sus correspondientes varianzas). La función coste se define por (Egbert y Erofeeva, 2002)

$$J[\mathbf{u}] = (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{d})^* \mathbf{C}_e^{-1} (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{d}) + (\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0)^* \mathbf{C}_f^{-1} (\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0) \quad [3.75]$$

Por ser los funcionales que conforman  $\mathbf{L}$  lineales,  $J$  es cuadrática. El uso de las covarianzas de error como pesos, garantiza que el mínimo de la función [3.75] sea el estimador mínima varianza. En el caso de que la distribución de los errores estadísticos se considere gaussiana, este estimador será de máxima verosimilitud.

### 3.4.2.2 Minimización de la Función Coste mediante el Método de los Representantes

Este método, introducido en el contexto de la modelización hidrodinámica por Bennett (1992), se utiliza para encontrar el mínimo de la función coste dada por [3.75]. Si el sistema de ecuaciones [3.71] es lineal, la solución (única) a este problema se encuentra mediante el uso de la geometría en

un *espacio de Hilbert*<sup>54</sup> y la *teoría de los núcleos reproductores* (p. ej., Wahba y Wendelberger, 1980). La elección de este tipo de espacios se debe, principalmente, a que los problemas de optimización (como la minimización de una norma) es simple, ya que es única y, en muchos casos, linealmente relacionada con los datos (Parker et al., 1987). El espacio de Hilbert considerado, que corresponde al espacio modelo, contendrá un núcleo reproductivo<sup>55</sup> y sus propiedades se utilizarán para construir la solución. El método se basa, fundamentalmente, en que el mínimo de [3.75],  $\hat{\mathbf{u}}$ , puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \sum_{l=1}^L \beta_l \mathbf{r}_l \quad [3.76]$$

donde  $\mathbf{u}_0$  es el modelo a priori, solución a las ecuaciones hidrodinámicas [3.71] y  $\mathbf{r}_l$  son los denominados **representantes** para los funcionales  $L_l$  en [3.72] y  $\beta_l$  sus respectivos coeficientes (Yosida, 1980).

#### I. Justificación teórica de la expresión [3.76]:

Se consideran el espacio  $\tau$  y la función coste  $J$  definida en [3.75]. El operador  $\mathbf{C}_f$ , bajo ciertas consideraciones de regularidad, puede utilizarse para definir un producto interno en  $\tau$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\tau} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{S}\mathbf{u}_1](\mathbf{x})^* \mathbf{C}_f^{-1} [\mathbf{S}\mathbf{u}_2](\mathbf{x}) ds \quad [3.77]$$

con  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \tau$  en el interior del dominio o sobre su frontera (esto es,  $\bar{\Omega}$ ). Puede demostrarse (Egbert et al., 1994) que la norma asociada a este producto escalar es finita y que  $\tau$  con este producto interno es completo y, por tanto, un espacio de Hilbert. Además,  $\tau$  poseerá un núcleo reproductivo completamente determinado por el producto interno en el espacio. Por otra parte,  $\mathbf{C}_f$  puede definirse como un operador lineal que actúa sobre los elementos  $\mathbf{u} \in \tau$ , de la forma

$$\mathbf{C}_f [\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \int_{\bar{\Omega}} C_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') ds \quad [3.78]$$

con  $C_f$  la función covarianza de pares de puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  en  $\bar{\Omega}$ . Si se considera, por hipótesis, que  $\mathbf{C}_f$  tiene inversa,  $\mathbf{C}_f^{-1}$ , que está bien definida y que ambos operadores son auto-adjuntos, entonces se verifica que  $\mathbf{C}_f$  es el núcleo reproductivo para dicho producto interno<sup>56</sup>. Obsérvese que, con [3.71], [3.77] y [3.78]

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \rangle_{\tau} = \int_{\bar{\Omega}} [\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0](\mathbf{x})^* \mathbf{C}_f^{-1} [\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}_0](\mathbf{x}) ds \quad [3.79]$$

En este contexto, como  $L_l$  es un funcional lineal continuo que actúa sobre las funciones  $\mathbf{u}$  en el espacio  $\tau$ , por el **teorema de representación de espacios de Hilbert** existe un  $\mathbf{r}_l$  en  $\tau$  tal que (p. ej. Yosida, 1980; Parker, 1994)

<sup>54</sup> Un **espacio de Hilbert** es un espacio dotado con un producto interno completo (es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente) bajo la norma inducida por el producto interno (Akhiezer y Glazman, 1963).

<sup>55</sup> Un **espacio de Hilbert con núcleo reproductivo** (RKHS, **Reproducing Kernel Hilber Space**) es un espacio de Hilbert en el que todas las evaluaciones puntuales ( $L_x[\mathbf{u}] \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ) son funcionales lineales continuos (acotados).

<sup>56</sup> El teorema de Moore-Aronszajn (Aronszajn, 1950) establece que, para cada función definida positiva  $\mathbf{C}_f$  sobre  $\Omega \times \Omega$ , existe un único RKHS y viceversa. Además, para cada  $\mathbf{C}_f$  definida positiva sobre  $\Omega \times \Omega$ , existe un proceso Gaussiano de media cero, siendo  $\mathbf{C}_f$  su covarianza (Parzen, 1970; Kimeldorf y Wahba, 1971; Wahba, 1990).

$$\forall \mathbf{u} \in \tau \quad d_l = \mathbf{r}_l^T [\mathbf{u} - \mathbf{u}_0] \quad l = 1, \dots, L \quad [3.80]$$

siendo  $\mathbf{r}_l$  el *representante en el espacio modelo asociado con el funcional de los datos*  $L_l$ . De esta forma, la función coste [3.75] se expresa completamente en términos del producto interno en  $\tau$

$$J[\mathbf{u}] = (\langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle_\tau - \mathbf{d})^* \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} (\langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle_\tau - \mathbf{d}) + \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \rangle_\tau \quad [3.81]$$

con  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_l)_{l=1, \dots, L}$ . Con esta definición de  $J$ , el problema se plantea ahora de la forma:

“Encontrar  $\mathbf{u} \in \tau$  tal que satisfaga [3.80] y verifique que  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\tau$  sea mínimo”

Se considera el vector  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  ( $\mathbf{v} \in \tau$ ) y su producto interno con  $\mathbf{r}_l$  (a partir de [3.80] y [3.73])

$$\langle \mathbf{r}_l, \mathbf{v} \rangle_\tau = \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \rangle_\tau = L_l[\mathbf{u}] - \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{u}_0 \rangle_\tau = \zeta(\mathbf{x}_l) - \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{u}_0 \rangle_\tau \quad [3.82]$$

Supuestos conocidos los  $\mathbf{r}_l$  (lo que se deducirá más adelante) el problema se reduce a encontrar los elementos de  $\mathbf{v}$  de norma mínima. Para ello, se tiene en cuenta que los representantes  $\mathbf{r}_l$  con  $l = 1, \dots, L$  son linealmente independientes y forman una base para un espacio vectorial  $V$   $L$ -dimensional, subespacio de  $\tau$  (Parker et al., 1987). Por el *teorema de descomposición para los espacios de Hilbert* (p. ej., Luenberger, 1969), cualquier elemento del espacio modelo y, en particular,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ , puede expresarse como la suma de dos partes

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_V + \mathbf{v}_{V^\perp} \quad [3.83]$$

la primera parte,  $\mathbf{v}_V$ , yaciendo sobre  $V$  y la segunda,  $\mathbf{v}_{V^\perp}$ , sobre su complemento ortogonal (denotado por  $V^\perp$ ). Obviamente, se verifica que  $\langle \mathbf{v}_V, \mathbf{v}_{V^\perp} \rangle_\tau = 0$  y, por tanto,  $\|\mathbf{v}\|_\tau^2 = \|\mathbf{v}_V\|_\tau^2 + \|\mathbf{v}_{V^\perp}\|_\tau^2$ . Teniendo en cuenta que  $\langle \mathbf{r}_l, \mathbf{v}_{V^\perp} \rangle_\tau = 0$  para todo  $l$ , se tendrá que

$$\zeta(\mathbf{x}_l) - \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{u}_0 \rangle_\tau = \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{v} \rangle_\tau = \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{v}_V \rangle_\tau + \langle \mathbf{r}_l, \mathbf{v}_{V^\perp} \rangle_\tau = L_l[\mathbf{v}_V] \quad [3.84]$$

Esto es, los términos ortogonales no afectan a la función coste y así, para obtener la norma mínima para todo  $l$ , éstos deben elegirse igual a cero. Puesto que los  $\mathbf{r}_l$  forman una base del espacio  $V$ , el vector  $\mathbf{v}$  se expresa como una combinación lineal de representantes

$$\mathbf{v}_V = \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \sum_{l=1}^L \beta_l \mathbf{r}_l \quad [3.85]$$

De esta forma, la solución final  $\mathbf{u}$  se obtiene como la suma de la solución a priori más una combinación lineal de representantes, justificando así la expresión [3.76].

El teorema de descomposición ha reducido el problema de encontrar un elemento óptimo  $\mathbf{u}$  a partir de la búsqueda en un espacio de dimensión infinita a un problema en un número finito de incógnitas (siendo  $L$  el número de grados de libertad). Más aun, la función coste  $J$  alcanza su mínimo para un único elemento  $\hat{\mathbf{u}}$  en  $\tau$ , que tiene la forma [3.85]. Para su demostración, se denota por  $\mathbf{R}$  la matriz simétrica definida positiva de todos los pares de productos internos de representantes<sup>57</sup>

$$\mathbf{R} = (R_{kl})_{k,l=1, \dots, L} \quad \text{con} \quad R_{kl} = \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l \rangle_\tau = R_{lk} \quad [3.86]$$

Denotando por

<sup>57</sup> Con las hipótesis que se asumen para los errores (Secc. 3.4.3), la matriz  $\mathbf{C}_\varepsilon$  es simétrica y  $\mathbf{R}$  resulta ser una matriz auto-adjunta. Además,  $\mathbf{R}$  es no singular, ya que los representantes son linealmente independientes (Luenberger, 1969).

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \mathbf{d} - \mathbf{L}[\mathbf{u}_0] \\ \mathbf{P} &= \mathbf{R} + \mathbf{C}_\varepsilon\end{aligned}\quad [3.87]$$

y sustituyendo [3.85], [3.86] y [3.80] para  $\mathbf{u}_0 \in \tau$  en [3.81], se obtiene una función coste de dimensión finita para  $\beta$

$$J[\beta] = (\mathbf{R}\beta - \mathbf{h})^* \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{R}\beta - \mathbf{h}) + \beta^* \mathbf{R}\beta$$

con su mínimo,  $\hat{\beta}$ , dado por (Bennett, 1992)

$$(\mathbf{R} + \mathbf{C}_\varepsilon)\hat{\beta} = \mathbf{L}\mathbf{u}_0 \quad [3.88]$$

De tal forma que, el mínimo de [3.81], que corresponde a la solución final, viene dado por

$$\hat{\mathbf{u}} = \beta_0 + \mathbf{r}^* \mathbf{P}_0 \mathbf{h} + \mathbf{u}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{C}(\mathbf{d}_\varepsilon) \mathbf{L}^1 (\mathbf{u} - \mathbf{L}_0) \quad [3.89]$$

Entonces, para obtener la solución al problema (esto es, [3.76] o, equivalentemente, [3.89]), puesto que  $\mathbf{u}_0$  es conocido, sólo habrá que determinar los representantes y sus coeficientes.

## II. Cálculo directo de los representantes:

Dada la función covarianza  $C_f$  de pares de puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , el representante  $\mathbf{r}_l$  de cualquier funcional lineal  $L_l$  se obtienen, por las propiedades del núcleo reproductivo de  $\tau$ , mediante

$$\mathbf{r}_l(\mathbf{y}) = L_{l(\mathbf{x})} [C_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \quad [3.90]$$

El subíndice en  $L_{l(\mathbf{x})}$  indica que el funcional lineal  $L_l$  se aplica a lo que sigue considerado como una función de  $\mathbf{x}$ . Puesto que se verifica que

$$\langle \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k \rangle_\tau = L_{l(\mathbf{x})} [L_{k(\mathbf{y})} [C_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})]] \quad [3.91]$$

La matriz  $\mathbf{R}$  en [3.86] queda completamente determinada, con sus elementos definidos según [3.91].

En la práctica, para cada  $l$  el cálculo de  $\mathbf{r}_l$  se realiza de la siguiente forma:

- Se designa por  $\Delta_l$  la evaluación de  $\mathbf{u}$  a través del funcional  $L_l$  en el punto  $\mathbf{x}_l$ .
- Para  $\Delta_l$ , se resuelve el sistema adjunto de las ecuaciones dinámicas lineales [3.71]. Para ello, se denota por  $\mathbf{S}^*$  el operador adjunto de  $\mathbf{S}$  y por  $\alpha_l$  el vector de fuerzas en las SWE, que en este caso, corresponde a una fuerza impulsiva en la localización  $\mathbf{x}_l$

$$\mathbf{S}^* \alpha_l = \Delta_l \quad [3.92]$$

Las condiciones de frontera en este sistema son homogéneas, a menos que el cálculo involucre datos observados sobre las fronteras.

- Cada  $\alpha_l$  se suaviza por convolución con la covarianza de error dinámica  $C_f$  (Secc. 3.4.3) y se resuelve el siguiente problema directo, para calcular  $\mathbf{r}_l$

$$\mathbf{S} \mathbf{r}_l = \mathbf{C}_f \alpha_l \quad [3.93]$$

Este sistema, por ser lineal, se resuelve mediante factorización directa de la matriz de diseño, aunque debe tenerse en cuenta que el suavizado  $\mathbf{C}_f \alpha_l$  da lugar a unas condiciones de frontera no homogéneas.

En este punto conviene introducir una variante al método general, conocida como *cálculo eficaz de los representantes* (Egbert y Erofeeva, 2002). Se basa, esencialmente, en reducir el cálculo de los representantes sólo para la variable incógnita que corresponda a los datos observados. Ésta es, en este caso, la elevación de marea oceánica. Se denota por:

- $\Delta_l^\zeta$  la evaluación para la componente  $\zeta$  de  $\mathbf{u}$  a través del funcional  $L_l$  en el punto  $\mathbf{x}_l$ .
- $\alpha_l^\zeta$  la fuerza impulsiva sobre los  $\zeta$ -nodos ( $\alpha_l^U = \alpha_l^V = 0$ ).

En la Sección 3.4.1.4 se obtuvo la expresión [3.67], en notación con operadores, para la solución del sistema de ecuaciones [3.71], mediante la técnica de factorización directa sobre la cuadrícula Arakawa-C. Siguiendo esta notación, el sistema adjunto [3.92] se reduce a

$$\mathbf{A}^* \mathbf{a}_l^\zeta = \Delta_l^\zeta \quad [3.94]$$

Este sistema se resuelve para  $\alpha_l^\zeta$  mediante la descomposición LU de la matriz  $\mathbf{A}$  (pasos II y III en la Secc. 3.4.1.4). La solución del problema directo [3.93], que son los representantes para la componente de elevación,  $\mathbf{r}_l^\zeta$ , se obtiene a partir de [3.67] de la forma

$$\mathbf{r}_l^\zeta = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{C}^* \mathbf{D}^* \mathbf{A}^{-1*} \Delta_l^\zeta \quad [3.95]$$

donde los operadores  $\mathbf{D}^*$  y  $\mathbf{C}^*$  son los traspuestos de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}$ , definidos en [3.66] y [3.65] respectivamente. La consistencia en la implementación numérica de [3.94] y [3.95] está garantizada por ser la matriz  $\mathbf{R}$  auto-adjunta.

### III. Cálculo de los coeficientes de los representantes:

Con la matriz  $\mathbf{R}$  formada, se calcula el vector  $L$ -dimensional formado por los coeficientes de los representantes,  $\beta$ . En la práctica, esto se lleva a cabo resolviendo el sistema de ecuaciones [3.88] (Bennet, 2002; Chua y Bennett, 2001). Así, los coeficientes de los representantes dependen sólo de la covarianza de error del modelo y de las observaciones en las localizaciones de los datos. Más estrictamente,  $(\mathbf{R} + \mathbf{C}_\epsilon)$  representa la matriz de covarianza del error total (errores del modelo en los puntos de las observaciones más el error de éstas últimas).

El cálculo de los coeficientes  $\beta$  puede optimizarse (en lo que a coste computacional se refiere), introduciendo la denominada *aproximación de base reducida* (Egbert et al., 2004). Se basa, esencialmente, en reducir el número de representantes (inicialmente, tantos como observaciones,  $L$ ) haciendo uso de la descomposición de los vectores propios de la matriz  $\mathbf{R}$  (Parker, 1994; 1975). Para ello, se consideran  $\{\mathbf{r}_n, n = 1, \dots, N\}$  los representantes calculados para un subconjunto cualquiera  $N \subset L$  y  $\mathbf{R}$  la matriz de dimensión  $N \times N$ , cuyos elementos están dados por ([3.80] y [3.86])

$$R_{kn} = L_k [\mathbf{r}_n] \quad k, n = 1, \dots, N \quad [3.96]$$

Análogamente, se construye la matriz  $\mathbf{P}$  de dimensión  $L \times N$  formada por los  $N$  representantes evaluados en el conjunto completo  $L$  de puntos dato

$$P_{ln} = L_l [\mathbf{r}_n] \quad l = 1, \dots, L \quad n = 1, \dots, N \quad [3.97]$$



El problema, en este caso, consiste en encontrar el mínimo de la función coste  $J$ , [3.75], entre todas las combinaciones lineales de los  $N$  representantes y el modelo a priori, de la forma

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \sum_{n=1}^N \beta_n \mathbf{r}_n \quad [3.98]$$

y tal que verifique

$$\mathbf{L}[\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0] \mathbf{\beta} = \sum_{n=1}^N \beta_n \mathbf{L}[\mathbf{r}_n] = \mathbf{P} \quad [3.99]$$

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{\beta}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \rangle_{\tau} = \mathbf{\beta}^* \mathbf{R} \mathbf{\beta} \quad [3.100]$$

Denotando por

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} - \mathbf{L}[\mathbf{u}_0] \quad [3.101]$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{d} &= \mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + (\mathbf{L}\mathbf{u}_0 - \mathbf{d}) \\ (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{d})^* \mathbf{C}_{\epsilon}^{-1} (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{d}) &= (\mathbf{P}\mathbf{\beta} - \mathbf{d}')^* \mathbf{C}_{\epsilon}^{-1} (\mathbf{P}\mathbf{\beta} - \mathbf{d}'). \end{aligned}$$

Entonces la función coste, para el subespacio de soluciones definido por [3.98], se reescribe en términos de  $\mathbf{\beta}$

$$J[\mathbf{\beta}, \mathbf{d}'] = (\mathbf{P}\mathbf{\beta} - \mathbf{d}')^* \mathbf{C}_{\epsilon}^{-1} (\mathbf{P}\mathbf{\beta} - \mathbf{d}') + \mathbf{\beta}^* \mathbf{R} \mathbf{\beta} \quad [3.102]$$

Para calcular el mínimo de [3.102] se utiliza la descomposición de valor singular de la matriz  $\mathbf{C}_{\epsilon}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1/2} = \mathbf{W} \mathbf{S} \mathbf{Q}^*$ , siendo  $\mathbf{W}$  (de dimensión  $M \times N$ ) y  $\mathbf{Q}$  (de dimensión  $N \times N$ ) matrices de columnas ortonormales y  $\mathbf{S}$  la matriz diagonal de valores singulares positivos reales. Entonces el mínimo de [3.102] se obtiene mediante (Egbert y Erofeeva, 2002; Parker, 1994)

$$\mathbf{\beta} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{S} (\mathbf{S}^2 + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{W}^* \mathbf{d}' \quad [3.103]$$

La implementación práctica de la aproximación de base reducida se lleva a cabo de la siguiente calculando los coeficientes de los representantes, mediante [3.103], y la solución final mediante [3.98]. Una deducción formal y completa de puede encontrarse en Egbert et al. (1994) y Egbert y Erofeeva (2002).

### 3.4.3 Asignación de Errores en la Dinámica y en los Datos Observados

Uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta en cualquier técnica de asimilación de datos es la asignación adecuada de los errores en el modelo hidrodinámico y en los datos observados (p. ej. Bennett, 2002; Kurapov et al., 2005). Para la aplicación del método de los representantes, como se indicó en la Sección anterior, las expresiones matemáticas de las funciones covarianzas se eligen de tal forma que se garantice que el mínimo de la función coste sea un elemento de un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (Bennett y McIntosh 1982). Siguiendo la notación utilizada anteriormente,  $\delta \mathbf{f}$  y  $\mathbf{C}_f$  denotan los errores en el modelo hidrodinámico y su matriz de covarianza, respectivamente. Puesto que  $\mathbf{C}_f$  contiene la información a priori sobre las magnitudes y las características espaciales de dichos errores, su consideración permite que las amplitudes del error dinámico varíen en el espacio con una escala de longitud de correlación constante. Estas amplitudes del error se estiman a partir del modelo a priori y un análisis de las ecuaciones hidrodinámicas.

### 3.4.3.1 Errores en el Modelo Hidrodinámico

Las SWE contienen imprecisión que provienen, principalmente, de tres fuentes (p. ej. Padman et al., 2003):

- Simplificaciones físicas. Las incertidumbres que se producen al modelar físicamente el proceso real de la marea oceánica y por las parametrizaciones intrínsecas que esto conlleva (fricción con el fondo oceánico, fenómenos de escalas inferiores a la resolución de la cuadrícula oceánica, etc.).
- Esquema numérico: Puesto que no es posible determinar una solución analítica de las SWE, éstas se resuelven numéricamente mediante algún esquema de cálculo (como los señalados en la Secc. 3.4.1.4). Los procedimientos numéricos conllevan errores debidos, por ejemplo, al truncamiento o al redondeo.
- Datos externos, como pueden ser de las fuerzas (principalmente, debido a errores en las condiciones especificadas en las fronteras abiertas), de la batimetría o de las magnitudes asignadas a las constantes físicas involucradas (densidad del agua del mar, etc.).

Puesto que no existe, en general, una variable de estado  $\mathbf{u}$  que satisfaga la ecuación [3.71], utilizando el valor verdadero de la variable incógnita,  $\mathbf{u}_{\text{ver}}$ , se puede definir para todo  $\mathbf{x} \in \{\Omega, \partial\Omega_A, \partial\Omega_C\}$

$$\delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{S} \mathbf{u}_{\text{ver}}(\mathbf{x}) \quad [3.104]$$

Este error no se puede medir directamente, pero sí aproximar en un sentido estadístico. Con este fin, si se considera que las distintas fuentes de error en el modelo hidrodinámico generan errores independientes y que cada fuente de error es la única, entonces el error total puede caracterizarse de manera aislada para cada fuente. Por simplicidad se considera, además, cada constituyente de marea individualmente, despreciando la posible correlación entre ellos.

Sean  $\delta \mathbf{f}_I$ ,  $\delta \mathbf{f}_A$  y  $\delta \mathbf{f}_C$  los errores en las ecuaciones hidrodinámicas y en las condiciones de frontera cerrada y abierta, respectivamente. Éstos satisfacen las siguientes hipótesis estadísticas

$$E[\delta \mathbf{f}_I(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad E[\delta \mathbf{f}_A(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_A \quad E[\delta \mathbf{f}_C(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_C \quad [3.105]$$

y las funciones covarianzas definidas por<sup>58</sup>

$$\begin{aligned} C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= E[\delta \mathbf{f}_I(\mathbf{x}_1) \delta \mathbf{f}_I(\mathbf{x}_2)^*], \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega \\ C_A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= E[\delta \mathbf{f}_A(\mathbf{x}_1) \delta \mathbf{f}_A(\mathbf{x}_2)^*], \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \partial\Omega_A \\ C_C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= E[\delta \mathbf{f}_C(\mathbf{x}_1) \delta \mathbf{f}_C(\mathbf{x}_2)^*], \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \partial\Omega_C \end{aligned} \quad [3.106]$$

donde  $C_I$ ,  $C_A$  y  $C_C$  son las correspondientes funciones covarianzas de pares de puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . En el dominio del modelo, las covarianzas de los errores,  $C_I$ ,  $C_A$  y  $C_C$ , se definen como operadores lineales que actúan sobre la variable de estado  $\mathbf{u}$

<sup>58</sup> Se considera por hipótesis que las estadísticas de los errores en la dinámica pueden describirse, aproximadamente, por sus funciones covarianza.

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_I[\mathbf{u}](\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} C_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') ds \\
\mathbf{C}_A[\zeta](\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_A} C_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \zeta(\mathbf{x}') dl \\
\mathbf{C}_C[\mathbf{n}\mathbf{u}](\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_C} C_C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{n}\mathbf{u}(\mathbf{x}') dl
\end{aligned} \tag{3.107}$$

$ds$  y  $dl$  denotan los elementos de área y de arco, respectivamente, y  $\mathbf{n}$  la dirección normal a la frontera. La covarianza del error dinámico total,  $\mathbf{C}_f = \{\mathbf{C}_I, \mathbf{C}_A, \mathbf{C}_C\}$ , proporciona información (suposiciones a priori) sobre la magnitud y la distribución espacial (o de correlación) de los errores.

En todos los casos, las funciones covarianza pueden definirse utilizando la solución a priori para estimar las amplitudes típicas de los variables y utilizándolas para realizar un análisis de las SWE. El resultado de este análisis proporciona una estimación de la magnitud de los errores como función de la posición en el espacio con una escala de longitud de correlación constante (Egbert et al., 1994)<sup>59</sup>. A continuación se estudian separadamente las diferentes covarianzas de error  $\mathbf{C}_I$ ,  $\mathbf{C}_A$  y  $\mathbf{C}_C$ . Como se señaló anteriormente, se considera un único constituyente de marea (omitiendo por simplicidad el subíndice correspondiente) y se desprecia la correlación entre ellos.

### 1) Covarianzas de error en las ecuaciones hidrodinámicas, $\mathbf{C}_I$

Se considera que los errores provenientes de la ecuación de continuidad y de las dos direcciones de las ecuaciones del momento no están correlacionados entre sí. Así, para cada una de estas ecuaciones, las matrices covarianza caracterizan la magnitud y la correlación espacial de sus errores. Estas dos características de los errores, magnitud y correlación espacial, son funciones de la posición en el espacio. La dependencia espacial puede estimarse simultáneamente con la magnitud de los errores, a partir de la solución a priori y el análisis de las SWE. En cada caso se tiene en cuenta lo siguiente:

- La ecuación de continuidad [3.16], que establece la conservación de masas, no depende de ningún parámetro conocido por lo que en la práctica se considera exacta. Esta suposición conlleva despreciar errores pequeños (muy inferiores a otras fuentes de error en las ecuaciones del momento) asociados con la estratificación y la compresibilidad del océano, así como con la aproximación de ondas de amplitud pequeña (McIntosh y Bennett, 1984).
- Los errores en las ecuaciones del momento [3.17] y [3.18], tienen en cuenta las incertidumbres en la batimetría y en la parametrización de la fricción del fondo (Egbert y Ray, 2000).

Para cada par de puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  en el interior del dominio del modelo se considera que la matriz de covarianzas  $\mathbf{C}_I$  entre  $\delta\mathbf{f}_I(\mathbf{x})$  y  $\delta\mathbf{f}_I(\mathbf{x}')$  es una función que combina una varianza no homogénea con una correlación simple, espacialmente homogénea e isotrópica, esto es

$$\left[ C_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right]_{ss'} = \delta_{ss'} \sigma_s(\mathbf{x}) \sigma_{s'}(\mathbf{x}') \psi(\cos \lambda) \tag{3.108}$$

<sup>59</sup> La simplificación de las ecuaciones generales del movimiento de un fluido se realiza mediante el análisis de la importancia relativa de cada uno de los términos que aparecen en las mismas, para un determinado tipo de movimiento. La importancia relativa de los términos puede determinarse en función la magnitud de las variables de estado, de la amplitud de las fluctuaciones o de las escalas características de longitud y tiempo donde se producen las fluctuaciones. En el último caso, cuando se utilizan las escalas características, la técnica recibe el nombre de *análisis de escala*.

donde el subíndice  $S$  hace referencia a las componentes  $U$ ,  $V$  o  $\zeta$ . Además:

- $\text{var}^S \equiv \sigma_S^2$  denota la varianza de error como función de la posición para la componente  $S$  de la variable de estado.
- $\psi(\cos\lambda)$  denota la correlación espacial (sobre la esfera) de las componentes de  $\delta\mathbf{f}_l$  con una separación angular (o escala de longitud de correlación)  $\lambda$ .

### Especificación de las varianzas de error

Por simplicidad, se considera la ecuación linealizada del momento en la dirección  $\lambda$  para la onda de marea  $k$  dada en [3.51], con la fricción con el fondo oceánico,  $\kappa$ , parametrizada según [3.31]. En esta ecuación existen distintas fuentes de error que se exponen, separadamente, para calcular su varianza. Para ello se consideran, por una parte, los valores típicos de la elevación,  $\zeta_{i,j}$ , y de las componentes del transporte,  $U_{i,j}$  y  $V_{i,j}$ , obtenidos de un modelo a priori (análogamente los valores promediados  $\tilde{U}_{i,j}$  y  $\tilde{V}_{i,j}$ , calculados según las ecuaciones [3.60])<sup>60</sup>. Por otra parte, se consideran las siguientes escalas típicas de los errores, basadas en el análisis de aproximación que realizan McIntosh y Bennett (1984), Egbert et al. (1994) y Bennett (2002)

- En la batimetría,

$$\text{Err}_{\text{BAT}} = \{ (r_1/\max\{h, h_0\}), r_2 \}$$

siendo  $r_2$  el error en la batimetría (establecido del 5%) y  $r_1$  un valor mínimo asignado (igual a 10 m).

- En la fricción con el fondo oceánico, que comprenden los introducidos por las imprecisiones en la batimetría y los debidos a su parametrización lineal ( $\text{Err}_{\text{FRICC}}$ ), esto es

$$\text{Err}_{\text{FRICC}_T} = \sqrt{\text{Err}_{\text{BAT}}^2 + \text{Err}_{\text{FRICC}}^2}$$

Se establece un valor del  $\text{Err}_{\text{FRICC}} = 55\%$

Entonces:

- La varianza de los errores en el término correspondiente al gradiente de presión horizontal,  $\delta\mathbf{f}_h$ , debidos a las variaciones del nivel del mar y a las fuerzas generadoras de marea [3.22], causados por imprecisiones en la batimetría se calcula mediante

$$\text{var}(\delta\mathbf{f}_h)_{i,j}^U = M_{i,j}^U \left[ -\left( gh_{i,j}^U / R_T \cos\phi_{i,j}^U \Delta\lambda \right) \left| \zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1} \right| + f_{i,j}^{U,k} \right] \cdot (\text{Err}_{\text{BAT}})_{i,j}^U \quad [3.109]$$

con las fuerzas de marea  $f_{i,j}^{U,k}$  definidas en [3.69].

- La varianza de los errores provenientes de la formulación del arrastre con el fondo oceánico,  $\delta\mathbf{f}_\kappa$ <sup>61</sup>

<sup>60</sup> Siguiendo la notación empleada para la resolución numérica de las SWE linealizadas mediante la técnica de factorización directa: los subíndices  $i, j$  denotan la posición de la celda de la cuadrícula, los superíndices  $U, V$  y  $\zeta$  denotan  $U, V$  y  $\zeta$  nodos, respectivamente. Se omiten el superíndice  $k$  correspondiente al constituyente armónico y la barra superior que identifica la amplitud compleja.  $h, \text{Err}_{\text{BAT}}$  y  $\text{Err}_{\text{FRICC}_T}$  dependen de la posición en el dominio aunque se omiten los subíndices  $i, j$  (correspondientes a la celda) y  $U, V$  (relativos a  $U, V$ -nodos).

<sup>61</sup> Egbert et al. (1994) estiman, asumiendo un 100% de error en este término, que representa del orden del 10% del error en la dinámica en el océano abierto, lo que se incrementa hasta el 100% sobre las plataformas continentales.

$$\text{var}(\delta \mathbf{f}_\kappa)_{i,j}^U = \left[ M_{i,j}^U \kappa_{i,j}^U \left| \left( \text{Err}_{\text{FRICC\_T}} \right)_{i,j}^U \right| \right]^2 \quad [3.110]$$

siendo  $\kappa_{i,j}^U = C_b u_0 / \max\{h, h_0\}$  y  $u_0$  la velocidad de fricción.

- La varianza de los errores provenientes por la aproximación física en el término de Coriolis,  $\delta \mathbf{f}_{\text{COR}}$ , se estiman mediante

$$\text{var}(\delta \mathbf{f}_{\text{COR}})_{i,j}^U = 2 \left| \text{sen} \phi_{i,j}^U \left( M_{i,j}^U M_{i,j-1}^U (\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i,j-1})^2 / 2 \right) \right|^2 \quad [3.111]$$

En este caso, se establece un valor mínimo para el error de  $0,5 \times 10^{-2}$ .

- Otros errores que se omiten, por ser muy inferiores a los provenientes de la parametrización de la fricción con el fondo oceánico, son los introducidos por la omisión de los términos convectivos y la viscosidad turbulenta horizontal y los debidos a la resolución numérica de las ecuaciones sobre una cuadrícula discreta (McIntosh y Bennett, 1984; Bennett, 2002).

Finalmente, la varianza de error total se calcula mediante

$$\text{var}(\delta \mathbf{f}_I)_{i,j}^U = M_{i,j}^U \left[ \text{var}(\delta \mathbf{f}_h)_{i,j}^U + \text{var}(\delta \mathbf{f}_\kappa)_{i,j}^U + \text{var}(\delta \mathbf{f}_{\text{COR}})_{i,j}^U \right] \quad [3.112]$$

### Especificación de la correlación espacial, $\psi$

Para que [3.108] sea una covarianza espacial válida será necesario y suficiente que  $\psi$  sea una función semi-definida positiva. Por esta razón, la elección de  $\psi$  se basa, esencialmente, en consideraciones de cálculo. Egbert et al. (1994) elaboran un procedimiento para construir funciones de correlación, con forma de campana, como solución de una ecuación de difusión adecuadamente inicializada y escalada. Para ello consideran que, para todos los constituyentes armónicos, todas las componentes de los errores dinámicos tienen la misma estructura de correlación y una escala de longitud de correlación de, aproximadamente,  $5^\circ$ .

### La correlación en los errores dinámicos entre pares de constituyentes armónicos de marea

Hasta el momento, se ha considerado que en los errores dinámicos no existe correlación entre constituyentes. Ésta se introduce mediante los productos cruzados de los errores estimados, asumiendo que la correlación entre constituyentes es la misma para las componentes  $U$ ,  $V$  y  $\zeta$ . Entonces, la covarianza definida en [3.108] se expresa de la forma (Egbert et al., 1994)

$$\left[ C_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right]_{kk'} = \sigma_k(\mathbf{x}) \sigma_{k'}(\mathbf{x}') \psi(\cos \lambda) \phi_{kk'} \quad [3.113]$$

donde los subíndices  $k$  y  $k'$  hacen referencia a los constituyentes y  $\phi_{kk'}$  representa la correlación en los errores dinámicos entre tales. Para cada dos constituyentes se tiene la matriz de covarianzas  $\mathbf{C}_I^{kk'}$  y la matriz de covarianzas total tendrá la forma

$$\mathbf{C}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I^{11} & \dots & \mathbf{C}_I^{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_I^{K1} & \dots & \mathbf{C}_I^{KK} \end{pmatrix}$$

siendo  $K$  el número de constituyentes armónicos considerados. En el caso de los errores en las condiciones de frontera (cerradas y abiertas), se considera la misma correlación entre constituyentes.

Con la nueva matriz de covarianza definida, las ecuaciones de cálculo de los representantes [3.92] y [3.93]) se modifican como sigue (Egbert et al., 1994)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k \mathbf{P}_{lk}^k \mathbf{a} &= \mathbf{C}_{\mathbf{f}}^{kk'} \\ \mathbf{S}_k^* \mathbf{a}_{lk'} &= \Delta_l \end{aligned} \quad [3.114]$$

con  $\mathbf{P}_{lk}^k$ , el representante  $l$ -ésimo del funcional lineal  $L_l$  de evaluación del constituyente  $k'$  con respecto  $k$  en  $\boldsymbol{\tau}$ .  $\mathbf{P}_{lk'} = (\mathbf{P}_{lk'}^1 \dots \mathbf{P}_{lk'}^K)^T$  es el representante  $l$ -ésimo del funcional lineal  $L_l$  de evaluación del constituyente  $k'$  en  $\boldsymbol{\tau}$ .

## 2) Covarianzas de error en las fronteras cerradas, $\mathbf{C}_C$

El error en la condición de impermeabilidad [3.37] impuesta sobre las fronteras cerradas,  $\delta \mathbf{f}_C$ , proviene del error en la representación discreta de dicha frontera que, generalmente, no coincide con la costa. Para una celda  $(i, j)$  en la cuadrícula que linda con la costa con orientación N-S, la condición sobre el segmento frontera numérica es  $U_{ij} = 0$  y el flujo total al lado opuesto es  $U(R_T \Delta \phi)$ . El error por la condición de frontera cerrada se considera un proceso con ruido blanco (ya que éstos no están correlacionados entre nodos distintos sobre la frontera numérica), con varianza (Egbert et al., 1994)

$$\text{var}(\mathbf{f}_C)_{i,j}^U = \sqrt{R_T \Delta \phi (T_{i,j}^U \cdot \omega_k \cdot R_T \Delta \lambda \cos \phi_{i,j}^U)^2 \text{Err}_{F-C}} \quad [3.115]$$

siendo  $T_{i,j}^U = \zeta_{i,j} / \max\{|\zeta_{i,j}|, 1\}$  (con  $\zeta_{i,j}$  estimado a priori) y  $\text{Err}_{F-C}$  la escala típica de este error (estimada del orden del 20%). En [3.115] se ha considerado que la componente normal al transporte,  $\mathbf{n}U$ , se expresa en términos de  $\zeta$  y de  $\Delta \lambda$

$$\mathbf{n}U \approx i\omega \zeta (R_T \Delta \lambda \cos \phi)$$

Así, la varianza en [3.115] depende de la resolución de la cuadrícula, lo que es consistente con la hipótesis de que la principal fuente de error se origina con la cuadrícula numérica discreta.

## 3) Covarianzas de error en las fronteras abiertas, $\mathbf{C}_A$

Los errores provenientes de las condiciones de frontera abierta se estiman mediante (Egbert et al., 1994)

$$\text{var}(\mathbf{f}_A)_{i,j} = (\text{Err}_{F-A})^2 \left( \sum M_{i,j}^\zeta |\zeta_{i,j}|^2 / \sum M_{i,j}^\zeta \right) \quad [3.116]$$

donde  $\text{Err}_{F-A}$  es la escala típica del error, que se establece a partir del error estimado en el modelo oceánico utilizado para la imposición de las CFA.

### 3.4.3.2 Errores en los Datos

Los errores en los datos,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_L)^T$ , se aproximan en sentido estadístico. Con este fin, se considera  $\varepsilon_l$  una variable aleatoria que representa el error de la  $l$ -ésima observación, es decir, la diferencia entre el valor observado y su valor verdadero

$$\varepsilon_l = d_l - d_l^{\text{ver}} \quad [3.117]$$

Tanto  $d_l$  como  $d_l^{\text{ver}}$  pueden expresarse como la salida del funcional lineal que actúa sobre el espacio modelo, según [3.73]. En particular, el valor verdadero se expresa como  $d_l^{\text{ver}} = L_l[\mathbf{u}_{\text{ver}}]$ , siendo  $\mathbf{u}_{\text{ver}}$  la variable de estado incógnita verdadera. Asimismo, se considera que las estadísticas de error en los datos pueden describirse, aproximadamente, por sus funciones covarianza

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = E[\varepsilon_i \varepsilon_j^*] \quad [3.118]$$

siendo  $C_\varepsilon$  la función covarianza para cada par de puntos dato  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{x}_j$ . Además, se considera que cada variable aleatoria  $\varepsilon_l$  satisface

$$E[\varepsilon_i] = 0 \quad [3.119]$$

Entonces, teniendo en cuenta [3.72] el vector de errores para el conjunto completo de  $L$  observaciones estará dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{L}[\mathbf{u}_{\text{ver}}] \quad [3.120]$$

y, puesto que los errores en los datos observados no están correlacionados entre sí, la matriz  $\mathbf{C}_\varepsilon$  de covarianzas es diagonal. Esto es

$$\mathbf{C}_\varepsilon = (C_\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l))_{k,l} \text{ con } E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0 \text{ y } \mathbf{C}_\varepsilon = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^*] \quad [3.121]$$

Además, en relación con los errores dinámicos se verifica

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{f}^*] = 0 \quad [3.122]$$

En el caso de los datos altimétricos, su precisión se estima a partir de la varianza no de marea de las series temporales. Es decir, de la varianza del ruido de pequeña escala en los datos de satélite a lo largo de las trayectorias.

### 3.5 Conclusiones

En este Capítulo se ha desarrollado la metodología para la obtención de un modelo de marea oceánica, basado en la asimilación de observaciones en un modelo hidrodinámico. Previamente:

- Se ha realizado, en la Sección 3.2, una exposición sobre la evolución histórica y el estado actual del desarrollo de modelos oceánicos. Se ha justificado cómo, actualmente, con la altimetría por satélite y los avances computacionales, la técnica de asimilación de datos en modelos hidrodinámicos presenta una serie de ventajas que permite una modelización más exacta de la marea oceánica.
- En la Sección 3.3, se han presentado los fundamentos esenciales involucrados en la técnica de asimilación de datos (AD). Por una parte, se han introducido diferentes métodos de resolución clásicamente utilizados en la AD, con el fin de justificar la elección del más adecuado al problema aquí planteado. Por otra parte, puesto que en la AD se consideran observaciones procedentes de la altimetría por satélite, se han descrito los principios esenciales de esta técnica. Asimismo, se han recopilado los modelos globales utilizados con mayor frecuencia en las investigaciones relacionadas con el cálculo del EOI y se han estudiado sus precisiones.

La estructura seguida, en la Sección 3.4, para el desarrollo integro de un modelo de marea oceánica mediante la AD ha sido la siguiente:

- Se ha desarrollado la formulación completa para la construcción de un modelo hidrodinámico, basado en la resolución de las ecuaciones de aguas someras, barotrópicas promediadas en profundidad, 2D-SWE (ecuaciones [3.16] a [3.19]). Se ha prestado especial atención a las hipótesis y simplificaciones consideradas (fundamentalmente a lo referente a las parametrizaciones del término de fricción con el fondo oceánico). Se ha resuelto el sistema de ecuaciones, en su forma no lineal, mediante su discretización en el espacio y el tiempo utilizando una cuadrícula descentrada de tipo Arakawa-C. En su forma lineal, el sistema se ha resuelto mediante su factorización directa en el dominio de la frecuencia.
- Con el modelo hidrodinámico construido, se ha presentado el esquema de AD seguido para la obtención del modelo, basado en el método de los representantes. Se han introducido los principios fundamentales y justificaciones teóricas esenciales del método, referenciado convenientemente su desarrollo y formulación explícitos.
- Se han especificado los errores asignados en la dinámica, a partir del análisis de escala de las SWE, y en los datos observados.



# Modelo de Carga Oceánica de Marea para la Región de la Península Ibérica

*En este Capítulo se describe el diseño y desarrollo del modelo de marea oceánica para el entorno de la Península Ibérica, IBER01. Las primeras Secciones se dedican a la presentación de los objetivos, la descripción de la zona de estudio y del régimen de marea oceánica en la misma. Asimismo, se realiza una revisión histórica de los trabajos existentes en la zona en relación con el tema de estudio. En la Sección 4.4 se detalla el conjunto de datos, mareográficos y de altimetría por satélite, seleccionados para su asimilación en el modelo. Además, se exponen los métodos de procesado de las series temporales observadas para la obtención de las constantes armónicas de marea. El proceso de elaboración del modelo IBER01 se detalla en la Sección 4.5: En primer lugar, se describe la construcción del modelo hidrodinámico, para el que se especifican las constantes, parámetros y condiciones impuestas. Posteriormente, se obtiene IBER01 mediante la asimilación de los datos observados en el modelo hidrodinámico, siguiendo el “método de los representantes”. La descripción de los resultados obtenidos y su validación se realiza en la Sección 4.6 y las conclusiones se presentan en la Sección 4.7.*

## 4.1 Introducción

Este Capítulo está dedicado íntegramente a la construcción del modelo de marea oceánica en el entorno de la Península Ibérica, IBER01<sup>1</sup>. La finalidad de este modelo es su adopción y explotación para el cálculo preciso del Efecto Oceánico Indirecto (EOI) en la región. Para su construcción se han empleado los medios, recursos y requerimientos que permiten alcanzar el objetivo propuesto. Es por esta razón que, aunque IBER01 es propiamente un modelo de marea oceánica, resulta adecuado denominarlo como modelo de carga oceánica. Así, en esta memoria nos referiremos a él indistintamente por modelo de marea oceánica o de carga oceánica. IBER01 se ha construido, siguiendo la metodología descrita en el Capítulo 3, a partir de la asimilación de observaciones mareográficas y de altimetría por satélite en un modelo hidrodinámico construido a priori, siguiendo el denominado *método de los representantes*. Puesto que la solución final se obtiene a través de la resolución de un problema de inversión generalizada, el modelo IBER01 también se denotará por *modelo inverso* (siguiendo esta nomenclatura, el modelo hidrodinámico se denotará simplemente por *modelo directo o a priori*). El diseño y desarrollo de IBER01 se expone detalladamente a lo largo de

---

<sup>1</sup> Los resultados han sido recientemente publicados en: M. Benavent, J. Arnos y F. G. Montesinos, 2009. *Regional ocean tide loading modelling around the Iberian Peninsula. Journal of Geodynamics*, Vol. 48, pp. 132-137.

las Secciones que siguen. Las últimas Secciones de este Capítulo se destinan a la presentación de los resultados obtenidos para los ocho constituyentes armónicos principales, 4 semi-diurnos ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ ) y 4 diurnos ( $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $K_1$ ), su análisis y su validación.

A lo largo de esta memoria se ha puesto de manifiesto la necesidad de disponer de modelos regionales de marea oceánica de alta resolución, con el fin de alcanzar cálculos más exactos del EOI que afecta a las observaciones geodésicas y gravimétricas de precisión. En el caso particular de la Península Ibérica, por sus características singulares, dichas investigaciones geodésicas y gravimétricas cobran una gran relevancia. Como ejemplo, considérese el caso del sur peninsular, un área de gran complejidad tectónica y que se encuentra afectada por una elevada sismicidad inducida, principalmente, por su proximidad al área de interacción entre las placas euroasiática y africana en el entorno del Estrecho de Gibraltar y el Mar de Alborán. Sirvan como referencia los trabajos de Fullea et al. (2006) y Buform et al. (2004), en relación con la sismicidad en la zona, o los trabajos de Bokelmann y Maufroy (2007) y López-Casado et al. (2001) sobre la estructura, evolución geológica y naturaleza de las placas tectónicas. Además de lo anterior, el cálculo preciso del EOI también resulta de gran interés en las investigaciones relacionadas con la estructura y los procesos internos de la Tierra. Como se trató en el Capítulo 2 (Secc. 2.2), la comprensión de los procesos y propiedades físicas del interior de la Tierra, así como de su propia estructura, puede realizarse, no sólo a partir del campo de la sismología, sino también a través del estudio de la respuesta terrestre (p.ej. la variación de gravedad) a las fuerzas derivadas del potencial generador de marea. Para interpretar los residuales de marea terrestre<sup>2</sup> en términos de la estructura o de los procesos físicos del interior de la Tierra, será necesario corregir con gran exactitud el EOI, puesto que este efecto está contenido en la propia señal de marea terrestre observada (registrada, p. ej., por un gravímetro). Véanse, como referencia de estas investigaciones, los trabajos de Gómez-Ortiz et al. (2006) y Suriñach y Chávez (1996).

Si las características estructurales y geomorfológicas de la Península Ibérica comportan un interés especial en las investigaciones geodésicas y gravimétricas, no menos lo hacen su ubicación y configuración geográfica, en cuanto a geometría costera se refiere. La Península se encuentra bañada al oeste por el océano Atlántico, caracterizado por presentar rangos de marea oceánica muy altos. Asimismo, la complejidad de la batimetría que circunda la Península y de la geometría de sus costas induce, a su vez, un complicado patrón de propagación de la marea en sus aguas. Como consecuencia, el efecto de carga causado por la marea oceánica sobre la Península alcanza amplitudes muy altas, incluso a grandes distancias de la costa, que afectarán significativamente a las observaciones geodésicas y gravimétricas realizadas en la región. Por ejemplo, para la onda de marea  $M_2$  las variaciones de la gravedad causadas por el EOI en la Península alcanzan, en amplitud, valores de hasta 9  $\mu\text{Gal}$  en las proximidades al Golfo de Vizcaya y unos 4-5  $\mu\text{Gal}$  a cientos de kilómetros de la costa. Para este mismo constituyente, la amplitud de la marea gravimétrica observada en la Península oscila, en general, entre los 45  $\mu\text{Gal}$  y 55  $\mu\text{Gal}$ . Así, en la costa Atlántica el EOI

---

<sup>2</sup> Se remite al Cap. 6 para una explicación detallada del residual de marea terrestre.

contribuye hasta un 19% a la marea gravimétrica observada, aunque decrece hasta un 5% en la costa Mediterránea, aproximadamente. Puesto que para evaluar el EOI con exactitud se requieren modelos precisos de marea oceánica y teniendo en cuenta que, para esta región particular, incluso los modelos más recientes y de mayor resolución presentan imprecisiones y discrepancias entre ellos, surge la necesidad de elaborar un modelo regional de mayor precisión y resolución.

En la Sección 4.2 se describe la región objeto de estudio, indicando sus características geográficas más reseñables, así como los patrones generales de propagación de la marea oceánica. Seguidamente, en la Sección 4.3, se realiza una revisión de los trabajos previos existentes en relación con la modelización de la marea oceánica en la zona de estudio. Las observaciones de marea oceánica consideradas en el proceso de asimilación de datos se detallan en la Sección 4.4. Se describe, tanto para las medidas de mareógrafos costeros y de profundidad como para las procedentes de altimetría por satélite, el pre-procesado, procesado y análisis de las series temporales para la obtención de los armónicos de marea. En la Sección 4.5 se detalla el proceso de modelización de IBER01, esto es, la construcción del modelo hidrodinámico a priori y la aplicación de la técnica de inversión generalizada para la asimilación de los datos observados. Finalmente, en la Sección 4.6, se analizan, contrastan y validan los resultados obtenidos.

## **4.2 Descripción de la Zona de Estudio**

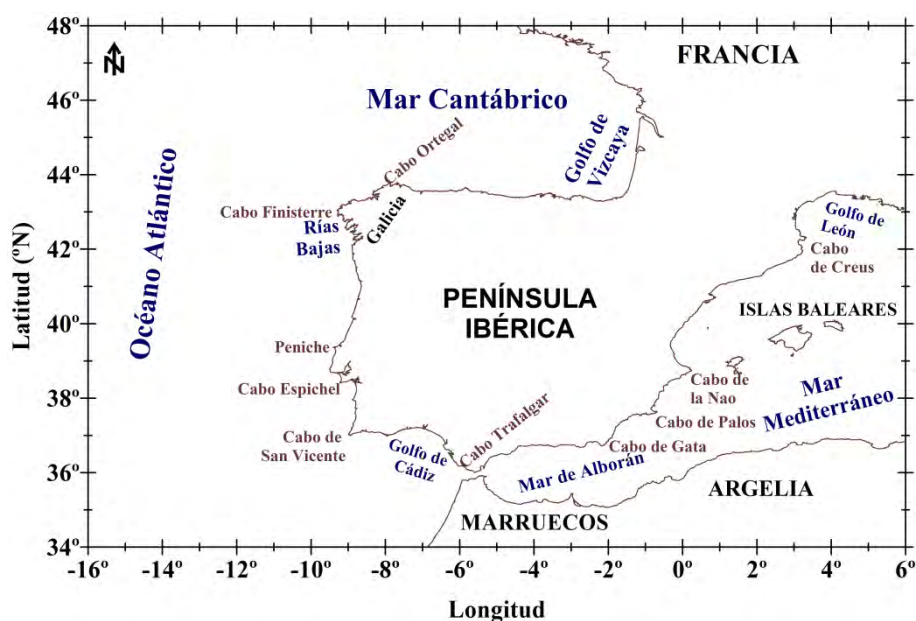
La marea oceánica se encuentra fuertemente influenciada, además de por las características oceanográficas propias de una determinada región, por su estructura geográfica. Por esta razón, en esta Sección se describen las características principales de la zona de estudio, particularmente la batimetría y la geografía costera que dan lugar a varias áreas diferenciadas. Asimismo, se describen los rangos típicos de la marea oceánica y sus patrones generales de propagación espacial.

### **4.2.1 Dominio del Modelo**

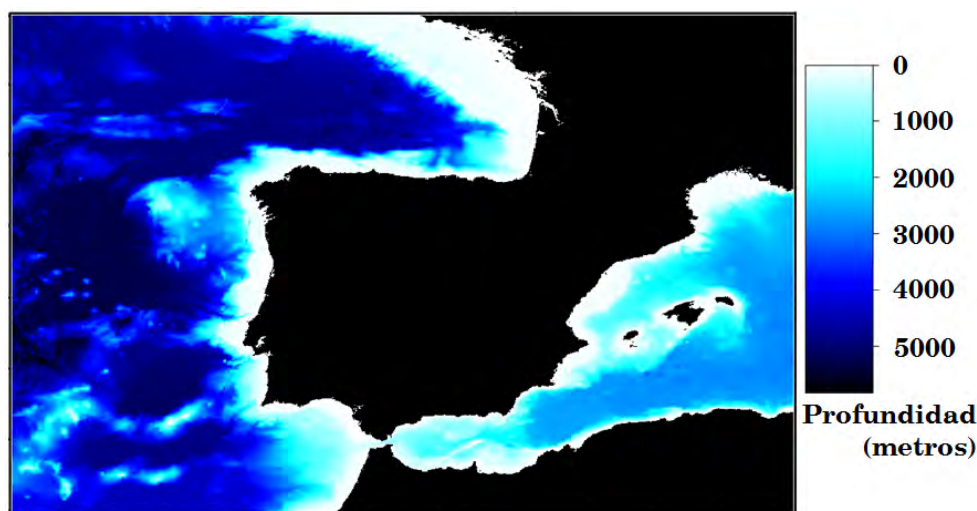
El dominio del modelo ha sido seleccionado para cubrir completamente las proximidades de la Península Ibérica y el Archipiélago Balear, incluyendo islas y arrecifes próximos a la costa. Los límites del modelo se encuentran definidos por los paralelos 34° N y 48° N y los meridianos 16° O y 6° E (Fig. 4.1), que corresponde aproximadamente a un área de 1.759 km × 2.419 km en las direcciones Norte-Sur y Oeste-Este, respectivamente. Con el objetivo de realizar una descripción pormenorizada de las características geográficas y topográficas más reseñables de la zona de estudio, así como de la marea oceánica en la misma, debido a las diferencias significativas existentes en el interior de este extenso dominio, su exposición se presentará atendiendo a tres subzonas principales:

- La primera, la región atlántica delimitada por los paralelos 42° N y 48° N, desde el meridiano 16° O hacia el este hasta la costa atlántica francesa.

- La segunda, comprendida entre los paralelos 34° N y 42° N, desde el meridiano 16° O hasta la parte oeste del Mar de Alborán (5° O). A su vez, en esta subzona, se presentará especial atención a las regiones del Golfo de Cádiz y del Estrecho de Gibraltar.
- La última subzona corresponde a la Cuenca Mediterránea Occidental, desde el Mar de Alborán hasta el meridiano de longitud 6° E, incluido el Archipiélago Balear.



**FIGURA 4.1:** Área cubierta por el modelo de marea oceánica IBER01. Se indican los principales accidentes geográficos referidos en el texto.



**FIGURA 4.2:** Mapa batimétrico del dominio del modelo IBER01, obtenido a partir del Atlas Digital GEBCO (IOC, IHO and BODC, 2003).

**TABLA 4.1:** Límites del dominio del modelo oceánico para el entorno de la Península Ibérica.

Dominio del Modelo Oceánico de la Península Ibérica		
	MÍNIMA	MÁXIMA
LATITUD	34° N	48° N
LONGITUD	16° O	6° E

#### 4.2.2 Ámbito Geográfico y Descripción General del Régimen de Marea

El Océano Atlántico se caracteriza por tener un régimen de marea predominantemente semi-diurno, cuyas amplitudes son las más altas de todas las observadas en regiones oceánicas abiertas (Pugh, 1987; Martínez, 1995; Gil, 2002). En general, las ondas de marea semi-diurnas se propagan en dirección norte a lo largo de la costa europea y alrededor de un punto anfodrómico<sup>3</sup> localizado en la posición (50° N, 39° O). Las amplitudes de los constituyentes de marea semi-diurnos se incrementan ligeramente sobre la plataforma continental, en particular en las proximidades de la costa francesa, y decrecen significativamente en el Mar Mediterráneo, que se caracteriza por presentar rangos de marea muy pequeños (p. ej., Fanjul et al., 1998; Fortunato et al., 2002). Por otra parte, las mareas diurnas en el Océano Atlántico Norte presentan un comportamiento más complejo que las semi-diurnas, principalmente en lo que respecta a las fases (Gil, 2002).

A continuación se describen las características geográficas y topográficas específicas más relevantes de las subzonas del dominio indicadas anteriormente. Dichas características, por su influencia sobre la estructura espacial y la magnitud de la marea oceánica en la zona, deben tenerse presente, tanto para la construcción del modelo de marea oceánica como para la discusión posterior de los resultados obtenidos.

##### 4.2.2.1 Golfo de Vizcaya, Mar Cantábrico y Litoral Gallego

La región norte del dominio del modelo (Fig. 4.3), caracterizada por una batimetría compleja con fuertes gradientes de profundidad, comprende:

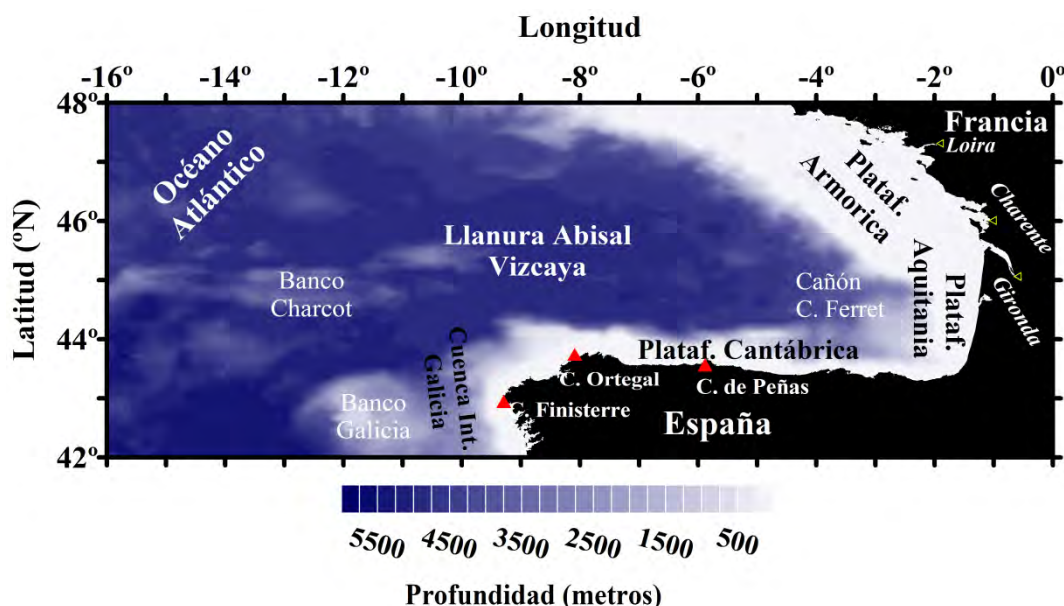
- El Golfo de Vizcaya: Parte más oriental del Mar Cantábrico comprendido entre Cantabria y el sur de la Bretaña francesa. Se caracteriza por la presencia de una extensa plataforma continental<sup>4</sup>, de unos 140 km de ancho con profundidades inferiores a los 200 m, separada de la llanura abisal, con profundidades que alcanzan más de 4.500 m, y con una pendiente del orden de 0,12% (OSPAR Commission, 2000).
- El Mar Cantábrico: Baña la costa norte española. En contraste con el Golfo de Vizcaya, a lo largo de la cornisa cantábrica la plataforma continental es muy estrecha, de apenas 12 km de ancho, y presenta un escalón muy pronunciado.

---

<sup>3</sup> Se denomina *punto anfodrómico o nodal* de un constituyente de marea aquél punto del océano donde la amplitud es igual a cero y las fases giran 360°, en un mismo ciclo de marea (Fairbridge, 1966). Según esta definición los puntos anfodrómicos se caracterizan, por una parte, por las líneas de amplitud constante de la onda de marea (denominadas líneas de co-rango) que giran en torno al punto y de forma creciente según se alejan de él. Por otra parte, las líneas de igual fase (esto es, líneas de co-fase) convergen hacia el punto anfodrómico con una rotación de 360°, aumentando en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio norte y disminuyendo en el hemisferio sur.

<sup>4</sup> Las cuencas oceánicas se dividen en tres regiones principales: La plataforma y el talud continental, que constituyen la zona de transición entre los continentes y el océano, y la llanura abisal. La *plataforma continental* es la prolongación sumergida del continente, caracterizada por una profundidad media de 200 m y una anchura muy variable de una zona a otra. Generalmente, la plataforma finaliza en una zona de incremento de pendiente y supone la ruptura con el *talud continental*, que transcurre desde los 200 m hasta 4.000 m y se caracteriza por presentar pendientes muy acusadas. Al pie del talud, con una pendiente suave, se levanta la *falda o ascensión continental* que llega hasta las denominadas *llanuras abisales*, con profundidades oceánicas de 5.000 a 10.000 metros.

- La región oceánica del noroeste de la Península Ibérica y el litoral gallego. Es el margen continental más irregular de la Península Ibérica, con la presencia de numerosas rías y, en particular, sus cuatro estuarios importantes (las Rías Bajas). Además, esta región se caracteriza por un importante cambio de orientación de la línea de costa producido en el Cabo Finisterre (latitud 43° N) (Fig. 4.1). La plataforma continental es relativamente estrecha, de unos 30 km, y su talud se extiende hasta más de 2.500 m de profundidad. Adyacente a este último se encuentra la Cuenca Interior de Galicia, con unas dimensiones aproximadas de 100 km de ancho, 350 km de largo y 3 km de profundidad y que, a su vez, se encuentra separada de la llanura abisal Iberia (Fig. 4.4) por una zona de bancos submarinos. De norte a sur, estos bancos son (Pinheiro et al., 1996): Galicia (600 m de profundidad), Vigo (2.100 m de profundidad), Vasco de Gama (VDG, 1.750 m de profundidad) y Oporto (2.200 m de profundidad) (Fig. 4.3 y 4.4). El margen continental noroeste está limitado al norte por la llanura abisal de Vizcaya.



**FIGURA 4.3:** Batimetría de la región atlántica norte del dominio del modelo. Localización de las principales características geográficas y topográficas de la región: cabos (triángulos rojos), ríos (triángulos amarillos), llanuras abisales, bancos y cañones submarinos.

La marea oceánica en esta región se encuentra dominada por el constituyente semi-diurno  $M_2$  (LeCann, 1990; Wöppelmann et al., 2006; Marcos et al., 2007). En general, está caracterizada por un factor  $F^5$  significativamente inferior a 0,25 (véase, p. ej., en Vigo donde se tiene un valor de  $F = 0,026$ , lo que indica que la marea es claramente semi-diurna). En el Golfo de Vizcaya, las amplitudes de la marea oceánica para el constituyente  $M_2$  incrementan su valor de sur a norte debido, principalmente, al ensanchamiento de la plataforma continental en esa dirección (Fanjul et al., 1998; Wöppelmann et al., 2006), véase Figura 4.3. Así, las amplitudes de la onda de marea  $M_2$  son del

<sup>5</sup> El carácter diurno o semi-diurno de la marea se determina a partir de las amplitudes de los armónicos  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  y  $O_1$  mediante el factor *Número Forma* (Kjerfve y Knoppers, 1991),  $F = (A(K_1) + A(O_1)) / (A(M_2) + A(S_2))$ . Para valores de  $F > 3$  la marea se considera de tipo diurno, para valores de  $F < 0,5$  de tipo semi-diurno y para valores intermedios: si  $0,25 < F < 1,5$  de tipo mixto predominantemente semi-diurno y para  $1,5 < F < 3$  mixto predominantemente diurna.

orden de 1 m sobre la llanura abisal, 1,3 m sobre la fractura de la plataforma continental, mientras que en la costa son del orden de 1,7 m (Pairaud et al., 2008). Por el contrario, las amplitudes de las ondas  $O_1$  y  $K_1$  son casi constantes a lo largo de la costa y del orden de 0,07 m (Le Cann, 1990). En ambas bandas de marea la propagación de fases<sup>6</sup> se produce lentamente en dirección noroeste (Le Cann, 1990), siendo en el Golfo de Vizcaya para la onda  $M_2$  del orden de  $90^\circ$  (Pairaud et al., 2008).

#### **4.2.2.2 Región Atlántico Noreste, Golfo de Cádiz y Estrecho de Gibraltar**

##### **La Costa Oeste de la Península Ibérica**

La costa oeste de la Península Ibérica en el Atlántico Norte, se extiende entre las latitudes  $37^\circ$  N y  $43^\circ$  N con una orientación norte-sur a lo largo del meridiano  $9^\circ$  O, excepto entre Peniche (latitud  $39.4^\circ$  N) y el Cabo Espichel (latitud  $38.4^\circ$  N) (Fig. 4.1 y 4.4), donde la línea de costa avanza unos 20 km en dirección oeste (Fortunato et al., 2002). En general, la costa oeste peninsular está caracterizada por una topografía del fondo muy variable, donde la profundidad se incrementa desde los 3 m en la costa a 5.000 m océano adentro en una distancia angular de tan sólo  $2^\circ$  y con un fuerte gradiente a lo largo del borde de la plataforma continental (Sauvaget et al., 2000; Fortunato et al., 2002). Asimismo, la región se caracteriza por la presencia de largos cañones submarinos<sup>7</sup> que influyen considerablemente en la dinámica oceánica de la zona. Más aun, la región puede dividirse en tres secciones diferenciadas, separadas por sus tres cañones submarinos principales (Nazaré, Setúbal y San Vicente) que atraviesan el talud y la plataforma continental hasta adentrarse en las llanuras abisales. Así, al norte del cañón Nazaré la anchura de la plataforma continental aumenta de norte a sur, desde unos 20-30 km al sur del Cabo Finisterre hasta Oporto, 40 km entre Oporto y Aveiro, hasta alcanzar 50-55 km al norte de Cabo Espichel. Esta plataforma se caracteriza, además, por una pendiente muy abrupta (desde un 6% hasta un 20%). La sección comprendida entre los cañones de Nazaré y Setúbal tiene una topografía del fondo y una geometría costera complejas. A una distancia de 10-15 km de la costa al noroeste de Peniche existen dos islas pequeñas (Farilhões y Berlengas) y al suroeste de Lisboa dos cañones submarinos (Lisboa y Cascáis). Cabe destacar en esta sección el espolón de Estremadura, cresta que se extiende desde el margen continental hasta las profundidades oceánicas y que separa las llanuras abisales de Iberia, al norte, y Tajo, al sur. Esta última, Tajo, es una llanura semi-cerrada rodeada por tres cordilleras submarinas: la dorsal Madeira-Tore al oeste, el espolón de Estremadura al norte y el banco Gorringe (de ~200 km de largo) al sur (Pinheiro et al., 1996). Por último, la sección comprendida al sur del cañón Setúbal hasta el Cabo de San Vicente, se caracteriza por un estrechamiento considerable de la plataforma continental, hasta los 10-20 km, siendo su pendiente menos abrupta, y con un incremento aproximadamente exponencial de la profundidad (Almeida y Dubert, 2006). Localizado al suroeste del margen continental ibérico, a una profundidad de unos 4.800 m, se encuentra la llanura abisal de la Herradura.

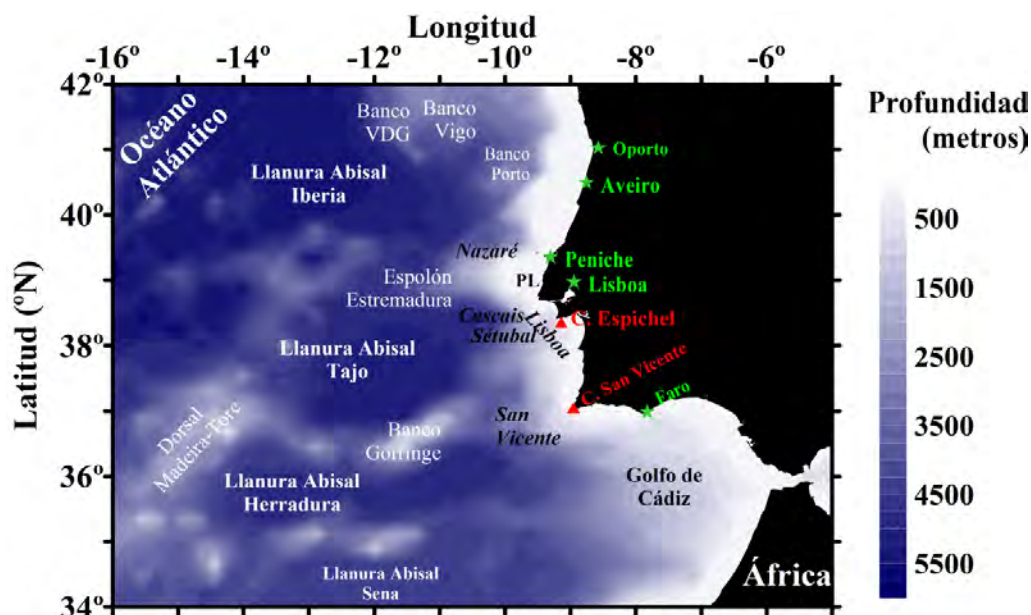
---

<sup>6</sup> La fase creciente indica la dirección de propagación.

<sup>7</sup> Un *cañón submarino* es un valle profundo abierto en el talud continental que se extienden en el sentido de la pendiente.



La marea oceánica en esta región está dominada por el constituyente semi-diurno  $M_2$ , siendo su amplitud del orden de un 1 m sobre toda la región, aunque con pequeñas amplificaciones a lo largo de la plataforma continental en la parte más al norte de Portugal. La propagación de fases de esta onda de marea se produce, en general, de sur a norte en una dirección casi perpendicular a la línea de costa.



**FIGURA 4.4:** Mapa batimétrico de la región Atlántico noroeste del dominio del modelo, que incluye la costa oeste de la Península Ibérica y el Estrecho de Gibraltar. Localización de las principales características geográficas y topográficas de la región.

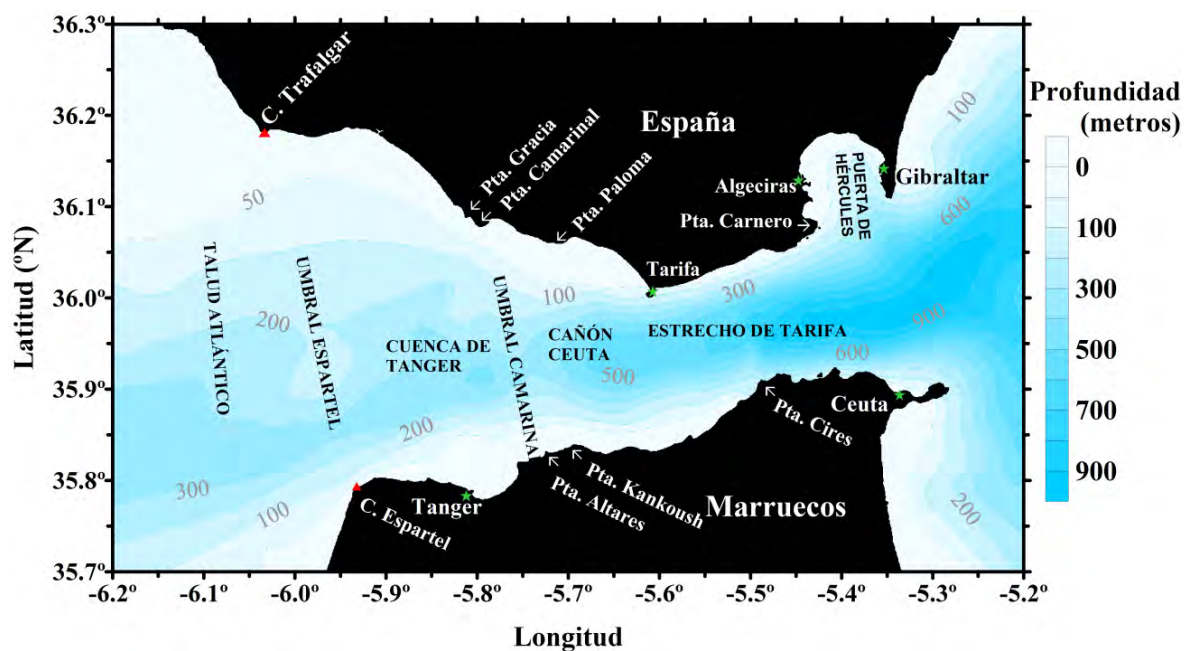
### El Golfo de Cádiz y El Estrecho de Gibraltar

En el Cabo de San Vicente se produce un cambio de orientación drástico, casi en ángulo recto, de la costa peninsular. La batimetría en el Golfo de Cádiz (Fig. 4.4), región atlántica situada entre el Cabo de San Vicente y el Estrecho de Gibraltar, se caracteriza por la presencia de una plataforma continental relativamente estrecha frente a las costas de Portugal, de unos 17 km de ancho, y un pronunciado talud que se ensancha hacia el este (alcanzando unos 30 km) antes de estrecharse nuevamente (hasta ~10 km) hacia el Estrecho de Gibraltar (Medialdea, 2004). El sector comprendido entre el Cabo de San Vicente y Faro se caracteriza, además, por la presencia de una serie de cañones submarinos (Sagres, Lagos, Portimao y Faro). Por otra parte, el Estrecho de Gibraltar, situado entre el Golfo de Cádiz y el Mar de Alborán, abarca desde la línea que une los Cabos de Trafalgar y Espartel hasta la línea que une Gibraltar y Ceuta (Fig. 4.5). El Estrecho tiene una longitud aproximada de 60 km, que corresponde a la distancia entre Cabo Espartel y Ceuta, y una anchura media de 16 km, con un mínimo de 14 km en el Estrecho de Tarifa, entre Tarifa y Punta Cires. El Estrecho de Gibraltar se caracteriza por una geometría compleja, formada por un sistema combinado de umbrales<sup>8</sup> (en el lado del Océano Atlántico) y estrechos, así como una fuerte variabilidad en su batimetría. Aproximándose al Estrecho desde el Mar de Alborán, caracterizado por una cuenca de

<sup>8</sup> El **umbral** es la parte baja de una cordillera submarina o de una barrera, y separa una cuenca de otra o del mar abierto.



profundidad de unos 1.000 m, la batimetría decrece gradualmente hasta los 800-900 m en el límite este del Estrecho, entre Gibraltar y Ceuta, hasta los 700 m de profundidad que caracterizan su parte más angosta en el Estrecho de Tarifa. A partir de aquí, la profundidad del fondo desciende bruscamente hasta alcanzar una profundidad mínima de 284-300 m en el Umbral de Camarinal, localizado en las proximidades de la entrada oeste al Estrecho, entre Punta Paloma (España) y Punta Altares (Marruecos). Al oeste de dicho umbral se encuentra la depresión o cuenta de Tánger que lo separa del Umbral de Espartel (zona menos profunda, de unos 360 m, y de más anchura del Estrecho que, a su vez, separa la cuenca de Tánger del talud Atlántico), a partir del cual las profundidades comienzan a aumentar hasta alcanzar valores típicos oceánicos en el Golfo de Cádiz (Izquierdo et al., 2001; Vargas, 2004).



**FIGURA 4.5:** Batimetría del Estrecho de Gibraltar. Localización de las principales características geográficas y topográficas de la región: cabos, puntas, umbrales, etc.

El Estrecho de Gibraltar representa una importante condición de contorno para los procesos dinámicos del océano, ya que es un canal de unión donde interaccionan las aguas procedentes del Océano Atlántico y del Mar Mediterráneo. El nivel del agua en el Mar Mediterráneo, debido al exceso de evaporación de agua, disminuye con respecto del Atlántico. Por esta diferencia de niveles y, además, al diferir la densidad de ambos, se establecen gradientes de presión que generan una fuerza que mueve las aguas de la capa superior hacia el Mediterráneo, para compensar su pérdida. Esa misma agua se transforma también, a causa de la evaporación y otras influencias atmosféricas, en un agua más densa y de alta salinidad, que por ser pesada se hunde y ocupa las capas más profundas de la cuenca y regresa al Atlántico a través del Estrecho (Izquierdo et al., 2001). De esta forma, la topografía singular del Estrecho, junto con las diferentes características fisiográficas y dinámicas de las regiones del Golfo de Cádiz, al oeste, y el Mar de Alborán, al este, hacen que la marea oceánica en el Estrecho presente características espaciales muy variables.

Al igual que en el Atlántico Norte, el régimen de marea en el Golfo de Cádiz y el Estrecho de Gibraltar está dominado por el constituyente de marea  $M_2$  (García-Lafuente et al., 1987), para el que las amplitudes decrecen de oeste a este y las fases se propagan en dirección suroeste (Candela et al., 1990; Tejedor et al., 1999; 1998). La amplitud de los constituyentes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  y  $S_1$  es del orden de 1, 0,4, 0,06 y 0,01 m, respectivamente, en el Golfo de Cádiz (Álvarez et al., 2003). En la entrada oeste del Estrecho, la amplitud de la marea  $M_2$  es de unos 75-80 cm (en las proximidades de Cabo Trafalgar) y decrece hasta 30-40 cm en su entrada este (en torno a Ceuta) (García-Lafuente et al., 1990; 2000). Asimismo, la diferencia de fases entre las dos entradas es casi cero, es decir, en el Estrecho de Gibraltar la onda de marea  $M_2$  se comporta como una onda estacionaria<sup>9</sup> (Wang, 1993). Con respecto al comportamiento de las ondas semi-diurnas debe señalarse que, por ejemplo, la razón entre los constituyentes de marea  $M_2$  y  $S_2$ , tanto en amplitud como en fase, no varía significativamente a lo largo del Estrecho (Tejedor et al., 1998; 1999).

Con respecto a las ondas de marea diurna,  $O_1$  y  $K_1$  presentan características semejantes: un lento incremento de la amplitud en dirección hacia el sur (con valores absolutos máximos en Cabo Espartel) y una rápida variación de fases, que aumenta a medida que las ondas penetran en el Mediterráneo. A pesar de que  $O_1$  y  $K_1$  presentan características semejantes, la razón entre ambas ondas en amplitud y fase sí varía a lo largo del Estrecho (Tejedor et al., 1998; 1999). Diversos autores (p.ej., Fortunato et al. 2000; 2002) sugieren que este comportamiento (amplitudes muy pequeñas y fuertes gradientes de fase) puede atribuirse a la existencia de líneas nodales o puntos anfdrómicos. Por una parte, García-Lafuente et al. (1987) sugieren la existencia de un punto anfdrómico degenerado<sup>10</sup> en el interior de la Península Ibérica el cual, a mayor escala, puede considerarse como una línea nodal en el Estrecho que es consecuencia de las fuerzas externas que provienen desde el Atlántico y el Mediterráneo. Tejedor et al. (1998, 1999), por otra parte, señalan la presencia de un anfídromo en el Estrecho de Tarifa para el constituyente  $O_1$ , localizado ligeramente desplazado en dirección norte desde el eje del Estrecho, con rotación en sentido contrario a las agujas del reloj. Estos autores atribuyen su origen a las diferentes fuerzas externas que actúan a ambos lados del Estrecho, más específicamente a la existencia de oscilaciones en antifase (opuestas 180°) en las regiones adyacentes del Atlántico Norte y del Mar Mediterráneo. Al contrario que para  $O_1$ , la onda  $K_1$ , con una diferencia de fase próxima a 90° entre ambos extremos del Estrecho, no forma un anfídromo. Finalmente, Fortunato et al. (2000, 2002) refieren la presencia de puntos anfdrómicos para los constituyentes  $O_1$  y  $K_1$ . Para este último armónico el anfídromo es de tipo degenerado.

#### 4.2.2.3 Mar de Alborán y Mar Mediterráneo

Al este del Estrecho de Gibraltar se presenta el Mar de Alborán, delimitado al oeste por la línea imaginaria que une Almería y Oran (en Argelia) (Fig. 4.6). La principal característica en esta zona es

---

<sup>9</sup> Una *onda estacionaria* es un tipo de onda en la cual la superficie del agua oscila verticalmente entre puntos fijos llamados *nodos*, sin que exista propagación alguna.

<sup>10</sup> Se dice de un *punto anfdrómico degenerado* cuando éste se desplaza a tierra.

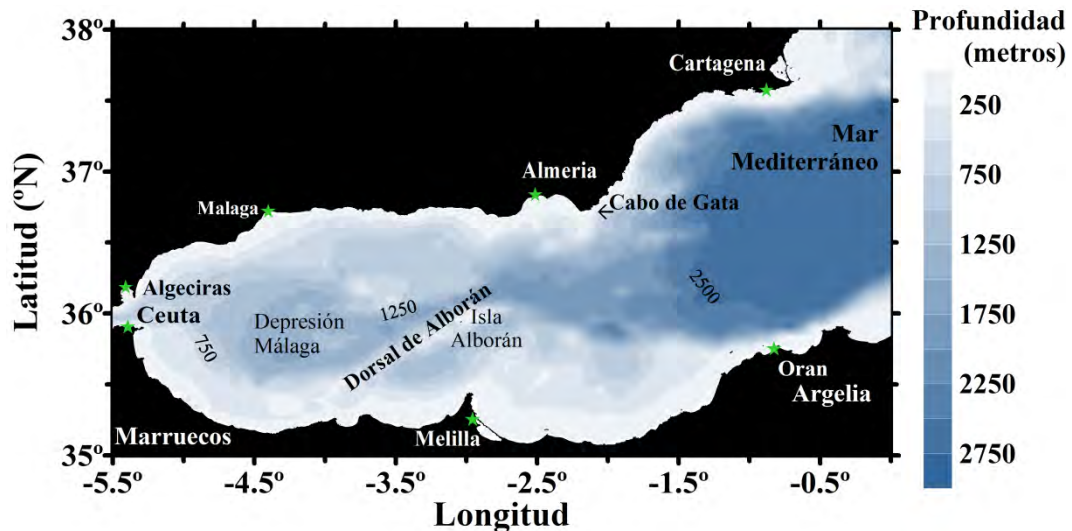
la dorsal de Alborán, cuya dirección noreste-suroeste divide la cuenca oceánica en dos, las subcuencas Occidental y Oriental. En general, la subcuenca Occidental no supera los 1.000 m de profundidad, mientras que la subcuenca oriental, que se extiende hacia el Mar Mediterráneo, supera los 2.000 m. Este último, el Mediterráneo, es un mar semi-cerrado poco profundo, de unos 1.500 m de media. Se encuentra dividido en dos regiones, la Occidental y la Oriental, separadas ambas por el Estrecho de Sicilia, entre la costa de Sicilia y el extremo noreste de Túnez. La zona objeto de estudio se restringe a la Cuenca Mediterránea Occidental, limitada al oeste por la longitud 6° E, que comprende el mar de Alborán, el canal de Valencia y las cuencas Catalano-Balear y Algero-Provençal (Fig. 4.7). En general, las plataformas continentales en la región son estrechas, de 5 a 6 km, con un ligero ensanchamiento en las proximidades del delta del Ebro y el Golfo de León. Los taludes, que se extienden desde los 100-150 m de profundidad, son abruptos y escarpados. Las llanuras abisales presentan una profundidad media de unos 2.600 m, siendo la profundidad máxima de 2.852 m (Riba, 1983). Las Islas Baleares poseen plataformas continentales independientes, demarcadas por dos collados submarinos<sup>11</sup>: Uno entre el cabo de la Nao e Ibiza (de 813 m) y otro entre Ibiza y Mallorca (de 748 m) (Riba, 1983). Cabe destacar, además, una serie de accidentes geográficos, como son los pronunciados cañones submarinos del talud catalán Feix, Blanes, Palamos, Creus y Lacaze, el ascenso continental Balear, el escarpe de Menorca, que se prolonga hacia el sur siguiendo la dorsal de Menorca y, finalmente, los escarpes de Emile Beaudout y Mazarrón.

En general, el Mar Mediterráneo presenta rangos de marea pequeños (del orden de unos pocos cm para las mareas semi-diurnas), debido a las dimensiones de su cuenca y las áreas estrechas de entrada de agua (Pugh, 1987). La dinámica de la marea en la región se encuentra influenciada, por una parte, por las características de marea de las aguas del Atlántico que penetran a través del Estrecho y, por otra parte, por la topografía del fondo oceánico. Esto último influye haciendo variar significativamente el régimen de marea de una zona a otra dentro de esta región. Por ejemplo, a lo largo de la costa peninsular mediterránea la amplitud de  $M_2$  decrece desde Algeciras en dirección a Alicante (en Málaga la marea es claramente semi-diurna, con un factor  $F = 0,21$ , mientras que en Valencia es mixta predominantemente diurna, con un factor de  $F = 2,67$ ). Por el contrario, la amplitud de  $M_2$  incrementa su valor en la dirección opuesta, desde Alicante hacia Barcelona (donde la marea es mixta, pero predominantemente semi-diurna, con un factor de  $F = 0,67$ ) (García et al., 2000). Por otra parte, la región se caracteriza por que presenta diferencias significativas en el patrón de propagación de las mareas diurnas con respecto a las semi-diurnas. A su vez, se aprecian diferencias, tanto en amplitud como en fase, entre los principales constituyentes semi-diurnos (de Toro et al., 1995; Gil, 2002). Finalmente, un aspecto que debe ser cuidadosamente analizado en esta región es la existencia de puntos o áreas singulares. Son numerosos los autores que aseveran, y no menos los que contradicen, la existencia de diversos puntos anfídromicos. Asimismo, la localización de los diversos anfídromos también varía entre autores. Véase, las siguientes referencias:

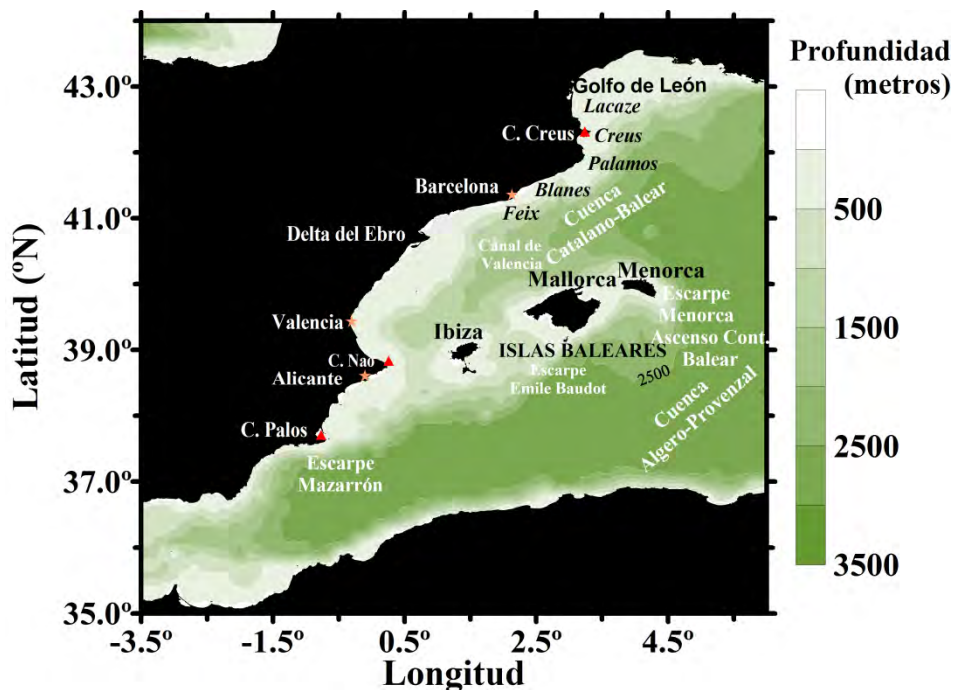
---

<sup>11</sup> Un collado es una depresión montañosa a lo largo de una cresta.

- Pugh (1987) indica la presencia de un anfídromo semi-diurno cerca de la línea de longitud 0°.
- Vincent y Canceil (1993) indican la existencia para  $M_2$  de un anfídromo en la Cuenca Occidental.
- Lozano y Candela (1995) encuentran para  $M_2$  un anfídromo degenerado al sur de Valencia.
- Tsimplis et al. (1995) señala el punto anfídromico para  $M_2$  localizado próximo a Almería.
- García et al. (2000) destacan que el salto de fase entre Alicante y Valencia muestra la existencia de una línea nodal Alicante-Orán.
- Pérez et al. (2002) señalan la existencia de un anfídromo para  $M_2$  próximo a Alicante.



**FIGURA 4.6:** Mapa batimétrico del Mar de Alborán.



**FIGURA 4.7:** Mapa batimétrico del Mar Mediterráneo (restringido a la zona de estudio). Localización de las principales características geográficas y topográficas de la región.

### **4.3 Estudios Previos en la Región**

Es difícil encontrar en la literatura modelos de marea oceánica regionales que abarquen el dominio objeto de estudio en este trabajo. Por el área cubierta, los modelos que más se aproximan a nuestro objetivo son los desarrollados por Vieira et al. 1986; 1986b; 1991b; de Toro, 1989, Vieira y de Toro, 1992; de Toro et al., 1993. Las cartas de marea elaboradas por estos autores, denominadas IBERIA, con la finalidad de calcular el EOI en la Península Ibérica, están desarrolladas para los armónicos de marea  $M_2$ ,  $S_2$  y  $N_2$ . Se basan en la construcción de un modelo empírico a partir de observaciones mareográficas en la zona, sobre cuyos límites externos se impone que las isolíneas de amplitud y fase enlacen con las del modelo de marea global SCH80. La elección de este modelo se basó en la comparación del efecto de carga calculado, a partir de diversos modelos globales, con el observado en diferentes estaciones de marea gravimétrica en la Península Ibérica. Es importante destacar que estos trabajos suponen además, uno de los primeros esfuerzos en el desarrollo de modelos regionales/locales de marea oceánica en las diferentes áreas abarcadas en el dominio. Por claridad en la exposición de los contenidos, se realiza el estudio de antecedentes en la literatura atendiendo a las diferentes subzonas, como en Secciones anteriores. En cada caso se presentarán, junto con los trabajos y modelos referidos propios de cada subzona, los resultados obtenidos en dicha subzona por Vieira y de Toro et al. referidos anteriormente.

#### **4.3.1 Región Atlántica: Costas Norte y Oeste de la Península Ibérica**

A lo largo del tiempo se han desarrollado diversos modelos de marea oceánica para la región circundante a las costas norte y oeste de la Península Ibérica. Estos modelos tienen por objeto diferentes fines de investigación en geodesia, geodinámica y oceanografía, por lo que han sido elaborados de diversas formas atendiendo a cada finalidad. Por ejemplo, el mayor interés en el estudio de la marea en esta zona, con fines principalmente oceanográficos, se encuentra en relación con la intensidad y los gradientes en las corrientes de marea, así como con los procesos de fricción interna que se producen en zonas de plataforma continental (p. ej. Sauvaget et al., 2000; Almeida y Dubert, 2006). Cuando se trata de elaborar modelos de marea oceánica para una región particular, la consideración de resultados y conclusiones procedentes de trabajos previos son de gran importancia, incluso cuando éstos no se encuentran directamente relacionados con la investigación objeto de estudio. Estas consideraciones pueden ayudar a adecuar la metodología y a prestar especial atención a determinadas zonas y efectos dentro del dominio del modelo. Este es el caso, por ejemplo, de las investigaciones llevadas a cabo por Fanjul et al. (1997, 1998), Sauvaget et al. (2000), Fortunato et al. (2002), Almeida y Dubert (2006) y Pairaud et al. (2008). Aunque en su mayoría los modelos oceánicos elaborados por los autores citados tienen por objeto el estudio de las corrientes de marea sobre plataformas continentales, se destacan algunos aspectos de estos trabajos que posteriormente servirán de referencia o para propósitos de comparación:

- Fanjul et al. (1997, 1998) elaboran un modelo hidrodinámico 3D para los constituyentes  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $K_1$ . Su construcción se basa en las ecuaciones de Reynolds e incluye los términos de fricción del fondo oceánico (con  $C_b = 0,0025$ ) y de viscosidad horizontal (con  $A_H = 200 \text{ m}^2/\text{s}$ ), aunque desprecia los términos correspondientes a las fuerzas derivadas del potencial astronómico de marea. La topografía del fondo oceánico proviene de la base de datos ETOPO5 (ETOPO5, 1988) y, como condiciones de frontera abierta, utiliza las elevaciones de marea oceánica proporcionadas por el modelo RSC94 (Secc. 3.3.3). Como validación, compara sus resultados con observaciones procedentes de diversos mareógrafos costeros y de profundidad. En general, para la onda  $M_2$  sus resultados difieren del orden del 5% con respecto a las observaciones mareográficas costeras (un 2% con respecto a las de profundidad), exceptuando en la costa francesa, donde sus valores superan hasta en un 10% a los observados. En la banda diurna, sus valores difieren significativamente con respecto a las observaciones, hasta 2 cm en amplitud y más de 1 hora en fase. Los autores atribuyen estas diferencias en fase a las deficiencias del modelo utilizado como condiciones de frontera abierta.
- Sauvaget et al. (2000) desarrollan un modelo hidrodinámico 2D, restringido a la zona de plataforma continental de la costa oeste de la Península Ibérica, que incluye los efectos de fricción del fondo, basado en la técnica de elementos finitos (la resolución varía desde 13 km a 1 km). Destaca en su construcción la utilización de la batimetría ETOPO5 (aunque para una zona restringida del modelo utiliza datos de mayor resolución) y las elevaciones de marea, impuestas como condiciones de frontera abierta, procedentes del modelo FES94 (Secc. 3.3.3). Los autores destacan la importancia de la inclusión del término del potencial generador de marea en la modelización hidrodinámica.
- Fortunato et al. (2002) desarrollan un modelo 2D, restringido a la plataforma continental de la región atlántica de la Península Ibérica, mediante la técnica de elementos finitos (la resolución angular varía desde 18 minutos hasta 3 segundos). Deben reseñarse algunos aspectos considerados para su elaboración: (1) La utilización de la base de datos *World Vector Shoreline* del *U.S. Geological Survey* (Wessel y Smith, 1996) para la delimitación de los contornos costeros. Como se pondrá de manifiesto en los Capítulos siguientes, las líneas de costa extraídas de esta fuente pueden resultar imprecisas, incluso para contornos continentales, principalmente cuando se trabaja con una alta resolución angular de la cuadrícula oceánica. (2) Las condiciones de frontera abierta especificadas por el modelo CSR3.0 (Secc. 3.3.3) para los constituyentes ( $O_1$ ,  $K_1$ ,  $M_2$ ,  $S_2$  y  $N_2$ ). Aunque la precisión de CSR3.0 en el océano abierto es aceptable, en la región del Mediterráneo es relativamente baja (recuérdese que en este mar la marea oceánica se obtuvo directamente de los modelos AG95.1 y FES94.1), pudiendo inducir errores en el interior del dominio del modelo, como señalan los propios autores. (3) Un coeficiente de viscosidad horizontal dependiente del tiempo y del espacio de tipo Smagorinsky (1963) (Cap. 3, Secc. 3.4.1.1). Aunque sería de esperar que la introducción de un coeficiente

de viscosidad de este tipo minimizase un suavizamiento excesivo sobre el borde de la plataforma continental, debido a la alta resolución de la cuadrícula en esta zona, los autores señalan que las diferencias con respecto a la utilización de un coeficiente de viscosidad constante ( $A_H = 50 \text{ m}^2/\text{s}$ ) sólo tendría discrepancias marginales. Al comparar los resultados obtenidos con observaciones mareográficas (en un total de 12 emplazamientos costeros), los constituyentes de marea semi-diurnos muestran discrepancias medias del orden del 3% en amplitud (1% en fase), mientras que para los constituyentes diurnos los valores medios son del orden del 15% en amplitud (2% en fases). En el caso de las mareas semi-diurnas, los autores atribuyen las discrepancias, en su mayor parte, a limitaciones en las observaciones de marea. Por el contrario, estas limitaciones en los datos no justifican, al menos en su totalidad, las elevadas discrepancias en los constituyentes diurnos.

- Almeida y Dubert (2006) desarrollan un modelo oceánico 3D (resolución 0,75 km en longitud y 2 km en latitud) que atiende, principalmente, a la estructura vertical de la variación de la corriente de marea sobre la plataforma continental y los procesos de fricción interna que se producen en estas zonas en relación con la profundidad. Destacan sus resultados sobre el comportamiento de las mareas diurnas en la región del Promontorio de Lisboa.
- Pairaud et al. (2008) desarrollan un modelo hidrodinámico basado en las ecuaciones 2D de aguas poco profundas mediante la técnica de elementos finitos (con resolución desde 20 km hasta 1 km). Destacan entre sus conclusiones que, aunque sus resultados mejoran con respecto a los modelos globales (GOT00.2, FES2004) sobre las plataformas continentales, su precisión se degrada considerablemente en las zonas de mayor profundidad en el dominio abarcado debido, entre otros, a la no asimilación de datos observados.
- Sebastião et al. (2008) elaboran un modelo 3D hidrodinámico (sin asimilación de datos) para la región de la costa atlántica europea (resolución 10' en longitud y 15' en latitud). Este modelo, obtenido mediante la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, incorpora el efecto del potencial generador de marea, así como otros efectos meteorológicos tales como el viento y la presión atmosférica. La topografía del fondo oceánico proviene de ETOPO5 aunque con algunas correcciones ya que, como señalan los autores, dicha batimetría contiene imprecisiones sobre las áreas de plataforma continental. Con el fin de validar su modelo, los autores comparan los resultados obtenidos con datos procedentes de mareógrafos costeros. Son significativas las diferencias resultantes en Port-Bloc/Point de Grave, Málaga, Ceuta, Gibraltar y, ocasionalmente, en Vigo y Cascáis.

#### **4.3.2 Estrecho de Gibraltar**

El Estrecho de Gibraltar, por sus características singulares, ha sido objeto de numerosas investigaciones, principalmente orientadas al estudio de la generación y propagación de las mareas

internas<sup>12</sup> no-lineales en la zona y su interacción con la marea barotrópica. Los modelos hidrodinámicos elaborados con esta finalidad se basan, principalmente, en la estratificación vertical del océano (generalmente de una a tres capas). Entre estos modelos, destacan los desarrollados por Sánchez y Pascual (1988), Wang (1989, 1993) y González et al. (1995). Asimismo, cabe destacar los trabajos dedicados al estudio de la circulación oceánica, el intercambio de flujo, las corrientes de marea (desplazamientos horizontales de las masas agua causados por la fuerza generadora de marea) y/o sus interacciones con el clima. En el marco de estas líneas de investigación se encuadran los modelos desarrollados por Wang et al. (1989, 1993), Sannino et al. (2002, 2004), Brand et al. (2004) y Castro et al. (2007).

En lo que respecta propiamente al estudio de la componente vertical de la marea oceánica en el Estrecho de Gibraltar, atendiendo a las frecuencias principales diurnas y semi-diurnas, cabe destacar la discrepancia aún existente en los resultados obtenidos mediante la modelización de la marea oceánica a partir de la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas con respecto a las provenientes de observaciones in-situ, a pesar del gran número de datos disponibles en la región. En esta línea, deben citarse las investigaciones llevadas a cabo por:

- García Lafuente et al. (1987) elaboran cartas de marea de la región del Estrecho de Gibraltar para las principales especies de marea. Para su desarrollo se basan en las observaciones de la elevación del nivel del mar, procedentes de una red mareográfica formada por un total de 8 estaciones (6 sensores de presión de fondo y 2 mareógrafos costeros).
- Sánchez y Pascual (1988) construyen un modelo de 2,5 km de resolución espacial, a partir de las ecuaciones hidrodinámicas promediadas verticalmente, para el caso de un fluido turbulento, incorporando los efectos de la rotación de la Tierra (la fuerza de Coriolis se toma para un valor de latitud promedio de los límites del modelo) y la fuerza generadora de marea (no se incluyen los términos advectivos). Para la resolución del sistema de ecuaciones utilizan un esquema de diferencias finitas centradas en el tiempo y en el espacio, así como condiciones de frontera abierta interpoladas a partir de tres estaciones mareográficas de referencia.
- González et al. (1995) elaboran un modelo numérico para los constituyentes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_1$ , basado en la técnica de elementos finitos para la resolución del sistema de ecuaciones de aguas poco profundas (resolución  $\sim 0.875$  km). El modelo se encuentra forzado en las fronteras abiertas por las constantes armónicas tomadas de las observaciones realizadas en tres estaciones mareográficas.
- Candela et al. (1990) desarrollan para el constituyente  $M_2$  un modelo de marea oceánica a partir del análisis de los datos de mareógrafos costeros y de profundidad, obtenidos durante el conocido como “*Experimento de Gibraltar*” (Kinder y Bryden, 1987; 1988) (Secc. 4.4.1.1).
- Tejedor et al. (1998; 1999) desarrollan un modelo hidrodinámico (de resolución 0,5 km) para los armónicos  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ , donde las condiciones de frontera abierta se imponen a partir de

---

<sup>12</sup> Las ondas de marea internas son movimientos de agua originados a partir de variaciones en su densidad.



observaciones mareográficas (dos en la frontera oeste, Trafalgar y Espartel, y otras dos en la frontera este, Gibraltar y Ceuta). Sus resultados muestran una reducción de más del doble en las amplitudes para  $M_2$ , entre los extremos oeste y este del Estrecho, así como su invariabilidad a lo ancho del estrecho. Para este mismo constituyente, la variación en fases a lo largo del eje longitudinal del Estrecho es pequeña y se propagan en dirección suroeste. Asimismo, el factor de proporción en las amplitudes y fases de las  $M_2$  y  $S_2$  entre las entradas oeste y este del Estrecho es, aproximadamente, constante. Estos resultados para  $M_2$  y  $S_2$  concuerdan con los obtenidos por Candela et al. (1990). Asimismo, la comparación con datos de mareógrafos y presión de fondo muestran diferencias máximas que no exceden de 7 cm (10%), para las amplitudes de  $M_2$  y  $S_2$ , y de  $10^\circ$  en fase. Aunque la concordancia de  $O_1$  y  $K_1$  es buena, es peor que para las ondas semi-diurnas. Esto se atribuye a que, por una parte, la resolución empleada es insuficiente para resolver algunas de las características locales de la batimetría y de la configuración de la línea de costa y, por otra parte, a que las mareas diurnas son muy sensibles a tenues variaciones morfométricas debido a la pequeña amplitud de estas ondas.

Para la región del Estrecho (incluido el Golfo de Cádiz y la parte oeste del Mar de Alborán), los resultados del modelo hidrodinámico bicapa elaborado por Izquierdo et al. (2001) y Brandt et al. (2004) son significativos. Aunque su objetivo fundamental reside en el estudio de las interacciones del clima y la dinámica oceánica y, por tanto, la metodología y parámetros involucrados en su desarrollo atienden a aspectos concretos de estas investigaciones, cabe destacar, a partir de los resultados obtenidos con su modelo, algunas conclusiones relacionadas con la elevación de la marea oceánica. El modelo, de resolución 0,125 km en el Estrecho y 1 km en el resto del dominio, incluye los efectos de la fricción del fondo oceánico, a través de una parametrización cuadrática con coeficiente de arrastre  $C_b = 0,01$ , y de la viscosidad turbulenta, tomando  $A_H = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ , con el fin eliminar perturbaciones a las componentes de la velocidad de longitud de onda corta. Estos autores consideran, además, la topografía del fondo obtenida a partir de la batimetría ETOPO5 (aunque complementada en áreas específicas con datos de mayor resolución), y las condiciones de frontera abierta impuestas desde el modelo FES95.2 (Cap. 3, Secc. 3.3.3). Para su validación, comparan los resultados obtenidos para el constituyente de marea  $M_2$ , tanto con observaciones existentes en la zona de estudio como con el modelo de Tejedor et al. (1999). Destaca el hecho de que las amplitudes obtenidas por Izquierdo et al. (2001) y Brandt et al. (2004) son significativamente más pequeñas que las obtenidas por Tejedor et al. (1998, 1999) y, además, se alejan más de los datos observados. De ello se concluye que el modelo de Tejedor et al. (1998, 1999) resulta más adecuado para describir la elevación de marea para los constituyentes considerados. Esto se atribuye, entre otras causas, a la imposición en las fronteras abiertas de constantes armónicas que provienen de observaciones.

#### **4.3.3 Mar Mediterráneo**

En el caso específico del Mar Mediterráneo, es significativo el aumento reciente de las investigaciones llevadas a cabo relacionadas, directa o indirectamente, con la marea oceánica. Este

hecho se debe, en gran medida, a la necesidad de corregir las medidas de altimetría por satélite con el fin de estudiar las variaciones en el nivel del mar. Los modelos oceánicos globales que existen actualmente no tienen la precisión suficiente para describir las características de marea de regiones tales como el Mar Mediterráneo. De ahí, el esfuerzo llevado a cabo los últimos años para mejorar el conocimiento de la marea oceánica en la región (p. ej., Ratsimandresy et al., 2007). A pesar de la gran proliferación de modelos oceánicos en esta región durante los últimos años, no debemos pasar por alto su evolución histórica. Así,

- Grace (1931) describió la marea oceánica en la zona a partir de teorías gravitatorias, mientras que Villain (1949) utilizó para ello observaciones en la costa Mediterránea Occidental.
- Defant (1961) estudió teóricamente la marea en el Mediterráneo e interpretó los datos observados, para el constituyente  $M_2$ , como una onda estacionaria y con un punto anfifrómico al sudoeste de las Islas Baleares.
- Dressler (1980) investigó numéricamente la marea para  $M_2$  en el Mediterráneo.
- Sánchez et al. (1992) investigaron la marea oceánica en el Mediterráneo usando asimilación de mareógrafos y datos altimétricos para constreñir sus soluciones numéricas.
- Vincent y Canceil (1993) estimaron las amplitudes típicas de marea en el rango de 1 a 10 cm y señalaron, además, la existencia para  $M_2$  de un punto anfifrómico en la Cuenca Occidental.
- Lozano y Candela (1995) desarrollaron un modelo oceánico para la onda de marea  $M_2$  (a partir de las ecuaciones linealizadas de Laplace incluyendo el potencial gravitatorio astronómico, las mareas terrestre y de carga y los efectos de fricción con el fondo oceánico). Los autores señalan la presencia de un punto anfifrómico degenerado al sur de Valencia.
- Tsimplis et al. (1995) investigaron la propagación de marea en el Mediterráneo mediante el uso de un modelo de alta resolución y, en particular, clarificaron el papel de la marea de equilibrio y la entrada de energía de marea desde el Atlántico. Los autores señalan, además, la presencia de un punto anfifrómico en Almería para  $M_2$ . Cabe mencionar que Shum et al. (1997) señalan este modelo desarrollado por Tsimplis et al. (1995) como una alternativa a los modelos globales en la región del Mar Mediterráneo.
- De Toro et al. (1995) desarrollaron un modelo de marea para el Mar Mediterráneo, para los constituyentes  $M_2$ ,  $S_2$  y  $N_2$ , basándose en un número considerable de estaciones mareográficas distribuidas regularmente y en combinación con el estudio de la respuesta hidrodinámica de diferentes cuencas oceánicas a las fuerzas de marea, así como perturbaciones meteorológicas. Impusieron como condiciones de frontera abierta las isolíneas de amplitudes y fases, de tal forma que se solapasen, sin discontinuidad, al modelo global SCH80. La precisión de sus resultados sobre las áreas costeras es de 2 cm, incluyendo en ellas las amplitudes y fases para los tres armónicos modelados.

## 4.4 Datos Asimilados en el Modelo IBER01

Los datos asimilados en el modelo de marea oceánica consisten en dos tipos de medidas de elevación del océano. Por una parte, las realizadas con mareógrafos costeros y de profundidad y, por otra parte, las procedentes de observaciones de altimetría por satélite.

### 4.4.1 Observaciones Mareográficas Costeras y de Profundidad

Los instrumentos clásicamente utilizados para medir la marea oceánica son los *mareógrafos*. Este tipo de instrumento mide, en un emplazamiento dado, las variaciones en la elevación del nivel del mar, de forma que el análisis posterior de los datos observados permite obtener las componentes del espectro de la marea oceánica en dicho lugar (p. ej., Lefèvre, 2000). Las observaciones mareográficas utilizadas para este estudio proceden, tanto de estaciones costeras (realizadas, principalmente, con mareógrafos de flotador<sup>13</sup>, acústicos<sup>14</sup> y de radar<sup>15</sup>) como de estaciones de profundidad (a partir de sensores de presión de fondo). A diferencia de los mareógrafos clásicos, los sensores de presión instalados en el fondo oceánico registran, como su propio nombre indica, la presión ejercida por una columna de agua de sección la unidad sobre el instrumento. A partir de estas variaciones en la presión pueden deducirse las variaciones en altura de la columna de agua, mediante la siguiente relación hidrostática (Smithson, 1992)

$$\xi = P / (\rho_w \cdot g) \quad [4.1]$$

donde  $P$  es la presión ejercida por la columna de agua (en 0,01 mbar<sup>16</sup>),  $\rho_w$  es la densidad media de la columna de agua del mar (en kg/m<sup>3</sup>),  $\xi$  es la elevación de la marea oceánica resultante (en m). Generalmente, como valor de la gravedad,  $g$  (en m/s<sup>2</sup>), se considera el apropiado para la latitud correspondiente al emplazamiento del instrumento.

La asimilación de datos mareográficos en un modelo hidrodinámico, se lleva a cabo utilizando las constantes armónicas obtenidas del análisis de las series temporales de las observaciones mareográficas disponibles en el dominio del modelo. En particular, para la construcción del modelo IBER01, se han considerado las observaciones de un total de 88 estaciones distribuidas en la zona de estudio (Fig. 4.8 y Tabla 1 en Apéndice 2). Estas estaciones comprenden series observadas de presión de fondo, localizadas principalmente en el Mar Cantábrico, en la región atlántica del dominio

---

<sup>13</sup> El *mareógrafo de flotador* es un instrumento de medición que permite la lectura directa del nivel del agua. Básicamente, este tipo de mareógrafo consiste en un cilindro fijo a la costa y conectado al mar a través de un orificio en su base. El tamaño de este orificio es lo suficientemente pequeño como para filtrar el movimiento del agua asociado al oleaje inducido por el viento y otras ondas de período corto, y tal que, únicamente, la variación en el nivel del agua asociada a la marea puede entrar en el cilindro. Gracias a un flotador sobre el agua en el interior del cilindro, estas variaciones en el nivel del mar se recogen y almacenan a través de algún sistema de registro (analógico o digital).

<sup>14</sup> Un *mareógrafo acústico* está constituido por un emisor-receptor de ultrasonidos, que se instala de forma fija a cierta distancia sobre la superficie del agua. El sistema de medida se basa en el cálculo del tiempo transcurrido entre el lanzamiento del pulso acústico hacia el agua y la recepción del pulso reflejado.

<sup>15</sup> Un *mareógrafo de radar* es un sensor que, para medir nivel del mar, emplea la técnica basada en la emisión de una señal de microondas y la recepción del eco de la superficie del agua. La distancia del sensor a la superficie del mar se obtiene a partir del retardo en la propagación de la señal debida a la distancia entre ambos.

<sup>16</sup> 1 mbar = 1 hPa = 10<sup>2</sup> N/m<sup>2</sup>.

del modelo y en el Estrecho de Gibraltar, así como observaciones mareográficas en las costas ibérica, balear, francesa y africana. El conjunto de datos considerados en este estudio procede de numerosas fuentes y ha sido recopilado de diversas bases de datos de carácter público. A continuación, se procede a describir este conjunto de datos (series temporales y/o constantes armónicas originales) atendiendo a su procedencia, clasificación y organización para este trabajo. Asimismo, se describen los procedimientos de análisis aplicados a las series temporales para la obtención de las constantes armónicas.

#### **4.4.1.1 Procedencia de los Datos: Fuentes de Información y Organismos Distribuidores**

La información recopilada proviene de numerosos y diferentes organismos nacionales e internacionales. Estos organismos son, en su mayor parte, propietarios, productores y distribuidores a la comunidad científica de los datos de interés. En ocasiones, los datos se facilitan a través de redes de observación y bancos de datos que recopilan y distribuyen dicha información. En este trabajo, la información disponible para la zona de estudio consiste en series temporales mareográficas y, en su ausencia, en las constantes armónicas proporcionadas por los organismos responsables.

a) Los organismos productores y distribuidores de las series mareográficas son:

- *Instituto Hidrográfico de la Marina de España (IHME), Puertos del Estado (PE), Instituto Español de Oceanografía (IEO), Instituto Geográfico Nacional (IGN), Generalitat de Catalunya (GC), Univer. Politècnica de Catalunya (LEM-UPC), Univer. de las Islas Baleares, Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados (UIB-IMES).*
- *Instituto Hidrográfico de la Marina de Portugal (IHMP), Instituto Português de Cartografia e Cadastro (IPCC).*
- *Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER (IFREMER), Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM), Système d'Observation du Niveau des Eaux Littorales (SONEL).*
- *Proudman Oceanographic Laboratory (POL), British Oceanographic Data Centre (BODC).*
- *Hydrographic Office (HO-UK), Univer. of Hawaii Sea Level Center (UHSLC).*

b) Las redes de observación y los bancos de datos distribuidos son:

- El banco de datos de la *Inter-Agency Procurement Services Office (IAPSO)*, que recopila, principalmente, los registros históricos de datos de presión del fondo.
- El banco de datos del Nivel del Mar del Atlántico Norte, distribuidos por el BODC a través de su página web <http://www.bodc.ac.uk>.
- La red *European Sea Level Service (ESEAS)*, formada por organismos de 23 países y destinada a proporcionar información relacionada con el nivel del mar en aguas europeas.
- El banco de datos global *Permanent Service for Mean Sea Level (PSMSL)*, cuyo principal fin es recopilar, publicar, analizar e interpretar los datos del nivel del mar a escala global.

- El banco de datos de la **RED de MAREógrafos** (REDMAR) de **Puertos del Estado** (PE)<sup>17</sup>.
  - El programa *Global Sea Level Observing System* (GLOSS), dirigido por la comisión JCOMM del WMO y del IOC, para el establecimiento de redes del nivel del mar, a escala global y regional, de alta calidad con diversos fines de investigación oceanográfica.
  - La red para la observación del nivel del mar en el Mediterráneo MEDGLOSS.
  - La red de mareógrafos del IEO (España), establecida inicialmente en 1943<sup>18</sup>.
  - El banco de datos del **World Ocean Circulation Experiment** (WOCE), proyecto internacional destinado a la recopilación de medidas asociadas a modelos numéricos, en relación con la circulación oceánica y las variaciones del clima terrestre.
- c) En determinados emplazamientos, donde no se dispone de series temporales (Tabla 2 en Apéndice 2<sup>19</sup>), se han recopilado las constantes armónicas publicadas en los siguientes trabajos.
- IAPSO publica en Smithson (1992) las constantes armónicas de los principales constituyentes de marea, obtenidas a partir de las series temporales procedentes de los mareógrafos de profundidad recopilados por dicho organismo. Las constantes armónicas recopiladas corresponden a las estaciones números 1, 2, 6, 7, 45, 67, 68, 69 y 70<sup>20</sup>. A su vez, las constantes armónicas de las estaciones números 2, 6 y 7 corresponden a las publicadas por el *Scientific Committee on Oceanic Research* (SCOR, 1975). Las series temporales en las estaciones números 67, 68, 69 y 70 fueron recopiladas en el marco del denominado “*Experimento de Gibraltar*” (Kinder y Bryden, 1987; 1988) y publicadas por Candela et al. (1990).
  - LeCann (1990) recopila las constantes armónicas procedentes, por una parte, de mediciones costeras (estaciones 16, 21, 22, 23 y 25) y, por otra parte, de registros de presión de fondo coleccionados en el marco de los proyectos de investigación TRANSEPLAT83 (estaciones 9 a 12) y CIRESOL87 (estaciones 13 a 15) realizados por el IGBA e IFREMER, respectivamente.
  - Las constantes armónicas tomadas de Fanjul et al. (1997) corresponden a las estaciones números 18, 19, 24 y 29. Algunas de estas estaciones también han sido analizadas por LeCann (1990) y servirán como comparación.
  - El Anuario de Mareas (1990), producido por el IHME, donde se publica la previsión de mareas en diversos puertos españoles para el año en curso. Las constantes armónicas consideradas en este estudio corresponden a las estaciones números 32, 37, 38, 42, 53, 55, 57, 58, 60 y 72.
  - Los informe anuales de la REDMAR de PE. En estos informes se detalla tanto el estado de la red de mareógrafos, como los resultados del análisis de las series temporales observadas en cada una de las estaciones que componen esta red. PE facilita dichas constantes armónicas a

<sup>17</sup> Con fecha de 2010, la red REDMAR dispone de un total de 40 mareógrafos (12 acústicos SONAR, 6 de presión Aanderaa y 22 sensores de radar MIROS) situados a lo largo de las costas españolas.

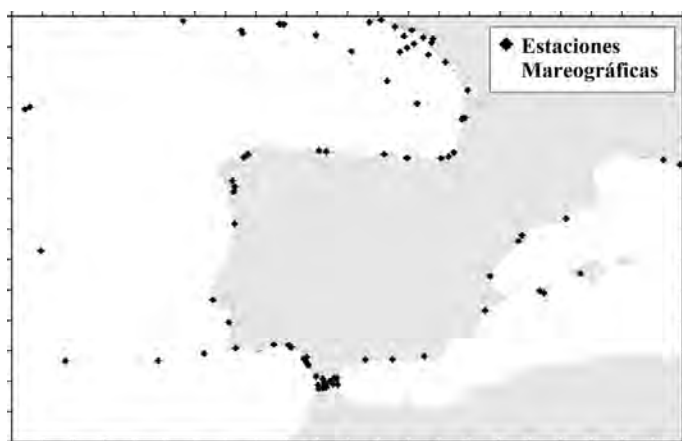
<sup>18</sup> Con fecha de 2010, en la red del IEO se encuentran en funcionamiento un total de 12 estaciones (6 en la costa mediterránea, 3 en la Península Ibérica, 2 en las Islas Baleares y 1 en la costa africana).

<sup>19</sup> En la Tabla 2 (Apéndice 2) se indican el periodo de tiempo usado en el análisis de las series temporales y la metodología empleada.

<sup>20</sup> Diversas estaciones recopiladas por IAPSO están publicadas en otros trabajos previos. Para algunas de las series temporales se dispone de análisis de marea realizados por otros autores, que serán utilizados para su contrastación.

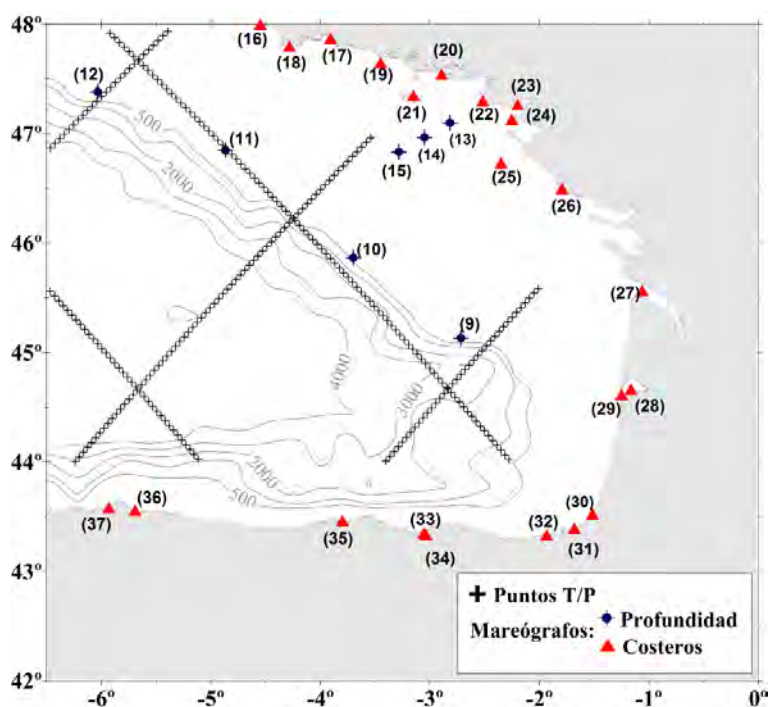
través de su página web <http://www.puertos.es/externo/clima/Mareas/index.htm>. Los datos extraídos corresponden a las estaciones números 34, 35, 36, 39, 41, 43, 54, 56, 59 y 80.

- Fortunato et al. (2002) obtienen, mediante el método de análisis armónico, las amplitudes y fases de los principales constituyentes de marea en diversas estaciones de la costa oeste de la Península Ibérica. En particular, las constantes armónicas tomadas de este estudio corresponden a las estaciones números 49 y 51.
- García-Lafuente et al. (1987) establecen en Gibraltar una pequeña red de sensores de presión de fondo (perteneciente al IEO), que estuvo operativa durante los años 1984 y 1985. Los autores publican las constantes de marea, correspondientes a las estaciones números 61, 62, 64, 71, 73 y 74, obtenidas a partir del análisis de las respectivas series temporales.
- Cateura et al. (2007) proporcionan las constantes armónicas de las estaciones números 81 y 82. Ambas estaciones, propiedad de la Generalitat de Catalunya y gestionadas por la UPC, se encuentran situadas en los extremos sur y norte del delta del Ebro.



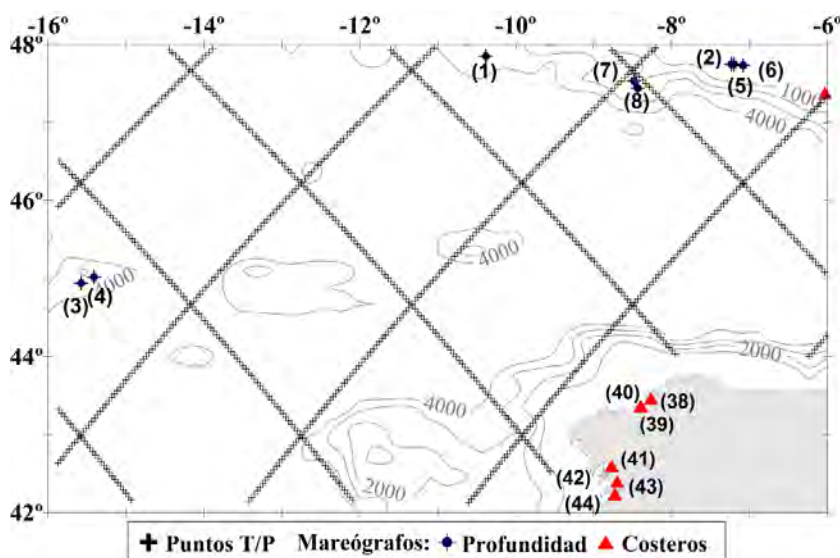
**FIGURA 4.8:**

*Estaciones mareográficas en el dominio del modelo IBER01. En la Tabla 1 (Apéndice 2) se listan las coordenadas de las estaciones y su descripción.*



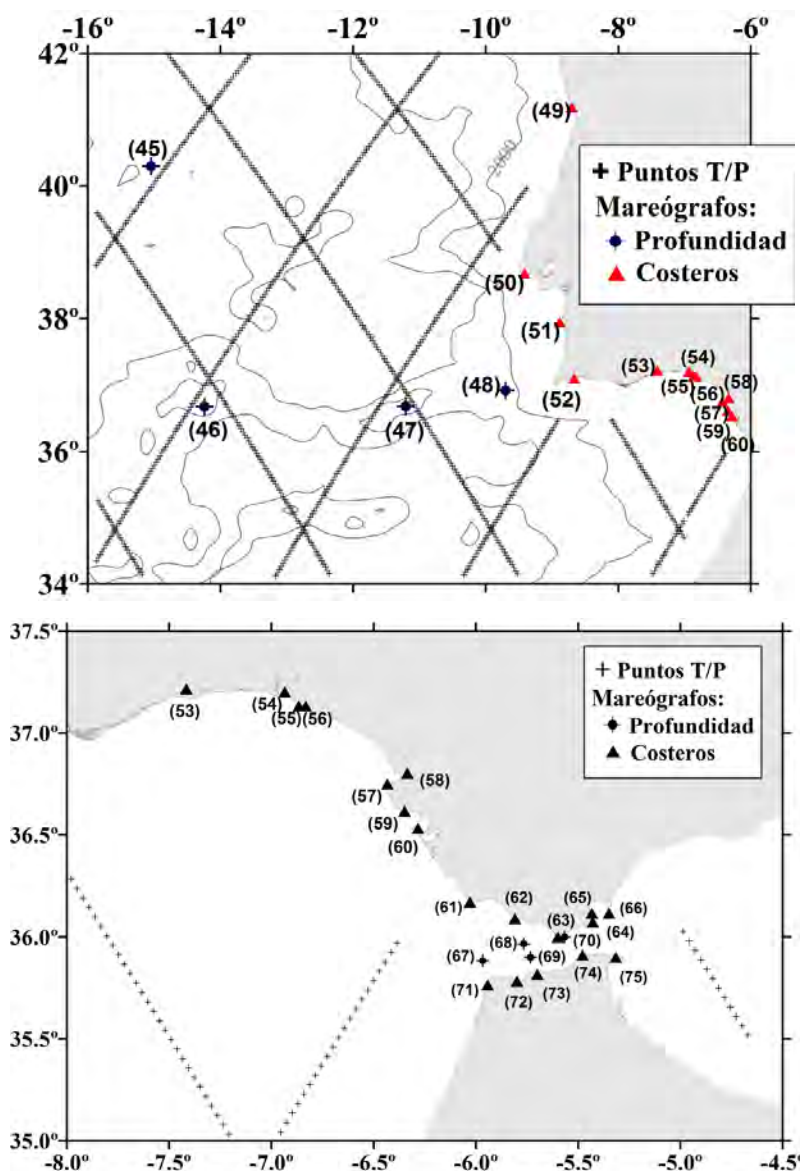
**FIGURA 4.9:**

*Estaciones mareográficas en la región del Mar Cantábrico, Golfo de Vizcaya y plataforma continental francesa. Las estaciones se identifican mediante el número asignado a las mismas en la Tabla 1 (Apéndice 2). Las cruces representan los puntos dato del satélite T/P. Se indican las isobatas de 500, 1.000, 2.000, 3.000 y 4.000 m.*

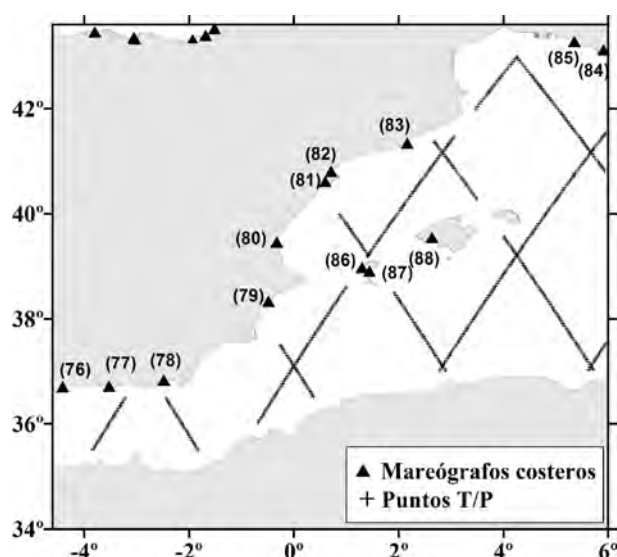


**FIGURA 4.10:**

Estaciones mareográficas en la región noroeste del dominio del modelo y el litoral gallego. Las estaciones se identifican mediante el número asignado a las mismas en la Tabla 1 (Apéndice 2). Las cruces representan los puntos dato del satélite T/P. Se indican las isobatas de 1.000, 2.000, 3.000 y 4.000 m.



**FIGURA 4.11:** Estaciones mareográficas al oeste de la costa ibérica (arriba), Golfo de Cádiz y Estrecho de Gibraltar (abajo). Las estaciones se identifican mediante el número asignado a las mismas en la Tabla 1 (Apéndice 2). Las cruces representan los puntos dato del satélite T/P. En la figura superior se indican las isobatas de 2.000 y 4.000 m.



**FIGURA 4.12:** Estaciones mareográficas en la costa ibérica bañada por el Mar del Alborán y el Mar Mediterráneo, y en el Archipiélago Balear. Las estaciones se identifican mediante el número asignado a las mismas en la Tabla 1 (Apéndice 2). Las cruces representan los puntos dato del satélite T/P.

#### 4.4.1.2 Descripción de los Datos

En el interior del dominio del modelo existe un número considerable de emplazamientos para los que se dispone de observaciones mareográficas. Los datos considerados finalmente para la construcción del modelo, las constantes armónicas de la marea oceánica, han sido seleccionados a partir de un minucioso estudio atendiendo a criterios tales como la adecuación de los emplazamientos de las estaciones de observación, la longitud del registro de datos y su calidad, así como el análisis exhaustivo de las constantes armónicas obtenidas (errores obtenidos en el proceso de análisis de marea, detección de observaciones discrepantes a partir de su coherencia espacial, comparación de los resultados con otros procedimientos de análisis o con otros autores, etc.)

La localización de los 88 emplazamientos seleccionados finalmente (Fig. 4.8) para su asimilación en el modelo de marea oceánica, se encuentra en la Tabla 1 (Apéndice 2). De ellos, 19 estaciones en la región atlántica del dominio del modelo corresponden a sensores de presión de fondo, 22 estaciones mareográficas costeras se encuentran distribuidas a lo largo del litoral francés y de la cornisa cantábrica, 7 estaciones mareográficas en las costas gallegas, 12 estaciones en la costa oeste de la Península Ibérica y del Golfo de Cádiz, 15 estaciones en el Estrecho de Gibraltar y 10 mareógrafos costeros situados en las costas mediterráneas española y francesa, además de 3 estaciones localizadas en las costas del Archipiélago Balear.

Aunque existen otras estaciones costeras y de profundidad en el interior del dominio del modelo, algunas de ellas fueron descartadas tras un examen preliminar basado en:

- La **corta longitud de la serie de observación y/o la calidad de los datos** (existencia de numerosas lagunas en las series de datos, etc.). El principal criterio aplicado para la consideración de las series temporales es que su longitud permita la separación de los principales constituyentes de marea requeridos en este estudio, siguiendo el criterio de Rayleigh ([1.59], Cap. 1). Este es el caso de los mareógrafos de profundidad IAPSO números



1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.46 y 1.1.47 (Smithson, 1992), situados sobre la plataforma continental francesa, cuya longitud de registro es de apenas unos pocos días.

- La **localización singular del instrumento de medida**, como en el interior de bahías pequeñas, estuarios o desembocaduras de ríos, donde los efectos locales (p. ej. las resonancias) de la topografía fondo o de la configuración costera no pueden ser determinados con la resolución actual del modelo. Con esto, se evitan aquéllos mareógrafos que midan efectos locales de la marea como pueden ser resonancias, efectos no lineales extremos, etc. (Lefèvre, 2000). Este es el caso de la estación de La Rochelle-Pallice ( $46^{\circ}9'30.53''$  N,  $1^{\circ}13'14.72''$  O) (Fig. 4.13). En ella se observan claramente efectos locales alrededor de la misma, que también han sido confirmados por otros autores (Fortunato et al., 2002). Con el programa VAV se realizó el análisis armónico de la serie temporal observada en esta estación (facilitada por ESEAS y SONEL), para un periodo de 10 años (desde 1997 a 2007) y con un intervalo de muestro de 10 minutos. Para el constituyente de marea  $M_2$ , la amplitud y la fase obtenidas alcanzan valores de 174,98 cm ( $\pm 0,08$ ) y  $98,45^{\circ}$  ( $\pm 0,03$ ), respectivamente. Asimismo, los valores de amplitud y fase obtenidos para este constituyente en la estación Les Sables d'Olonne (número 26, Tabla 3 en Apéndice 2), localizada en la costa francesa aproximadamente  $0,3^{\circ}$  al norte de La Rochelle, son de 156,27 cm y  $97,18^{\circ}$ , mientras que para la estación Port-Bloc/Point de Grave (estación número 27, Tabla 3 en Apéndice 2), localizada  $0,6^{\circ}$  al sur de La Rochelle, se obtiene un valor de 152,82 cm en amplitud y  $110,03^{\circ}$  grados en fase. Se observa, por tanto, como la ubicación singular del mareógrafo de La Rochelle amplifica significativamente el valor de la amplitud de la marea oceánica.

Otras estaciones han sido descartadas tras realizar estudios comparativos más exhaustivos, como son:

- La **coherencia de las observaciones en el espacio**, atendiendo a su localización costera o en el océano abierto, el gradiente batimétrico y la variabilidad de marea en la zona. Con este fin se compararon los parámetros de marea obtenidos dentro de un área de radio variable. Para una misma estación, también se tiene en cuenta la **coherencia de las observaciones en el tiempo**, esto es, observaciones realizadas en periodos de tiempo distintos, o en un mismo periodo con **distintos instrumentos**. Este es el caso de las estaciones IAPSO 1.1.5 y RD1/IAPSO 1.1.7 (estación número 8) que corresponden a un mismo emplazamiento donde estuvieron registrando dos instrumentos diferentes con una diferencia de tiempo de 3 meses (durante un mes, aproximadamente, en ambos casos). Estas estaciones se sitúan muy próximas a IAPSO 1.1.6 (estación número 7), por lo que también se aplicó el criterio de proximidad para su validación. La discrepancia en la amplitud de la marea oceánica, obtenida a partir del análisis de las respectivas series temporales publicadas en Smithson (1992), es inferior al 1% en el caso de las ondas semi-diurnas (exceptuando  $N_2$  con un 3%) e inferior al 8% para las ondas diurnas. En ambos casos, la diferencia en fases no supera los  $2^{\circ}$ . Aunque la discrepancia entre ambas estaciones para los constituyentes diurnos es considerable, teniendo en cuenta la magnitud de

la marea oceánica en la zona y los efectos locales inducidos sobre ella, se consideró adecuado incluir ambos resultados en el proceso de asimilación de los datos en el modelo hidrodinámico. En esta situación será importante estudiar el error asumido a priori en los datos, lo que será tratado en Secciones posteriores.

- La comparación de las constantes armónicas obtenidas mediante **diferentes métodos de análisis** o por diferentes autores. Este es el caso de la estación número 46 (RM2/IAPSO 1.1.42). Los resultados obtenidos en este trabajo, mediante el análisis armónico de la serie temporal con el programa VAV se han comparado con los publicados por IAPSO, analizados utilizando el método de respuesta y la inferencia de los constituyentes no detectables directamente. Las diferencias entre ambos resultados son significativas. Así, en amplitud difieren del orden de un 8% para el constituyente semi-diurno  $N_2$ , llegando incluso a un 12% para  $K_1$ . Más aun, las diferencias en fases superan los  $10^\circ$  para el constituyente  $Q_1$ . Mediante un examen minucioso de la serie temporal observada y de la comparación de los parámetros de marea obtenidos con los valores típicos en la zona obtenidos de otros modelos, se descartó el análisis publicado por IAPSO frente al obtenido con VAV. Los constituyentes armónicos finalmente seleccionados se consideraron para el proceso de asimilación, junto con las correspondientes desviaciones estándar independientes de la frecuencia.



**FIGURA 4.13:** Emplazamientos singulares de los mareógrafos Port-Bloc, La Rochelle-Pallice y Les Sables de Olonne en la costa atlántica francesa.

#### 4.4.1.3 Análisis de las Series Temporales Mareográficas

Las Tablas 3 y 4 (en Apéndice 2) recogen, respectivamente, los valores de amplitud y fase de marea de los principales constituyentes armónicos semi-diurnos y diurnos, para cada una de las 88 estaciones seleccionadas. Además, se indican los valores respectivos de las desviaciones estándar obtenidas en el proceso de análisis.

La longitud temporal de las series de datos, al igual que el intervalo de muestreo (de 1,5 a 10 minutos) y el periodo de observación, varía de una estación a otra (Fig. 4.14). Así, sólo en 5 estaciones la longitud de la serie es inferior a un mes, aunque únicamente las estaciones números 9 y 10 no superan los 20 días de registro. De las restantes estaciones, un total de 22 tienen una longitud de registro superior a un mes e inferior a seis. En los emplazamientos donde la longitud no es

suficiente para separar todos los constituyentes de marea requeridos, se han considerado únicamente aquellas constantes armónicas que sí pueden determinarse directamente a partir del análisis de la serie temporal (es decir, que sus parámetros de marea no hayan sido inferidos a partir de las amplitudes y fases de constituyentes próximos). Excepcionalmente, se han considerado los parámetros de marea facilitados por IAPSO (Smithson, 1992). En este caso, las constantes armónicas para los constituyentes de marea que no pueden ser separados, debido a la limitación de la longitud de las series, se llevó a cabo mediante la inferencia de los parámetros de marea de las ondas próximas, siguiendo el método propuesto por Godin (1972) (Secc. 1.3.1, Cap. 1). Como ejemplo, en la Figura 4.15, se ha representado la serie mareográfica observada en la estación número 65 (Algeciras) y su espectro de amplitudes.

Por otra parte, la metodología de análisis de las series temporales también varía entre las diversas estaciones (Tabla 2 en Apéndice 2). En este trabajo, se han analizado 33 estaciones empleando el programa VAV. En las estaciones restantes, donde las constantes armónicas han sido facilitadas por los organismos y autores referenciados anteriormente, la metodología de análisis empleada fue, en su mayoría, el método de análisis armónico basado en el algoritmo desarrollado por Foreman (1977). El software empleado varía entre organismos y autores, aunque el utilizado con mayor frecuencia es el desarrollado por el centro del nivel del mar de la Universidad de Hawái (Caldwell, 1998; <http://uhslc.soest.hawaii.edu/uhs/c/jaspr2/nmman2.html>). Excepcionalmente, en las estaciones cuyas constantes armónicas han sido facilitadas por IAPSO (Smithson, 1992), se empleó el método de análisis de respuesta. Todos estos métodos de análisis han sido expuestos en la Sección 1.3 (Cap. 1).

Independientemente de la metodología de análisis empleada y de la procedencia de las series temporales<sup>21</sup>, para la obtención de las constantes armónicas, los datos brutos registrados por los diferentes instrumentos han sido sometidos a diversos controles de calidad y a un pre-procesado previo a su análisis. Éstos consisten, básicamente, en lo siguiente:

- i) Una inspección visual de los datos brutos para la detección y eliminación de datos dudosos y la eliminación de picos. Esto se ha llevado a cabo con el software TSOFT V.2.1.2 (Van Camp y Vauterin, 2005).
- ii) Exceptuando aquellas series temporales analizadas con el programa VAV, las interrupciones existentes en los datos se han interpolado mediante alguna técnica (lineal, cúbica, etc.)
- iii) Una vez depuradas las series temporales, y también a excepción de las analizadas con VAV, son sub-muestreadas a datos horarios (con el fin de eliminar ruido de alta frecuencia) mediante la aplicación de un filtro adecuado. Por ejemplo, a los datos procedentes de la REDMAR de

---

<sup>21</sup> Se indica el pre-procesado de las series temporales que se ha realizado en este trabajo (corresponden a las analizadas con el programa VAV). Además, se señala el pre-procesado seguido por los organismos que han proporcionado directamente las constantes armónicas (a falta de las series temporales para este trabajo).

PE, registrados a intervalos de tiempo de 5 minutos, se les aplica un filtro simétrico paso bajo, de 54 coeficientes. La expresión general de este tipo de filtros es (Pugh, 1987)

$$\chi_f(t) = \mathcal{F}_0 \cdot \chi(t) + \sum_{m=1}^{54} \mathcal{F}_m [\chi(t+m) + \chi(t-m)] \quad [4.2]$$

donde  $\chi_f(t)$  denota el valor filtrado en el instante  $t$ ,  $\mathcal{F}_m$  ( $m = 0, \dots, 54$ ) es el conjunto de coeficiente del filtro (véase Apéndice 1 en Pugh, 1987) y  $\chi(t)$  es la elevación del nivel del mar observada en el instante  $t$ .

Las dos últimas acciones se han omitido para el análisis de los datos con VAV puesto que, como se señaló en el Capítulo 1, la técnica desarrollada por Venedikov et al. (2003) permite el uso de series temporales con incrementos de tiempo arbitrarios, de datos no equi-espaciados y con interrupciones en los mismos.

A continuación, se exponen algunas consideraciones que se han tenido en cuenta en el procesado de las series temporales, atendiendo a metodologías empleadas, estaciones u organismos particulares:

### **Series de datos de presión de fondo**

En las series de datos de presión de fondo, la conversión de la amplitud de la marea oceánica obtenida en unidades de presión se transforma en unidades de elevación mediante la expresión [4.1]. En dichos cálculos se ha considerado el valor del producto de la densidad del agua del mar por la gravedad,  $\rho_w \cdot g = 10.080 \text{ kg/m}^2\text{s}^2$ , que es adecuado para la región del Atlántico Norte (de Toro, 1989). Excepcionalmente, en la estación número 5 (RLCB1, Fig. 4.10), siguiendo el criterio especificado por BODC, se han considerado los valores  $\rho_w = 1.027 \text{ kg/m}^3$  y  $g = 9,809 \text{ m/s}^2$ .

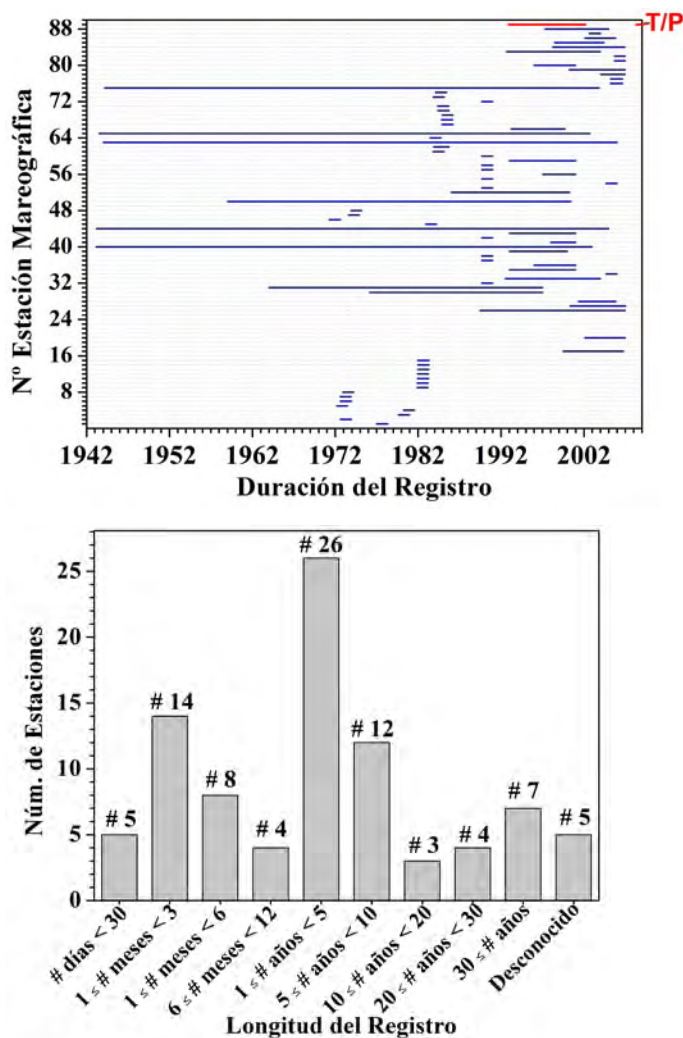
### **Análisis realizados con el programa VAV**

En el caso de las estaciones cuyas constantes armónicas han sido obtenidas con el programa VAV, se consideran, además, las correspondientes estimaciones de las desviaciones estándar de los parámetros de marea. Para su cálculo, el programa VAV se basa en la suma de los cuadrados de los residuales de los números filtrados en el dominio del tiempo/frecuencia (Venedikov et al. 2006).

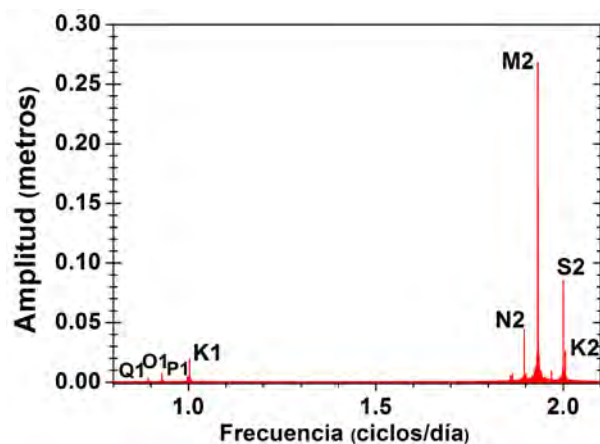
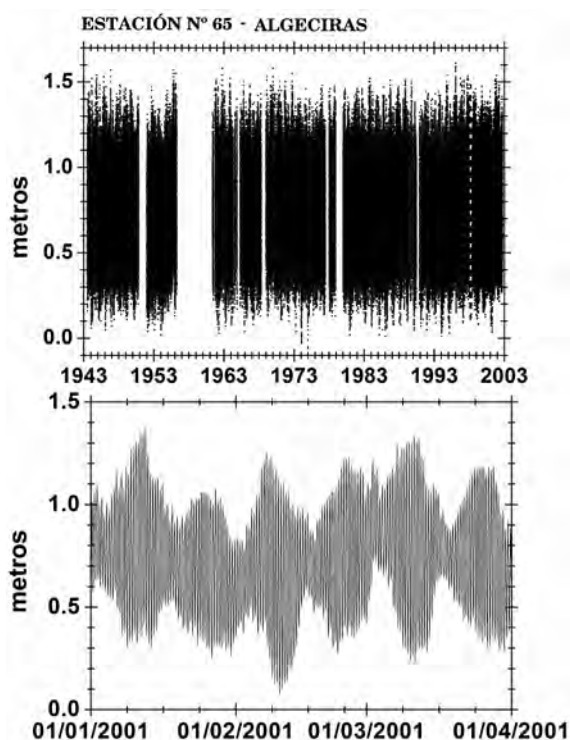
Debe observarse que, en ocasiones, junto con las constantes armónicas facilitadas por otras fuentes también se incluye la desviación estándar para toda la banda de marea (diurna o semi-diurna), aunque no se proporciona información sobre el método considerado para su estimación. En general, a partir de la comparación con otros resultados (estaciones próximas, series temporales, etc.), se observa una sobreestimación de las desviaciones estándar indicadas. Por esta razón, se ha preferido omitir en estos casos los correspondientes valores facilitados por las fuentes. Posteriormente, como se detallará en la Sección 4.5.3, se estudiará la asignación más adecuada de los errores asumidos a priori en estos datos en el proceso de asimilación de datos.

### **Otras observaciones**

En relación con las constantes armónicas facilitadas por la Generalitat de Catalunya (LEM-UPC), en las estaciones números 81 y 82 no se proporciona información sobre el método de análisis utilizado para su obtención.



**FIGURA 4.14:** (Arriba) Periodo de registro de observaciones mareográficas en las estaciones seleccionadas para este estudio (línea azul). En el eje de ordenadas se representan cada una de las 88 estaciones identificadas por el número asignado en la Tabla 1 (Apéndice 2). Para su comparación, se ha representado el periodo de tiempo correspondiente a las observaciones procedentes del satélite altimétrico T/P (línea roja). (Abajo) Longitud del registro las series temporales en las 88 estaciones. Las barras representan el número de estaciones cuya longitud de registro se corresponde con la indicada en el eje de abscisas.



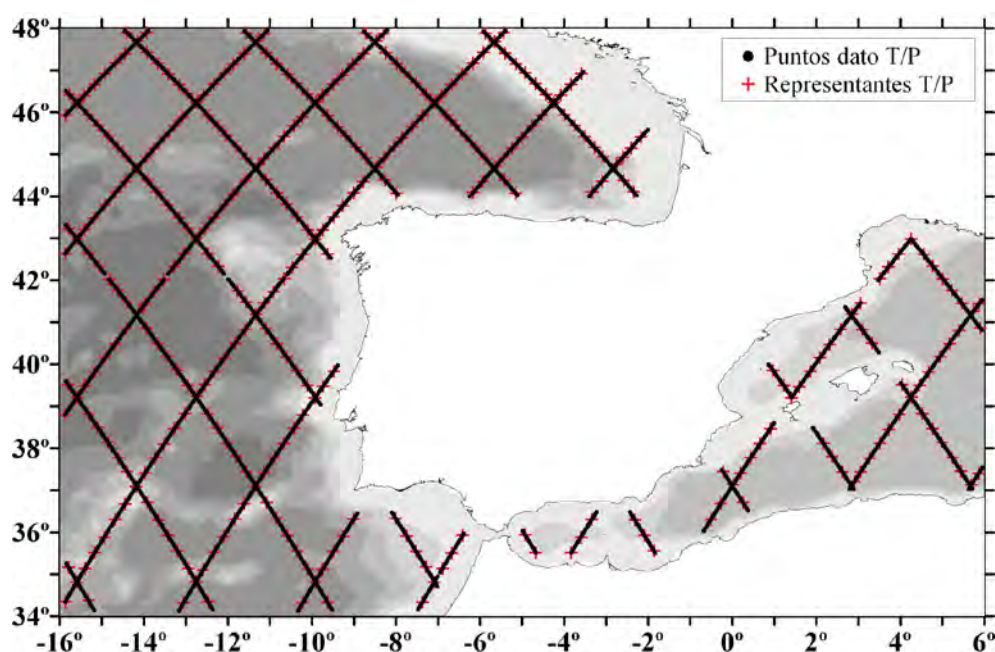
**FIGURA 4.15:**

(Izda.) Observaciones mareográficas en la estación de Algeciras, para un periodo de 60 años (arriba) y de 3 meses (abajo). (Dcha.) Espectro de amplitudes de la serie temporal (ciclos diurnos y semi-diurnos).

## 4.4.2 Observaciones Altimétricas por Satélite

### 4.4.2.1 Datos Altimétricos

Las medidas procedentes de altimetría por satélite que se han considerado para su asimilación en el modelo de marea oceánica de la Península Ibérica, corresponden al satélite TOPEX/Poseidón. Más específicamente, el conjunto de datos utilizado procede de la base de datos del Altimeter Ocean Pathfinder Project<sup>22</sup> (NASA/GSFC) (Koblinsky et al., 1999). La serie de medidas corresponde al periodo de tiempo comprendido desde Septiembre de 1992 a Febrero de 2002 (364 ciclos<sup>23</sup>) con un intervalo de datos de aproximadamente 10 días (lo que corresponde al periodo de repetición del satélite). Al igual que en el caso de los datos mareográficos, la longitud del registro garantiza la separación directa de los principales constituyentes de marea. Puesto que la resolución del modelo a desarrollar es de unos 9 km es adecuado considerar el espaciado original de los puntos a lo largo de las trazas del satélite, que es de unos 7 km. Así, el número total de emplazamientos (denotados en adelante por puntos dato) donde se han considerado las medidas T/P es de 2.400, y comprenden todos los puntos a lo largo de las trazas del satélite más los 36 puntos de cruce de las mismas en el interior del dominio del modelo. En cada punto dato se dispone de una serie temporal de unas 340 observaciones, que se duplica en el caso de los puntos cruzados. La Figura 4.16 muestra la región de estudio con las trayectorias del satélite utilizadas.



**FIGURA 4.16:** Trayectorias del satélite T/P, cuyos datos se han asimilado en el modelo IBER01. Las cruces rojas indican la localización de los datos T/P usados como representantes (puntos crossover<sup>24</sup> más cinco puntos dato a lo largo de las trayectorias entre ellos).

<sup>22</sup> En adelante será referido simplemente por proyecto Pathfinder.

<sup>23</sup> En el procesamiento de los datos T/P, se han excluido diversos ciclos de los altímetros TOPEX y Poseidón, debido a la degradación de su calidad (véase Cap. 3).

<sup>24</sup> Los puntos de intersección entre una traza ascendente y otra descendente.

#### 4.4.2.2 Correcciones Aplicadas a los Datos del Satélite

Los datos T/P considerados para este estudio se encuentran con todas las correcciones estándar aplicadas, exceptuando la corrección por marea oceánica. Brevemente, estas correcciones se realizan en dos etapas. En una primera etapa de pre-proceso, se eliminan los datos anómalos, que se detectan a partir de una serie de etiquetas asignadas a diferentes parámetros y siguiendo los criterios establecidos por el productor de los datos (en este caso el proyecto Pathfinder) y las recomendaciones dadas por Callahan (1993). Más concretamente, la información etiquetada corresponde al estado de los diferentes instrumentos del satélite y de la propia calidad de los datos (incluyendo la de los datos de telemetría). Una vez eliminados los datos anómalos, la segunda etapa del proceso consiste en la aplicación de las correcciones a los datos (tanto a la altura medida por el altímetro como a la altitud del satélite) para obtener el nivel del mar  $h(\text{SSH})$  definido por [3.4]. Estas correcciones están descritas en la Sección 3.3.1.1 (Cap. 3) por lo que, a continuación, se especifican las aplicadas a los datos del proyecto Pathfinder considerados en este estudio. Asimismo, esta información se encuentra resumida en la Tabla 4.2.

**TABLA 4.2:** Resumen de las correcciones geofísicas y de los modelos utilizados en el procesado de los datos altimétricos T/P (Modificada a partir de Koblinski, 1998).

CORRECCIÓN	TOPEX (T) / Poseidón (P)
<b>Posición</b>	
Órbita	T/P POD 2 JGM-3
Marco de referencia	ITRF2000
Elipsoide de referencia	T/P
<b>Instrumentales</b>	
SSB	Walsh (T). Gaspar BM4 (P)
Calibración	Derivas de altura, oscilador y coef. retrodispersión (T). CNES (P)
<b>Refracción atmosférica</b>	
DRY	Saastamoinen. Modelo de presión ECMWF
WET	Medidas vapor de agua, radiómetro TMR.
IONO	Medido (T). DORIS (P)
<b>Modelos geofísicos</b>	
Marea terrestre	Cartwright y Edden (1973). Wahr (1981)
Marea de carga	Schrama y Ray (1994)
Marea del polo	IERS. Deformación de la Tierra por movimiento del polo (Wahr, 1985)
Carga atmosférica	IB / ECMWF
MMS	CSRMSS95IB

##### a) Correcciones por la posición

Las efemérides precisas del satélite T/P, proporcionadas por el GSFC de la NASA, se basan en la combinación de datos de seguimiento, láser y doppler, y de modelos para las fuerzas que perturban la órbita del satélite (tales como las fuerzas generadoras de marea y aquellas fuerzas que actúan sobre la superficie del satélite). Específicamente, el modelo de gravedad terrestre considerado es el JGM-3 (Tapley et al., 1996) (Cap. 3). El marco de referencia geodésico utilizado para el procesado de los datos es el ITRF<sup>25</sup> y el elipsoide de referencia es específico a la misión T/P<sup>26</sup>.

<sup>25</sup> La materialización del marco de referencia geodésico es ITRF2000 (Altamimi et al., 2002).

## **b) Correcciones instrumentales**

Entre los errores instrumentales se encuentran, por una parte, los errores de calibración interna (cuyas correcciones para el altímetro TOPEX se basan en estimaciones de la deriva de la altura medida por el altímetro), los de la frecuencia del oscilador y los de la propia medida del coeficiente de retrodispersión. En el caso del altímetro Poseidón, las correcciones anteriores se realizan a bordo del satélite mediante calibración interna y las aplica el CNES (*Centre Nationale d'Etudes Spatiales*). Por otra parte, para la corrección del error debido al sesgo electromagnético del estado del mar (SSB) se adopta el modelo de Walsh (Callahan, 1993) para el altímetro TOPEX y el algorítmico BM4 (Gaspar et al., 1994) para el altímetro Poseidón. En ambos casos, el modelo está definido por [3.6].

## **c) Correcciones por refracción atmosférica**

Las correcciones debidas al efecto de la refracción atmosférica incluyen: (1) La corrección por la troposfera seca (DRY), mediante el modelo de Saastamoinen (1972) (ecuación [3.8]) con datos de presión extraídos del modelo *European Centre for Model and Weather Forecasting* (ECMWF) (ECMWF, 1991). (2) La corrección debida al contenido de vapor de agua en la troposfera (WET) se estima a partir de las medidas de este parámetro con el radiómetro microondas de a bordo, TMR. (3) Las correcciones ionosféricas (IONO) se estiman, por una parte, a partir de medidas directas de este efecto con un altímetro de doble frecuencia en el caso del TOPEX y, por otra parte, con medidas ionosféricas realizadas con el receptor DORIS en el caso del Poseidón (Imel, 1994).

## **d) Modelos geofísicos aplicados y superficie media del mar**

Entre los modelos geofísicos aplicados se encuentran: (1) El modelo de marea terrestre, considerado como una respuesta puramente elástica al potencial generador de marea luni-solar. El catálogo del potencial de marea considerado es el de Cartwright y Tayler (1971) y Cartwright y Edden (1973). Los números de Love adoptados para el cálculo del desplazamiento radial por la marea terrestre son los calculados por Warh (1981). (2) Cuando se trata de extraer la elevación de la marea oceánica de los datos altimétricos no se debe aplicar la corrección por marea oceánica, pero sí por la deformación vertical del fondo oceánico debida al peso de la marea oceánica. El modelo utilizado para esta corrección se ha obtenido a partir del modelo global TPXO.5 (Egbert y Ray, 2000) (Cap. 3, Secc. 3.3.3). (3) La corrección por la marea del polo, tanto del océano como de la Tierra sólida, se lleva a cabo siguiendo el cálculo estándar de Munk y MacDonald (1960), con las coordenadas polares facilitadas por el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra (IERS) (Wahr, 1985). (4) La corrección por carga atmosférica se basa en la adopción de la hipótesis de efecto barométrico inverso, y su corrección se realiza según la ecuación [3.10]. (5) Los errores en las estimaciones del nivel del mar,  $h(\text{SSH})$ , a causa de las variaciones locales en la ondulación del geoide se corrigen a partir del modelo de MMS desarrollado por la Universidad de Texas, CSRMSS95IB, construido mediante la combinación de distintos satélite (GEOSAT, ERS-2 y T/P).

---

<sup>26</sup> Este elipsoide específico de la misión T/P corresponde a una definición de primer orden de la forma no esférica de la Tierra, con radio ecuatorial de 6378,1363km y coeficiente de aplanamiento de 1/298,257 (AVISO, 1996).



#### **4.4.2.3 Obtención del Residual del Nivel del Mar y de la Marea Oceánica**

Los datos facilitados por el proyecto Pathfinder corresponden a los residuales del nivel del mar (SSA) con respecto a la superficie media del mar (MSS), según la ecuación [3.13]. Se especifican en los puntos dato y se obtienen mediante un ajuste colineal de las trayectorias de repetición (Secc. 3.3.1.1). La superficie media del nivel del mar, MSS, definida con respecto al elipsoide específico para la misión T/P, corresponde a la del modelo CSRMSS95IB referenciado anteriormente. Además de esta MSS, en este trabajo se sustrajeron de las series temporales de los residuales del nivel del mar las mareas de equilibrio y de largo periodo.

Por último, y antes de realizar el análisis armónico de las series temporales SSA, se eliminaron los puntos dato en un radio de 30-50 km de la costa situados en profundidades inferiores a 200 m, debido a la degradación de las medidas altimétricas en estas zonas (Mangiarotti, 2007; Hirose et al., 1999) (Fig. 4.16). Por el contrario, los puntos dato situados a mayor distancia de la costa pero a profundidades inferiores a 100 m no fueron excluidos directamente ya que, mediante un proceso de validación adecuado, puede comprobarse que no siempre resultan erróneos (Wöppelmann et al., 2006; Rodríguez-Velasco, 1999). Por esta razón, estos puntos se analizan individualmente y se seleccionan basándose en las desviaciones estándar obtenidas en el proceso de análisis armónico de las series temporales y, además, a partir de su comparación con observaciones independientes y/o modelos de marea disponibles. Este es el caso, por ejemplo, de los puntos dato situados a lo largo de la cornisa cantábrica (Fig. 4.9).

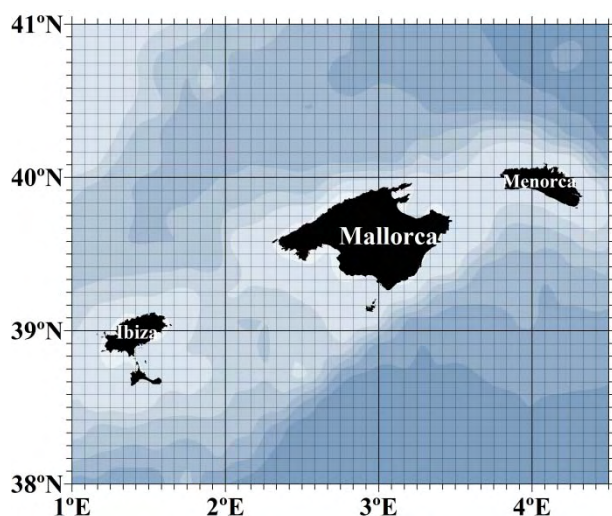
Finalmente, se ha realizado el análisis armónico de las series temporales de los residuales del nivel del mar para obtener, en cada punto dato, las constantes armónicas y sus respectivas desviaciones estándar. En este caso, se ha utilizado el programa de análisis englobado en el paquete informático *OSU Tidal Inversion Software* (Egbert y Erofeeva, 2002; 2006).

### **4.5 El Modelo de Carga Oceánica IBER01**

#### **4.5.1 Construcción de la Cuadrícula Oceánica**

El modelo de marea oceánica IBER01 cubre la región que circunda la Península Ibérica y está limitado por los meridianos 16° O - 6° E y los paralelos 34° N - 48 ° N. Como se especificará a continuación, el dominio del modelo, su extensión y límites han sido seleccionados con el fin de resolver mejor los procesos físicos involucrados en la modelización del fenómeno de marea oceánica y, especialmente, para minimizar los efectos de las condiciones de frontera abierta impuestas sobre los resultados en el conjunto del dominio. El espaciado de la cuadrícula oceánica es de  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$ , lo que provee una resolución constante de, aproximadamente, 9 km en las direcciones NS y EO. Para la determinación del estado tierra/agua de las celdas de la cuadrícula oceánica se ha utilizado un modelo digital de la topografía del fondo oceánico, resultando un total de 26.539 celdas oceánicas

(aproximadamente, un 60% del área total del dominio). En la Figura 4.17 está representado, como ejemplo, la cuadrícula oceánica sobre la región del Archipiélago Balear.



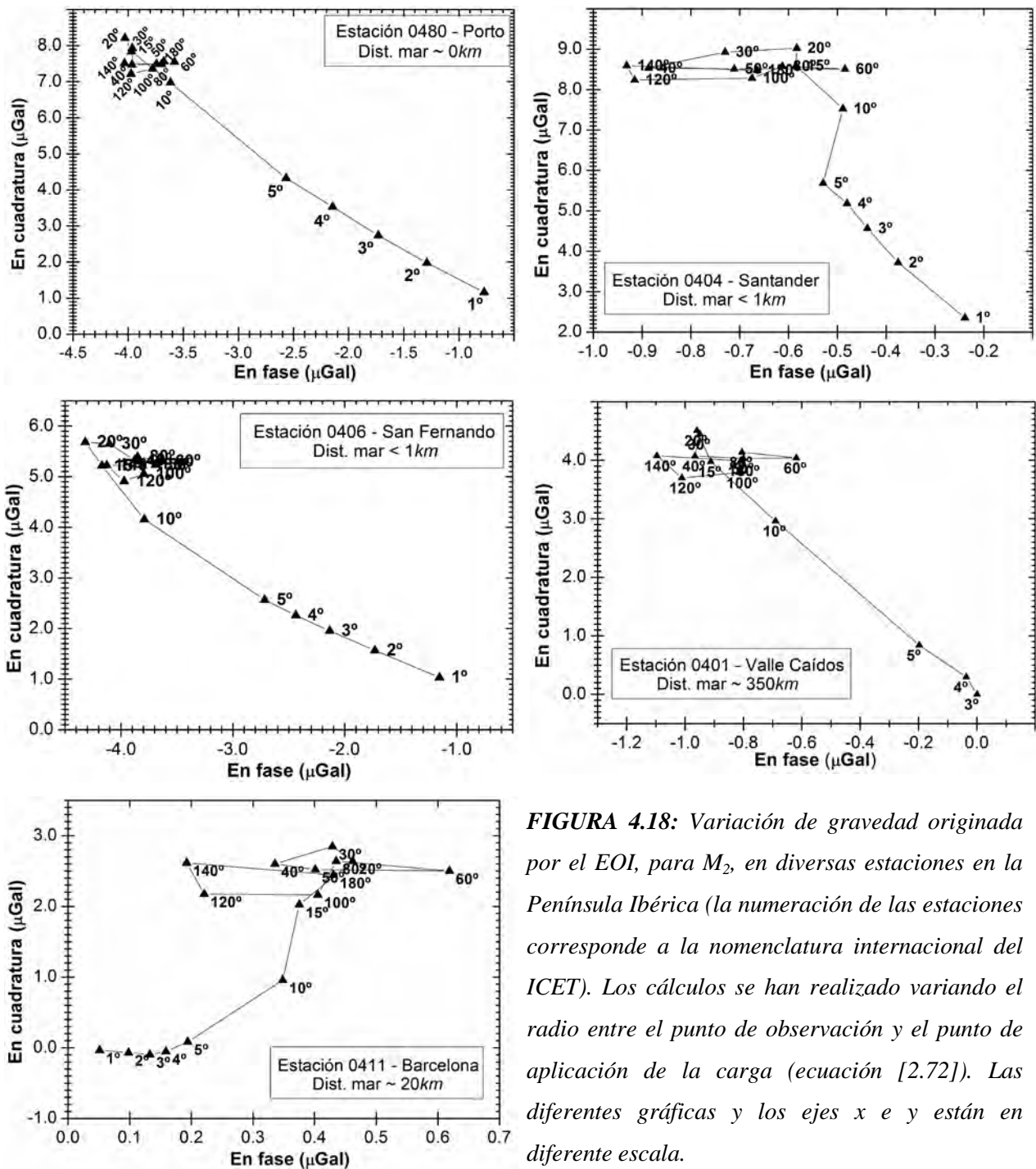
**FIGURA 4.17:** Discretización de la cuadrícula oceánica del modelo IBER01 (resolución  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$ ) correspondiente a la región del Archipiélago Balear.

Los límites del modelo han sido seleccionados teniendo en cuenta los siguientes factores:

- **El área de mayor influencia sobre el EOI calculado.** Para un emplazamiento dado, la mayor contribución al efecto oceánico proviene de la región oceánica más próxima. Como ejemplo, se ha representado en la Figura 4.18 la variación de gravedad causada por el EOI en diversas estaciones situadas en la Península Ibérica: cuatro de ellas próximas a las costas norte, oeste, sur y este (estaciones 0404, 0480, 0406 y 0411, respectivamente), mientras que la quinta se ubica en el centro peninsular (estación 0401) (Fig. 6.1 y Tabla 6.1). Para cada estación se ha calculado la contribución al EOI de áreas de diferente radio en torno al punto de cálculo. Esto es, en la ecuación [2.72] se han tomado valores de  $\psi$  entre  $1^\circ$  y  $180^\circ$ . Los resultados, representados en el diagrama de Argand<sup>27</sup> de la Figura 4.18, muestran que la mayor contribución al EOI proviene de la región oceánica circundante a la estación hasta los  $10^\circ$ - $15^\circ$  de distancia. Análogamente, y como se estudió en el Capítulo 2, puede comprobarse que la mayor contribución a los desplazamientos verticales causados por el EOI proviene de la región oceánica que abarca un radio de 150 km desde la línea de costa. Bajo estas consideraciones, los límites del modelo se han seleccionado de forma que abarquen el área de mayor contribución al EOI sobre la Península Ibérica y que no esté modelado con precisión por los modelos oceánicos globales. Claramente, el área abarcada debe ser acorde con la resolución requerida y adecuarse a los datos disponibles para su construcción.
- **El efecto de las condiciones de frontera abierta** impuestas sobre los resultados, amplitudes y fases de la marea oceánica, en el interior del dominio del modelo. Como se verá y justificará en la Sección 4.5.2.2, las condiciones de frontera abierta se han obtenido a partir de un modelo global de marea oceánica. Para minimizar errores provenientes de las imprecisiones en las

<sup>27</sup> El diagrama de Argand representa, en un sistema de coordenadas cartesianas, la parte real e imaginaria de un número complejo en los ejes de abscisas y ordenadas. En este caso, la parte real y la imaginaria corresponden a las componentes en fase y en cuadratura del EOI, respectivamente (véase Cap. 6, Secc. 6.2).

condiciones de frontera abierta, se ha tratado en lo posible de que éstas yacían sobre aguas profundas, donde la precisión de los modelos globales aumenta considerablemente. Además, se ha tratado de que en sus proximidades existan datos de observación, mareográficos o de altimetría por satélite. Se ha prestado especial atención a este punto, principalmente, en zonas fronterizas de aguas poco profundas, como es el caso de la plataforma continental francesa (Fig. 4.9 y 4.10). En particular, los límites se han seleccionado de tal forma que los puntos de cruce de las trayectorias del satélite T/P (donde se dispone de un mayor número de observaciones) sean próximos a las fronteras (Fig. 4.16).



**FIGURA 4.18:** Variación de gravedad originada por el EOI, para  $M_2$ , en diversas estaciones en la Península Ibérica (la numeración de las estaciones corresponde a la nomenclatura internacional del ICET). Los cálculos se han realizado variando el radio entre el punto de observación y el punto de aplicación de la carga (ecuación [2.72]). Las diferentes gráficas y los ejes  $x$  e  $y$  están en diferente escala.

Para seleccionar la resolución de la cuadrícula oceánica se han tenido en cuenta tres criterios interrelacionados:

- **El área cubierta por el dominio del modelo y la variabilidad espacial de la marea oceánica en el dominio.** La resolución de la cuadrícula oceánica debe ser adecuada para describir con exactitud la variabilidad de la marea oceánica (según se describió en la Secc. 4.3) para los principales constituyentes de marea en todo el dominio considerado.
- **El espaciado de los datos observados** asimilados en el modelo, procedentes de altimetría por satélite, debe ser acorde con la resolución de la cuadrícula.
- Computacionalmente, la **capacidad de memoria disponible** y el tiempo de cálculo es un factor limitante. El área abarcada, la resolución de la cuadrícula y el número de datos asimilados en el modelo deben ser tales que cada uno de ellos no coarte a los restantes.

## 4.5.2 Modelo Hidrodinámico

### 4.5.2.1 Modelo Digital de la Topografía del Fondo Oceánico

Para tener en cuenta la topografía del fondo oceánico en las ecuaciones hidrodinámicas, es necesario disponer de un modelo digital de batimetría. La calidad y resolución de los datos batimétricos es una cuestión crítica en la modelización de la marea oceánica, principalmente en zonas donde la topografía del fondo marino presenta una gran variación, puesto que la geomorfología de la zona afectará tanto al patrón de propagación de la marea oceánica como a su rango. Existen a disposición pública un número considerable de bancos de datos batimétricos mundiales de diversas resoluciones y cuya precisión, incluso en un mismo banco de datos, puede variar de una región a otra dependiendo del número y calidad de las observaciones utilizadas para su construcción. Por esta razón, la elección de la batimetría en una región particular debe realizarse atendiendo a dos aspectos fundamentales: El primero, la información debe reflejar de forma realista las características topográficas del fondo marino (tales como las montañas submarinas, pendientes continentales, etc.), así como una delimitación precisa de las líneas de costa. El segundo, tanto la resolución espacial del modelo digital batimétrico como las técnicas de interpolación o extrapolación de la información deben ser adecuadas a la resolución de la cuadrícula del modelo oceánico.

Siguiendo los criterios anteriores, y después de diversas comparaciones en la zona de estudio, la información batimétrica del entorno de la Península Ibérica (Fig. 4.2 a 4.7) se ha obtenido promediando sobre la cuadrícula oceánica el conjunto de datos procedente del Atlas Digital de resolución 1 minuto de arco *GEneral Bathymetric Chart of the Ocean* (GEBCO) (IOC, IHO and BODC, 2003). En adelante, esta batimetría será referida por GEBCO-1m.

### Resultados de la comparación con otras batimetrías

Con el fin de seleccionar el conjunto de datos batimétricos que representase con mayor fidelidad la topografía del fondo marino en el dominio del modelo, se realizó un estudio comparativo entre diferentes modelos digitales disponibles, estos son el Atlas Digital GEBCO-1m de resolución 1

minuto de arco y el Modelo Global de Relieve ETOPO2 (Smith y Sandwell, 1997), de resolución 2 minutos de arco<sup>28</sup>.

La comparación se llevó a cabo promediando en las celdas de la cuadrícula oceánica un valor de profundidad a partir de cada uno de los modelos digitales. En la Tabla 4.3 se presentan, de forma resumida, los resultados de la comparación. Existe sólo un número de puntos aislados donde las diferencias exceden los 1.000 m, que están localizados en la dorsal de Madeira-Tore y el banco Gorringe (Fig. 4.4). Asimismo, los puntos con diferencias superiores a 500 m (que suponen menos del 1% del total de puntos examinados) se distribuyen en torno a estas dos mismas áreas y, además, a lo largo de las pendientes continentales cantábrica y francesa. El resto de puntos comparados (con diferencias inferiores a 500 m) no se concentran en torno a ninguna característica geográfica destacable, si no que se extienden progresivamente en el resto del dominio del modelo, estando la mayor concentración de diferencias en el intervalo de 0-200 m. Con el fin de analizar las causas de las discrepancias anteriores, se investigaron posibles sistematismos o desviaciones entre ambas batimetrías. La comparación de la distribución de las líneas de costa y de los accidentes geográficos más significativos en el dominio del modelo entre ambos conjuntos de datos mostró una buena concordancia, por lo que las discrepancias señaladas no pueden atribuirse a un sesgo o desviación en ninguna de las batimetrías. Este hecho indica, por tanto, que las mayores discrepancias se deben a imprecisiones en ambos conjuntos de datos en áreas de fuerte gradiente batimétrico.

### **Selección del método de interpolación de los datos batimétricos en la cuadrícula oceánica**

La interpolación de la información batimétrica sobre la cuadrícula oceánica se llevó a cabo promediando, sobre esta última (de resolución 5 minutos), el conjunto de datos procedente GEBCO-1m (resolución 1 minuto). Antes de escoger este método, y con el fin de seleccionar el que proporcionase los resultados más acordes con la resolución de la cuadrícula y la realidad de la topografía del fondo, se consideraron diferentes opciones. Puesto que la resolución de la batimetría es más fina que la de la cuadrícula oceánica, se estudió la posibilidad de utilizar algún tipo de filtro de suavizado en los datos batimétricos, en concreto los filtros convencionales Gaussiano y Blackman (p. ej., Desai y Warh, 1995; Arbib et al., 2004). P. ej., se aplicó un filtro Gaussiano de la forma

$$H(\theta', \lambda') = \sum_i \sum_j h(\theta_i, \lambda_j) e^{\left[-(\psi_1/\psi_2)^2\right]} / \sum_i \sum_j e^{\left[-(\psi_1/\psi_2)^2\right]} \quad [4.3]$$

donde  $(\theta_i, \lambda_j)$  son las coordenadas de cada punto de la batimetría muestreado sobre la celda de la cuadrícula de coordenadas  $(\theta, \lambda)$ .  $h(\theta_i, \lambda_j)$  denota la profundidad oceánica en la celda batimétrica correspondiente y  $H(\theta, \lambda)$  el valor filtrado obtenido sobre la celda de la cuadrícula. Además

$$\cos \psi_1 = \cos \theta' \cos \theta_i + \sin \theta' \sin \theta_i \cos(\lambda' - \lambda_j) \quad [4.4]$$

<sup>28</sup> En el transcurso de esta memoria, se pusieron a dominio público dos nuevas versiones de las batimetrías consideradas (Capítulos 4 y 5): El Atlas Digital GEBCO\_08 (The GEBCO\_08 Grid, version 20090202, <http://www.gebco.net>) de resolución 30 segundos de arco y el Modelo Global de Relieve ETOPO1 (Amante y Eakins, 2008), de resolución 1 minuto de arco. Las diferencias con respecto a las versiones previas se concentran en el intervalo de 0-200 metros y no presentan ningún patrón espacial específico.

$$\cos \psi_2 = \cos(\theta' - d\theta'/2) \cos(\theta + d\theta'/2) + \sin(\theta - d\theta'/2) \sin(\theta' + d\theta'/2) \cos d\lambda' \quad [4.5]$$

donde  $d\theta' = d\lambda' = 5'$  es la resolución angular de la cuadrícula oceánica. Los resultados obtenidos con este método se manifiestan sensibles al filtro aplicado, principalmente en zonas de fuerte gradiente batimétrico, donde se observa un suavizado general de las profundidades oceánicas de magnitud entre 0-50 m.

**TABLA 4.3:** Comparación de las batimetrías GEBCO-1m y ETOPO2 en el dominio del modelo IBER01. En cada caso se indica el número de puntos cuya diferencia  $D$ , en m, se encuentra en el rango indicado.

Diferencia (m)	GEBCO-1m vs ETOPO2	
$D = 0$	18.563	(41,9%)
$0 < D \leq 50$	14.699	(33,1%)
$50 < D \leq 100$	4.952	(11,2%)
$100 < D \leq 200$	3.985	(9,0%)
$200 < D \leq 300$	1.102	(2,5%)
$300 < D \leq 400$	482	(1,1%)
$400 < D \leq 500$	240	(0,5%)
$500 < D \leq 600$	130	(0,3%)
$600 < D \leq 700$	91	(0,2%)
$700 < D \leq 800$	30	(0,1%)
$800 < D \leq 900$	22	(0,0%)
$900 < D \leq 1000$	17	(0,0%)
$D > 1000$	39	(0,1%)
Nº total de puntos comparados:	44.352	(100%)

#### 4.5.2.2 Condiciones de Frontera

Junto con las condiciones de frontera cerrada aplicadas a los contornos costeros, necesarias para el desarrollo de todo modelo oceánico, la construcción de un modelo regional requiere la imposición de condiciones sobre las fronteras abiertas, esto es, las celdas oceánicas del modelo regional que lindan con el resto de océanos del globo terrestre (Cap. 3, Secc. 3.4.1.3). A continuación, se especifican las fronteras abiertas y cerradas del modelo IBER01, así como las condiciones impuestas sobre ellas para la construcción del modelo hidrodinámico:

##### a) Fronteras Abiertas

El dominio del modelo contiene una frontera íntegramente abierta, la frontera Oeste, que linda con las aguas profundas del océano Atlántico. Las tres fronteras restantes son parcialmente abiertas: dos de ellas, las fronteras Norte y Sur, yacen en su mayor parte sobre el océano Atlántico profundo y, en menor medida, sobre áreas de plataforma continental (Fig. 4.2). Por último, la frontera Este, se encuentra situada sobre la zona más profunda de la Cuenca Mediterránea Occidental. Sobre estas fronteras abiertas se han especificado como condiciones las elevaciones de la marea oceánica, para los 8 principales constituyentes de marea (4 diurnos y 4 semi-diurnos), obtenidas del modelo global GOT00.2 (Cap. 3, Secc. 3.3.3). Así, para cada celda oceánica fronteriza, se determinan las

amplitudes y fases de la marea oceánica mediante interpolación bilineal del modelo GOT00.2 que tiene una resolución de  $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$  (Fig. 4.19).

Como se trató en el Capítulo 3, en la modelización oceánica a escala regional la elección de unas condiciones de frontera abierta (CFA) apropiadas es de gran importancia, puesto que influyen significativamente en los resultados obtenidos en el interior del modelo. En este caso, la elección de la imposición de CFA activas, obtenidas a partir de un modelo global, se basó en los criterios descritos en el Capítulo 3 (Secc. 3.4.1.3). Por una parte, la marea oceánica se propaga desde el exterior hacia el interior del dominio, al menos en su mayor parte y, especialmente, en la frontera Oeste del modelo, donde la marea proveniente del Atlántico influye significativa en la dinámica de la toda la región, según se describió en la Sección 4.2.2. Por otra parte, sobre la frontera abierta Norte, situada sobre la extensa plataforma continental francesa, las isobatas son casi paralelas a la costa y perpendiculares a la propia frontera (Fig. 4.3) y, además, se dispone de un número considerable de observaciones (de satélite y mareográficas).

La elección del modelo GOT00.2 para la obtención de las condiciones de frontera abierta se ha realizado en función de los siguientes criterios:

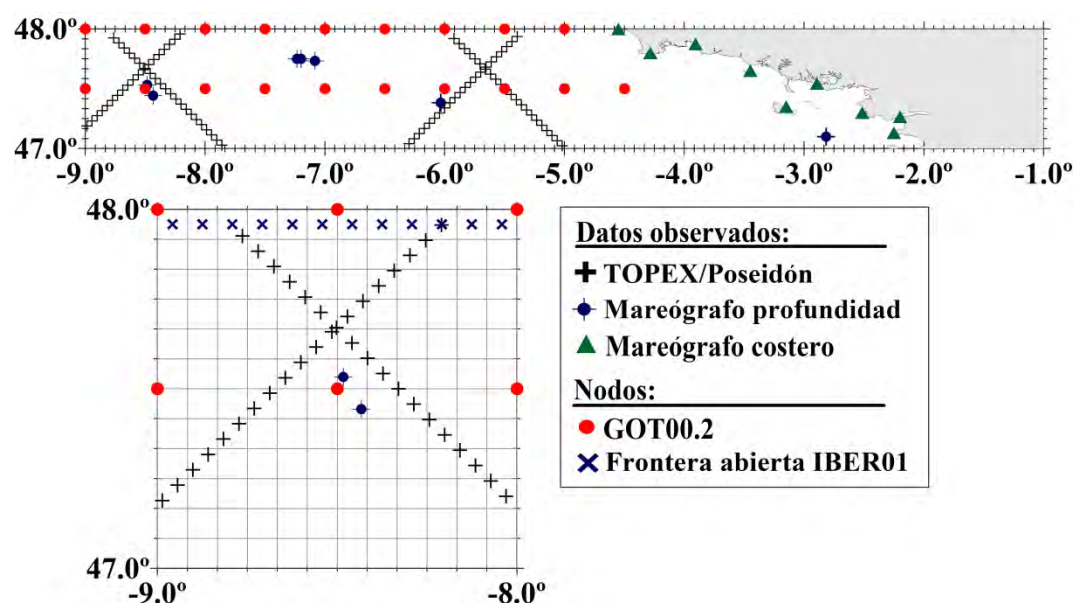
- A escala global no existe un modelo de marea más adecuado que otro ya que, según se ha demostrado a partir de la comparación del EOI calculado con observaciones de gravedad o de desplazamientos a partir de GPS, la adecuación de los modelos varía con la región del globo terrestre considera (p. ej. Penna et al., 2008). En general, sobre los océanos abiertos (donde yacen las fronteras abiertas de nuestro dominio) los modelos globales más recientes presentan las mejores precisiones, del orden de 1-2 cm (Secc. 3.3.3, Cap. 3) y, por tanto, se consideran los más adecuados. En las recomendaciones del IERS de 2003, así como su actualización en 2006<sup>29</sup> (McCarthy y Petit, 2003), se indica el uso de los modelos GOT00.2 y la última versión de la serie de modelos FES.
- Se ha tenido en cuenta la dependencia regional de la precisión de los modelos globales. Por ejemplo, Arabelos et al. (2007) seleccionan los modelos TPXO.6.2 y GOT00.2 como más adecuados para la región del Mediterráneo, mediante la comparación entre diversos modelos globales y con medidas altimétricas procedentes del satélite JASÓN. Análogamente, Stavros et al. (2007) seleccionan el modelo GOT00.2, entre otros, para la región de la plataforma continental francesa, a partir de la comparación del EOI calculado con el observado mediante GPS. En esta memoria, se realizó un análisis exhaustivo de la adecuación de los modelos globales a la zona de estudio, mediante la comparación entre la marea gravimétrica de carga calculada y observada. A partir de los resultados obtenidos, que se presentan en detalle en el

---

<sup>29</sup> Con fecha de Julio de 2009 se publican vía Internet (<http://tai.bipm.org/iers/convupdt/convupdt.html>) diversas modificaciones (no ratificadas) a las recomendaciones IERS-2003. En particular, la recomendación citada en esta memoria se actualiza a los modelos globales TPXO7.1 y FES2004, aunque con la salvedad de que modelos anteriores pueden ser preferibles por consistencia regional.

Capítulo 6, después de descartar los modelos más discrepantes y según lo mencionado anteriormente, finalmente fue seleccionado el modelo GOT00.2.

Además de lo expuesto anteriormente, debe señalarse que la elección de las CFA llega a ser una cuestión crítica en el proceso de modelización regional en áreas como las plataformas continentales, ya que la precisión de los modelos globales se reduce significativamente. Este es el caso, como se ha puesto de manifiesto anteriormente, de la región del Golfo de Vizcaya donde la dinámica de marea obtenida puede verse influenciada por las condiciones impuestas sobre la frontera Norte del modelo. Por esta razón, esta frontera Norte se ubicó de manera que las observaciones in-situ (mareógrafos y T/P) distribuidas a lo largo de la misma, a través del proceso de asimilación, minimizasen los errores intrínsecos a las CFA impuestas por el modelo GOT00.2 (Fig. 4.19). Por otra parte, debe señalarse que aunque esta zona se caracteriza por ser un área de generación de mareas internas (Pichon y Correard, 2006) la utilización de un modelo barotrópico, como es el caso del modelo global considerado, se justifica si la generación y propagación de las mareas internas no es propiamente objeto de estudio y, por tanto, pueda despreciarse su impacto sobre las elevaciones en las frecuencias principales (Xing y Davies, 1998).



**FIGURA 4.19:** (Arriba) Fragmento del dominio del modelo IBER01 sobre su frontera Norte. Se muestran los datos observados (mareógrafos y T/P) y los emplazamientos donde se consideran las constantes armónicas procedentes del modelo GOT00.2 (círculos rojos). (Abajo) Ampliación de la figura anterior sobre un área de  $1^\circ \times 1^\circ$ . Se señalan con una cruz azul los nodos frontera abierta de IBER01, donde se interpolan bilinealmente las constantes armónicas obtenidas del GOT00.2.

## b) Fronteras Cerradas y Condiciones de Contorno

Las condiciones sobre las fronteras cerradas (que son las celdas oceánicas limítrofes con tierra situadas en los límites del dominio) y sobre los contornos costeros en el interior del dominio se imponen, según se describió en la Sección 3.4.1.3 (Cap. 3), para limitar el problema de la perturbación del flujo oceánico por estas estructuras de tierra. En este caso, para la resolución de las



ecuaciones hidrodinámicas se han establecido, por una parte, la condición de impermeabilidad sobre las fronteras cerradas (dada por la ecuación [3.37]) y, por otra parte, la condición de flujo normal cero sobre las costas. Esta última condición hace que se anulen las componentes de la velocidad (promediadas en profundidad) normales a las fronteras de tierra, según se indica en [3.38].

#### **4.5.2.3 Términos de Disipación**

Los términos de disipación en las ecuaciones hidrodinámicas comprenden la fricción del fondo oceánico y la viscosidad turbulenta horizontal.

##### **a) Fricción debida a la presencia del fondo oceánico**

En las ecuaciones hidrodinámicas se ha incluido el esfuerzo por el rozamiento del fondo oceánico, parametrizado mediante la formulación cuadrática estándar dada por la ecuación [3.30]. El coeficiente de arrastre  $C_b$  se ha considerado constante en todo el dominio e igual a  $3 \times 10^{-3}$ . Este valor ha sido seleccionado, por una parte, por su adecuación a la zona de estudio y, por otra parte, a partir de la comparación de los resultados obtenidos utilizando diferentes valores de este parámetro en un rango apropiado. Los resultados de la comparación se presentan en el apartado c) de esta Sección y se resumen en la Tabla 4.4. Para las diferentes regiones comprendidas en el interior del dominio de IBER01, el rango de valores utilizado más habitualmente para este coeficiente de arrastre se encuentra entre  $2,5 \times 10^{-3}$  y  $3 \times 10^{-3}$ . Muchos autores han testado este rango de valores y su influencia sobre la dinámica de marea en diferentes zonas. Por ejemplo, Le Provost et al. (1994) utilizan, para la construcción del modelo global FES94.1 (Cap. 3, Secc. 3.3.3), un coeficiente de fricción del fondo oceánico de  $3 \times 10^{-3}$  en áreas pelágicas y de  $2,5 \times 10^{-3}$  en aguas poco profundas. Esta distinción entre las regiones oceánicas profundas y pelágicas se debe a que, como se trató en el Cap. 3, el coeficiente de arrastre depende en gran medida de la profundidad de la cuenca. Examinando estas regiones menos profundas en el interior de IBER01, se encuentra que Lefevre (2000), quien estudia la adecuación del coeficiente de fricción en diversos dominios oceánicos a partir de observaciones mareográficas, selecciona el valor de  $3 \times 10^{-3}$  para el Mar Mediterráneo como más adecuado. Más aun, en el Estrecho de Gibraltar y sus proximidades, que es una de regiones más complejas en el dominio, numerosos autores han seleccionado este mismo valor (p. ej., Álvarez et al., 2003, Sánchez y Pascual, 1988). Particularmente, Candela et al. (1990) verifican la adecuación de este valor a partir de la comparación con observaciones procedentes de correntímetros. Debe señalarse que, para evitar problemas numéricos en la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas, se establece una profundidad mínima de 10 m para los términos de arrastre del fondo<sup>30</sup>. Claramente, puesto que la resolución espacial del modelo es de unos 9 km, esta limitación no implica una restricción significativa sobre las soluciones.

---

<sup>30</sup> Además de lo anterior, puesto que el modelo hidrodinámico considerado no tiene en cuenta el humedecimiento y secado de las costas, por la subida y bajada de la marea oceánica, es necesario establecer una profundidad mínima en los nodos de la cuadrícula oceánica para que las celdas correspondientes mantengan su estado de “agua” (Martin et al., 2009).

## **b) Viscosidad turbulenta horizontal**

Con el fin de eliminar fenómenos físicos cuya escala de longitud sea inferior al tamaño de la cuadrícula oceánica, que aparecen en las soluciones numéricas de las SWE como ruido, se han incluido en las ecuaciones de conservación del momento los términos de difusión horizontal descritos por [3.33]. El coeficiente de viscosidad horizontal turbulenta se ha considerado constante en todo el dominio e igual a  $A_H = 200 \text{ m}^2/\text{s}$ . Este valor se encuentra en el rango de los valores más comúnmente utilizados (Cap. 3, Secc. 3.4.1.1) y, además, coincide con el valor seleccionado por otros autores en la región de estudio. Por ejemplo, Fanjul et al. (1997) seleccionan este mismo valor para la región del Atlántico de la Península Ibérica. En esta memoria, se testaron otros valores  $A_H$  en el rango de 100 a  $1.000 \text{ m}^2/\text{s}$  y los resultados se presentan en la Tabla 4.5. Cabe mencionar que, como demuestra Fortunato et al. (2002), la utilización de un coeficiente de viscosidad horizontal turbulenta variable en el espacio (e incluso en el tiempo) presentaría sólo diferencias marginales con respecto a un valor constante. Al igual que para los términos de fricción del fondo, en el caso de la parametrización de la viscosidad horizontal turbulenta se establece una profundidad mínima de 10 m para todas las zonas, con el fin de evitar problemas numéricos en la resolución de las ecuaciones.

## **c) Test sobre los coeficientes de fricción del fondo y de viscosidad turbulenta horizontal**

Para comprobar el efecto de este coeficiente sobre la dinámica de marea en la región, se ha variado su valor en el rango de  $1 \times 10^{-3}$  a  $3 \times 10^{-3}$ . Así, se han resuelto las ecuaciones hidrodinámicas utilizando diferentes valores del coeficiente de arrastre dentro del rango indicado. Puesto que  $M_2$  es la marea dominante en la mayor parte del dominio y que, además, el efecto del coeficiente de arrastre sobre las mareas diurnas no es tan significativo como en el caso semi-diurno (Arbic et al., 2004), se considera oportuno analizar en detalle los resultados obtenidos para este constituyente. Así, las diferencias medias en el interior del dominio del modelo utilizando diferentes valores para el coeficiente de fricción del fondo, que se resumen en la Tabla 4.4, no son significativas<sup>31</sup>. Existen únicamente diferencias puntuales que superan los valores medios y se localizan:

- En la región cantábrica del dominio del modelo. Por una parte, sobre la estrecha plataforma continental ibérica (entre los cabos Ortegal y Peñas y, aproximadamente, hasta la isobata de 100 m) y, por otra parte, en las proximidades a la costa francesa en torno al estuario de Gironde y las desembocaduras de los ríos Loira y Charente (Fig. 4.3). En el primer caso, sobre la plataforma cántabra, las diferencias pueden atribuirse a los efectos originados por la interacción de las corrientes de marea con la abrupta pendiente continental en la zona. Estos efectos, que se producen a poca distancia de la costa, no se propagan hacia profundidades superiores (donde no se observan discrepancias entre los resultados). Además, las discrepancias existentes en las proximidades a estuarios y desembocaduras de ríos están causadas por los efectos propios de la interacción entre la propagación de la marea y la

---

<sup>31</sup> En las frecuencias de marea semi-diurnas y diurnas, las corrientes de marea son más sensibles que la elevación de la marea a la parametrización de la fricción debida a la presencia del fondo oceánico y, por tanto, al coeficiente de arrastre (Brandt et al., 2004).

morfología de los mismos, que conllevan variaciones en el rango de la marea, así como por los procesos de fricción que en estas zonas incrementan o disminuyen las mareas.

- En la región atlántica las diferencias máximas, que son considerablemente inferiores a las obtenidas en la región cantábrica, se concentran al oeste sobre el promontorio de Lisboa (denotado por PL en la Fig. 4.4), frente a Oporto (en la desembocadura del río Duero) y al sur, en el golfo de Cádiz (principalmente en la desembocadura del río Guadalquivir y en la bahía de Cádiz). Por otra parte, aunque son ligeramente superiores a la media, las diferencias decrecen en dirección hacia el Estrecho de Gibraltar.
- En la región Mediterránea no se observan diferencias significativas entre los resultados, a excepción del extremo sureste del dominio (ligeramente a unos metros frente a la costa africana sobre la frontera del modelo). A diferencia de los casos anteriores, esta discrepancia puede atribuirse a efectos de la modelización hidrodinámica numérica, causados por las condiciones de frontera abierta impuestas frente a dicha costa.

Por tanto, en el dominio del modelo el uso de diferentes valores del coeficiente de arrastre (en el rango considerado) sólo produce diferencias puntuales localizadas, generalmente, en torno a grandes accidentes del fondo oceánico próximos a las costas y desembocaduras de ríos. Los efectos que originan estas discrepancias, que no son objeto de estudio en esta memoria<sup>32</sup>, no se propagan hacia el resto del dominio, donde las diferencias obtenidas no son significativas.

**TABLA 4.4:** *Diferencias en amplitud y fase de la marea oceánica obtenidas mediante modelización hidrodinámica con diferentes coeficientes de fricción del fondo, para las diferentes subregiones del dominio del modelo y el constituyente armónico  $M_2$ .*

Región	Variación del Coeficiente de Arrastre – Diferencias en la Elevación de Marea											
	$C_b = 3,0$ vs $C_b = 2,5$						$C_b = 3,0$ vs $C_b = 1,0$					
	Máxima		Media		Stdv		Máxima		Media		Stdv	
	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)
Cantábrica	1,11	2,65	0,01	0,02	0,04	0,11	4,18	11,04	0,05	0,11	0,17	0,45
Atlántica	0,05	0,26	0,00	0,00	0,00	0,01	0,20	1,06	0,00	0,00	0,00	0,02
Mediterránea	0,10	4,14	0,00	0,01	0,00	0,08	0,58	14,01	0,00	0,07	0,01	0,28

Análogamente, se ha comprobado el efecto del coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal sobre la dinámica de marea en el dominio del modelo. Para ello, se han considerado los valores  $A_H = 100, 200$  y  $1.000 \text{ m}^2/\text{s}$ . En todas las subzonas del dominio (cantábrica, atlántica y mediterránea) no existen prácticamente diferencias en las elevaciones de marea obtenidas utilizando los valores de  $A_H$  anteriores. Excepcionalmente, se aprecian diferencias superiores a la media en las proximidades al estuario de Girona, en la costa francesa. Estas diferencias pueden atribuirse a la presencia de fenómenos físicos con una escala de longitud inferior al tamaño de la cuadrícula oceánica y que introducen ruido en la solución hidrodinámica. Por otra parte, cabe destacar las diferencias existentes

<sup>32</sup> Sobre la generación de mareas internas en el Golfo de Vizcaya se remite, p. ej., a Pichon y Corréard (2006). Para los efectos de resonancia que presenta el estuario del Guadalquivir véase Álvarez et al. (2001).

entre los diferentes resultados en las proximidades de las fronteras abiertas, aunque inferiores a 1 cm en amplitud y un grado en fase.

**TABLA 4.5:** *Diferencias en amplitud y fase de la marea oceánica obtenidas mediante modelización hidrodinámica con diferentes coeficientes de viscosidad horizontal, para las diferentes subregiones del dominio del modelo y el constituyente armónico  $M_2$ .*

Región	Variación del Coeficiente de Viscosidad – Diferencias en la Elevación de Marea											
	$A_h = 200$ vs $A_h = 100$						$A_h = 200$ vs $A_h = 1.000$					
	Máxima		Media		Stdv		Máxima		Media		Stdv	
	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)	Amp (cm)	Fase (°)
Cantábrica	0,66	0,61	0,00	0,00	0,01	0,01	6,47	4,84	0,03	0,01	0,09	0,07
Atlántica	0,05	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,27	0,61	0,00	0,00	0,01	0,01
Mediterránea	0,17	4,28	0,00	0,03	0,00	0,10	0,46	7,55	0,00	0,15	0,01	0,37

#### 4.5.2.4 Términos de Atracción y Carga

Los términos correspondientes a la marea de carga y atracción oceánica (Cap. 3, Secc. 3.4.1.1) se han incluido implícitamente en las SWE a través de un modelo previamente calculado. Este modelo se ha obtenido a partir del método de convolución de las funciones de Green con la marea oceánica, utilizando el modelo global TPXO6.2 (Cap. 3, Secc. 3.3.3)<sup>33</sup>.

#### 4.5.2.5 Esquema Numérico de Resolución de las Ecuaciones Hidrodinámicas

La resolución de las ecuaciones [3.16] a [3.18] se lleva a cabo mediante su discretización, en el tiempo y en el espacio, utilizando una red espacial descentrada de tipo C de Arakawa (Pascual, 1987), según se describió en el Cap. 3 (Secc. 3.4.1.4). El paso temporal,  $dt = 20$  s, se ha escogido de acuerdo con el criterio de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (ecuación [3.39]), considerando que la profundidad máxima del agua en el dominio del modelo es de 5.000 m.

Para resolver el sistema discreto de ecuaciones, que son funciones del tiempo, se inicia la ejecución en el instante  $t = 0$  para el que la elevación y las componentes horizontales de la velocidad se hacen cero ([3.40], Secc. 3.4.1.4, Cap. 3). Esto es,

$$t = 0 \Rightarrow \zeta = \mathbf{U} = \mathbf{V} = 0$$

Antes de tomar en consideración los resultados, a fin de que se estabilicen las soluciones, se ejecutó el procedimiento numérico para un periodo de tiempo de 50 días (este periodo de estabilización es función de las dimensiones del esquema de diferencias finitas y del paso de tiempo adoptados). Una vez estabilizadas las soluciones se continúa la ejecución del modelado un periodo de 180 días. Este último periodo es tal que permite obtener, del análisis armónico de las soluciones, todos los constituyentes de marea de interés.

<sup>33</sup> Modelo de carga y atracción oceánica TPXO6.2\_load (resolución 0,25°×0,25°) facilitado por [www.coas.oregonstate.edu/research/po/research/tide/index.html](http://www.coas.oregonstate.edu/research/po/research/tide/index.html).

**TABLA 4.6:** Constantes, parámetros y modelos utilizados para la construcción del modelo hidrodinámico.

PARÁMETRO	VALOR
Radio de la Tierra	$R_T = 6.370,8 \text{ km}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9,80621 \text{ m}^2/\text{s}$
Velocidad angular de rotación de la Tierra	$\omega = 0,00007292 \text{ rad/s}$
Densidad media del agua del mar	$\rho_w = 1.028 \text{ kg/m}^3$
Coeficiente de fricción del fondo	$C_b = 0,003$
Profundidad mínima fricción del fondo	10 m
Coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal	$A_H = 200 \text{ m}^2/\text{s}$
Profundidad mínima viscosidad turbulenta	200 m
Resolución horizontal de la cuadrícula	$\Delta\phi = \Delta\lambda = 1/12^\circ$
Condiciones de Frontera Abierta	GOT00.2
Corrección carga y atracción oceánica	TPXO6.2_load
Paso temporal	20 s
Periodo de estabilización	50 días
Periodo de ejecución efectivo	180 días

### 4.5.3 Errores Asignados al Modelo Hidrodinámico y a los Datos Observados

#### a) Errores asignados en el modelo hidrodinámico

La estimación de los errores en el modelo hidrodinámico se lleva a cabo siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 3.4.3.1 (Cap. 3). Esto es, se considera la ecuación de continuidad exacta y que, por tanto, todos los errores provienen de las ecuaciones de conservación del momento. Estos errores están causados por imprecisiones en la batimetría, en las condiciones de frontera abierta y en las parametrizaciones intrínsecas en dichas ecuaciones. Estas últimas incluyen las parametrizaciones de la fricción del fondo (donde se han excluido efectos tales como los procesos de conversión baroclínica) y de la viscosidad turbulenta horizontal. Además, se considera que cada una de estas fuentes de error es independiente del resto y que varía según su posición en el espacio con una longitud de correlación constante. De esta forma, la varianza de error total es la suma de los cuadrados de los errores independientes. En particular, se han establecido los siguientes errores (justificados por las consideraciones realizadas en la Secc. 3.4.3) (resumidos en la Tabla 4.7):

- Los datos batimétricos se consideran con una incertidumbre del 5%.
- A la parametrización cuadrática de la fricción del fondo (lo que incluye la imprecisión del coeficiente de arrastre seleccionado) se le asigna un error del 55%.
- Las condiciones de frontera abierta se consideran con una imprecisión del 5% de su magnitud<sup>34</sup>.

<sup>34</sup> El error estimado en el modelo GOT00.2 es de 1,5 cm en el océano abierto (aproximadamente, un 4% de la amplitud global para este constituyente) y 6 cm sobre las plataformas continentales (un 6% de la amplitud en estas zonas), para la onda  $M_2$  (Secc. 3.3.3, Cap. 3). Por tanto, se selecciona un valor del error en las condiciones de frontera abierta del 5%.

Todos estos errores se consideran correlados en el espacio, con una longitud de correlación en el interior del modelo de 50 km (lo que corresponde, aproximadamente, a 5 celdas de la cuadrícula oceánica). Sobre las fronteras abiertas, la longitud de correlación se extiende a 500 km (unas 55 celdas de la cuadrícula oceánica)<sup>35</sup>.

**TABLA 4.7:** Errores asignados en el modelo hidrodinámico y su longitud de correlación espacial.

ERROR	VALOR	LONGITUD DE CORRELACIÓN	VALOR
Batimetría	5%	Interior	50 km
Batimetría (mínimo)	10 m	Fronteras abiertas	500 km
Arrastre	55%		
Condición fronteras abiertas	5%		
Condición fronteras cerradas	20%		

#### b) Errores asignados en los datos observados

Los errores considerados a priori en los datos, tanto de las medidas altimétricas del satélite T/P como de los mareógrafos, corresponden a los errores estimados (desviación estándar) en el procedimiento de análisis armónico de las series temporales en cada emplazamiento.

Para cada onda de marea, los errores asignados a las constantes armónicas obtenidas en el análisis de las series temporales mareográficas se encuentran listados en las Tablas 3 y 4 (Apéndice 2). En aquellas estaciones donde no se dispone de una estimación de los errores en las constantes armónicas proporcionadas por los diversos organismos se establece un error por defecto de 0,05 cm. En el caso de los datos procedentes de satélite estos errores se consideran no correlados, con una varianza de error estimada para cada constituyente a partir del error medio cuadrático obtenido en el proceso de ajuste por mínimos cuadrados.

#### 4.5.4 La Solución Inversa: El Modelo IBER01

A partir del modelo hidrodinámico y de las matrices covarianza de los errores en el modelo hidrodinámico y en los datos observados, la solución final, esto es, el modelo de marea oceánica IBER01, se obtiene a partir del *método de los representantes* descritos en el Capítulo 3. Puesto que la solución final se obtiene a través de la resolución de un problema de inversión generalizada, es frecuente en la literatura su denominación como *modelo inverso* (siguiendo esta nomenclatura, el modelo hidrodinámico se denota simplemente por *modelo directo o a priori*).

Como se ha descrito en el Capítulo 3, la obtención de IBER01 se lleva a cabo minimizando la función cuadrática [3.75], que consiste en la suma de los errores asumidos a priori, en el modelo directo y en los datos, ponderados con sus correspondientes covarianzas de error. El método seguido es la aproximación de los representantes, que permite expresar el mínimo de la función cuadrática como la suma de la solución dinámica exacta (modelo a priori) y de los denominados *representantes*

<sup>35</sup> La longitud de correlación de los errores dinámicos se considera constante y, generalmente, se establece dependiendo de la resolución del modelo. El objetivo es mantener la suavidad de la solución inversa con respecto a las constantes de marea asimiladas.

multiplicados por sus respectivos coeficientes (ecuación [3.76]). Según esta aproximación (introducidas las variantes de *cálculo eficaz de los representantes* y de *base reducida*, Secc. 3.4.2.2, Cap. 3), los representantes se calculan a partir de las ecuaciones [3.94] y [3.95] y sus respectivos coeficientes mediante las ecuaciones [3.88] y [3.103]. En la construcción de IBER01, para el cálculo de los representantes se han considerado los puntos dato correspondientes a las estaciones mareográficas, los puntos cruzados T/P más 5 puntos a lo largo de las trayectorias del satélite entre puntos cruzados (Fig. 4.16). La Tabla 4.8 resume los datos considerados en el proceso de asimilación y los representantes seleccionados. La resolución numérica de este problema se ha llevado a cabo con el software OTIS desarrollado por Egbert y Erofeeva (2002; 2006).

**TABLA 4.8:** Resumen del número de datos asimilados y representantes seleccionados para la construcción del modelo IBER01.

	Puntos Dato	Representantes
<b>TOPEX/Poseidón</b>	<b>2.410</b>	<b>331</b>
Cruzados	36	36
Trayectorias	2.374	295
<b>Mareógrafos</b>	<b>88</b>	<b>88</b>
Profundidad	26	26
Costeros	62	62
<b>Total</b>	<b>2.498</b>	<b>419</b>

## 4.6 Resultados

En esta Sección se presenta el modelo IBER01 para cada uno de los constituyentes de marea considerados. Inicialmente, se describirán las amplitudes y fases de la marea oceánica en la región, sus valores extremos así como su patrón de propagación. Posteriormente, se analizarán los resultados anteriores atendiendo a las subzonas diferenciadas señaladas a lo largo de este Capítulo. En cada una de estas subzonas, se estudiará la variabilidad de la marea oceánica, a partir de la desviación estándar de las amplitudes de la marea oceánica calculada sobre los ocho constituyentes de marea principales, mediante (p. ej., Padman et al., 2002; 2003)

$$\sigma_{\zeta}(\lambda, \phi) = \left( \sum_{k=1}^8 A_k^2(\lambda, \phi) \right)^{1/2} \quad [4.6]$$

con  $A_k$  la amplitud de la marea oceánica del  $k$ -ésimo constituyente de marea. Así, definiendo la elevación máxima de la marea oceánica como

$$\zeta_{\max}(\lambda, \phi) = \sum_{k=1}^8 A_k(\lambda, \phi) \quad [4.7]$$

el valor medio de la distribución  $\zeta_{\max}/\sigma_{\zeta}$  será un indicador del carácter de la marea en la zona. Además de lo anterior, se analizará en cada sub-zona la presencia de valores locales “singulares”, así como las causas a las que puedan ser atribuidos (p. ej. a la resolución del modelo o a efectos de la topografía del fondo oceánico o la geografía costera). Paralelamente a esta descripción, y como una primera validación de los resultados obtenidos, se cotejará el modelo IBER01 con:

- Modelos globales de marea oceánica restringidos a la región.
- Modelos locales en diferentes subzonas del área abarcada por IBER01.
- Observaciones mareográficas. La comparación con los datos observados se realizará a partir de las constantes armónicas proporcionadas por IBER01 e interpoladas en diferentes emplazamientos mareográficos. Aunque las observaciones mareográficas consideradas han sido asimiladas en el propio modelo oceánico, los resultados de la comparación son adecuados para la validación de IBER01, ya que la técnica de asimilación de datos se basa en el cálculo de una solución única de marea oceánica en todo el dominio, consistente con la dinámica calculada a priori, a partir de la minimización del error global del ajuste con los datos asimilados. Además, puesto que la comparación anterior se realiza mediante interpolación bilineal de las elevaciones de marea del modelo IBER01 en los emplazamientos de los mareógrafos, la validez de la comparación dependerá de la variabilidad local de la marea oceánica y de la distancia entre el emplazamiento de los mareógrafos y los nodos de interpolación del modelo (es decir, de la resolución de IBER01). En general, para las frecuencias de marea estudiadas, se considera adecuada una distancia inferior a 10 km (Martín et al., 2009). Puesto que la resolución de IBER01 es superior a esta distancia, la comparación con las observaciones mareográficas será adecuada para su validación, aunque en regiones de gran variabilidad oceánica, como el Estrecho de Gibraltar, los resultados de la comparación deben ser considerados con cautela. De aquí, la importancia de la validación del modelo atendiendo a las diversas subzonas en el interior del dominio.

En todos los casos, la comparación entre modelos u observaciones se llevará a cabo mediante:

- La comparación directa de las amplitudes y fases para cada onda de marea en un emplazamiento dado, de coordenadas  $(\lambda, \phi)$ . Esto es

$$dA_k(\lambda, \phi) = A_{k1}(\lambda, \phi) - A_{k2}(\lambda, \phi) \quad dG_k(\lambda, \phi) = G_{k1}(\lambda, \phi) - G_{k2}(\lambda, \phi)$$

donde  $A_{ki}$  y  $G_{ki}$  denotan, respectivamente, la amplitud y la fase del constituyente  $k$  para los modelos de marea (u observaciones)  $i = 1, 2$  (p. ej. Fig. 4.22 a 4.25).

- El error medio cuadrático de las diferencias para cada constituyente de marea (EMC), que en un emplazamiento dado viene expresado por (p. ej. Foreman y Thomson, 1997)

$$\text{EMC}(\lambda, \phi) = \left[ \left( C_{k1}(\lambda, \phi) - C_{k2}(\lambda, \phi) \right)^2 + \left( S_{k1}(\lambda, \phi) - S_{k2}(\lambda, \phi) \right)^2 \right]^{1/2} \quad [4.8]$$

donde, para el constituyente de marea  $k$  y los modelos  $i = 1, 2$ ,  $C_{ki}$  y  $S_{ki}$  denotan las componentes en fase y en cuadratura de la elevación de la marea oceánica, respectivamente

$$C_{ki} = A_{ki} \cos G_{ki} \quad S_{ki} = A_{ki} \sin G_{ki}$$

Este es el caso, por ejemplo, de las Tablas 4.9, 4.11 y 4.13.



- El RSS<sup>36</sup> que se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los EMC de las diferencias para cada constituyente, esto es (p. ej. Wang, 2004)

$$\text{RSS}(\lambda, \phi) = \left[ \sum_{k=1}^K \text{EMC}^2(\lambda, \phi) \right]^{1/2} \quad [4.9]$$

y permite considerar el efecto de los  $K$  constituyentes de marea (p. ej. Tablas 4.8, 4.10 y 4.12).

- El error medio cuadrático de las diferencias para el número total  $N$  de emplazamientos considerados (p. ej., King y Padman, 2005)

$$\text{EMC} = \left[ (1/2N) \sum_{n=1}^N (C_{k1}^n - C_{k2}^n)^2 + (S_{k1}^n - S_{k2}^n)^2 \right]^{1/2} \quad [4.10]$$

#### 4.6.1 Descripción General de IBER01 y Comparación con Modelos Globales

Los resultados del modelo se presentan en forma de mapas de amplitudes y fases para cada constituyente de marea (Fig. 4.20 y 4.21). Como puede apreciarse, el régimen de marea oceánica en la región es, principalmente, semi-diurno, siendo dominante en esta banda de marea el constituyente  $M_2$  (Fig. 4.20). Para esta onda, las amplitudes varían desde 1,7 m (valor máximo que se alcanza en las proximidades de la costa atlántica francesa, al norte del dominio del modelo) hasta alcanzar tan sólo unos pocos cm en el Mar Mediterráneo (el valor mínimo, inferior a 1 cm, se alcanza frente a la costa de Alicante, Fig. 4.33). El mayor gradiente en amplitud se produce en la región del Estrecho de Gibraltar. Las amplitudes que a lo largo de la costa Portuguesa se encuentran en torno a 1 m decrecen abruptamente en el Estrecho, hasta alcanzar unos 20 cm en la entrada oeste del Mar de Alborán. En general, para  $M_2$ , las amplitudes se propagan de oeste a este, en una dirección casi paralela a la línea de costa y están ligeramente amplificadas sobre las plataformas continentales. Por el contrario, las fases de  $M_2$  se propagan de sur a norte en la región atlántica, mientras que en el Mediterráneo se dirigen hacia el noreste, con una mayor variación de fases a lo largo de la línea que une Alicante (España) y Orán (Argelia). El patrón de propagación para el resto de constituyentes semi-diurnos es similar al de  $M_2$ , aunque con amplitudes de marea más pequeñas (del orden del 35-40% para  $S_2$ , 21% para  $N_2$  y del 10% para  $K_2$ , de la amplitud de la marea  $M_2$ ).

La magnitud de los constituyentes de marea diurnos es significativamente inferior que la de los semi-diurnos (exceptuando la región mediterránea) y su patrón de propagación exhibe un comportamiento más complejo (Fig. 4.21). En el caso de la onda de marea  $O_1$  y la región atlántica del modelo las amplitudes se propagan, aproximadamente, en dirección oeste-este, con una significativa amplificación en las proximidades de la costa, principalmente sobre la plataforma ibérica (el valor máximo, de 7 cm, se alcanza frente a Aveiro y al norte de Oporto). En la entrada al Estrecho de Gibraltar, sobre el umbral de Espartel, el patrón de propagación para esta onda de marea cambia, decreciendo las amplitudes hasta hacerse casi cero a la altura de Tarifa, donde nuevamente vuelven a incrementar su valor en dirección al Mar de Alborán. En el Mar Mediterráneo, las amplitudes de  $O_1$  se encuentran en el rango de 1 a 3 cm, con su máximo en el Canal de Valencia. El

<sup>36</sup> RSS acrónimo en inglés de *Root Sum Square*.

resto de ondas diurnas ( $K_1$ ,  $P_1$  y  $Q_1$ ) presenta un patrón de propagación aun más complejo, con magnitudes ligeramente superiores a  $O_1$  en el caso de  $K_1$  (el doble en la región mediterránea), mientras que para  $P_1$  y  $Q_1$  sus amplitudes se reducen más de un 50%. Las fases varían drásticamente de la región atlántica a la mediterránea, produciéndose una zona de divergencia en el Estrecho de Gibraltar a lo largo de la línea que une Tarifa (España) y Punta Cires (Marruecos)<sup>37</sup>.

En el interior del dominio se observan diversas áreas con una variabilidad de la marea oceánica significativa, en lo que respecta a su magnitud y propagación espacial. Se localizan, principalmente, en la plataforma continental francesa y en el Estrecho de Gibraltar. En la banda de marea semi-diurna esta variabilidad se produce, además, en la franja mediterránea comprendida entre Alicante y Orán, mientras que en la banda diurna en las plataformas continentales ibérica portuguesa y las del Archipiélago Balear. Estas áreas de gran variabilidad oceánica y su representación por IBER01 se detallan en el estudio por sub-zonas que se presenta en la siguiente Sección.

Antes de esto, es interesante realizar un estudio comparativo de IBER01 con modelos globales en la región. Como ejemplo, en las Figuras 4.22 y 4.23, se han representando para cada uno de los constituyentes armónicos, las diferencias en amplitud y fase de IBER01 con el modelo GOT00.2. Para la onda  $M_2$ , las máximas diferencias en amplitud entre ambos modelos se encuentran sobre la plataforma continental francesa y en el Estrecho de Gibraltar. En estas regiones, las diferencias llegan a superar los 10 cm, e incluso más de 30 cm en el Estrecho de Gibraltar<sup>38</sup>. Examinado esta última zona se observa que GOT00.2 no reproduce la variabilidad de la marea oceánica en la misma, ya que sus amplitudes y fases se mantienen casi constantes a lo largo del Estrecho (85 cm y 54,5° respectivamente), con valores considerablemente superiores a los observados. Por el contrario, IBER01 sí representa la variabilidad oceánica en esta región y la magnitud de sus amplitudes y fases, a lo largo de las direcciones longitudinal y trasversal del Estrecho, concuerdan con los valores observados en las mismas. Una situación similar ocurre en la región norte del dominio del modelo aunque, en este caso, GOT00.2 presenta una amplitud inferior a la observada. Excluyendo estas dos regiones, en el resto del dominio del modelo el valor medio de las diferencias entre IBER01 y GOT00.2 es de 1,3 cm (con una desviación estándar de 1,5 cm). En cuanto a las fases para la onda  $M_2$ , las diferencias más significativas entre ambos modelos se presentan en el Estrecho de Gibraltar y en la región mediterránea (con diferencias máximas de 50°). En esta última zona, las diferencias se encuentran distribuidas a lo largo de la línea que une Alicante y Orán, el canal de Valencia y la cuenca Algeo-Provençal. Nuevamente, dichas diferencias se atribuyen a que el modelo GOT00.2 no reproduce la variabilidad existente de las fases de la marea oceánica. Con respecto al resto de constituyentes, las diferencias en amplitud entre ambos modelos presentan una distribución espacial similar a las existentes para  $M_2$ , aunque sus magnitudes decrecen de acuerdo con la amplitud típica de cada onda de marea en las diferentes áreas. Por el contrario, las diferencias en fase aumentan

---

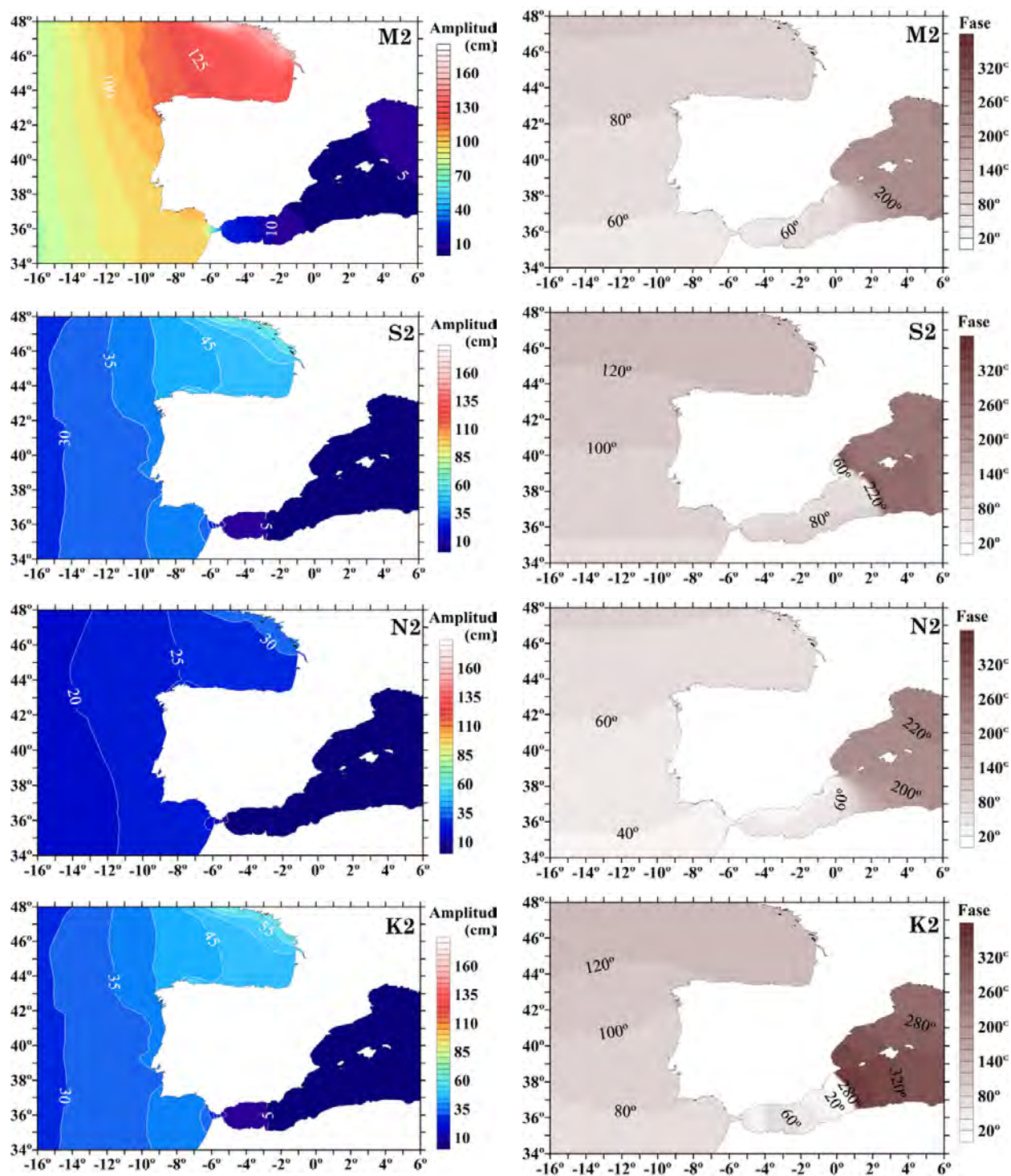
<sup>37</sup> Esto se expondrá con más detalle en la Sección siguiente.

<sup>38</sup> Los puntos del dominio donde las diferencias superan los 10 cm constituyen un 0,3% del número total de puntos comparados entre ambos modelos.

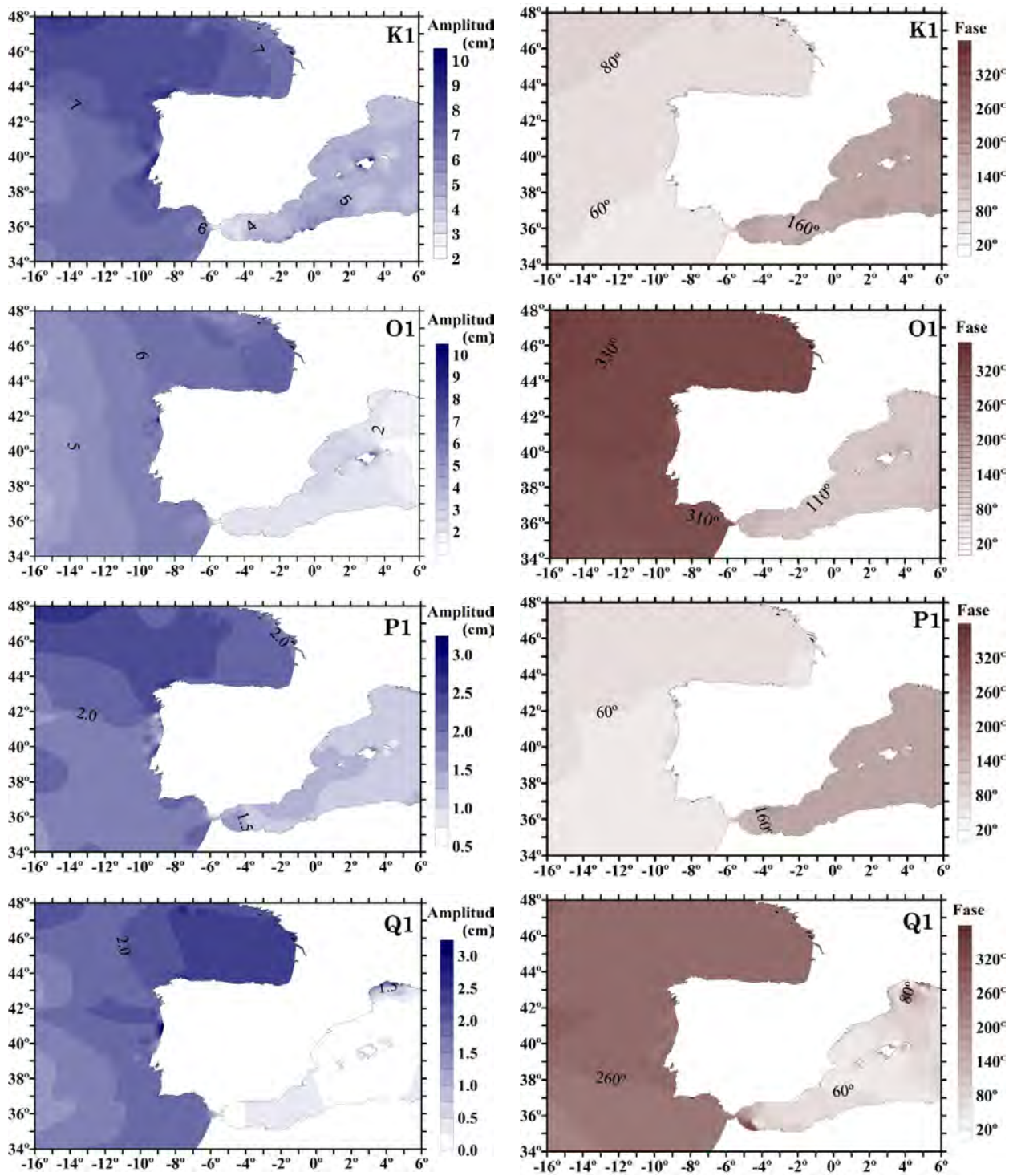
considerablemente aunque la localización de las máximas discrepancias depende del carácter diurno o semi-diurno de la marea considerada: (i) Para los constituyentes semi-diurnos, en la región mediterránea que transcurre a lo largo de la línea que une Alicante-Orán, (ii) Para los constituyentes diurnos, en el Estrecho de Gibraltar, (iii) Para ambos tipos de marea, sobre las plataformas insulares del Archipiélago Balear (en este caso, las diferencias se presentan tanto en amplitud como en fase).

La comparación de IBER01 con otros modelos globales muestra las mayores discrepancias en las zonas batimétricas más complejas o de mayor variación de la marea oceánica, que se han puesto de manifiesto con GOT00.2 (estas son, la plataforma continental francesa, el Estrecho de Gibraltar y el Mar Mediterráneo, en este último caso en lo que respecta a las fases principalmente). En estas zonas, la magnitud de las diferencias varía para cada modelo global considerado y depende, en gran medida, de su resolución y del mallado de la cuadrícula oceánica. Este hecho resulta claramente visible con el modelo global CSR4.0, el cuál contiene un gran número de celdas de la cuadrícula oceánica, con valores de marea oceánica asignados a las mismas, que en realidad se encuentran situadas sobre zonas de tierra. Estas celdas introducen errores en los resultados del modelo, que aumentan en aquéllos contornos costeros donde la marea oceánica varía localmente con respecto a las aguas circundantes. Este caso se da, por ejemplo, sobre la plataforma cantábrica donde la amplitud de la marea, que progresa de oeste a este en una dirección aproximadamente perpendicular a la costa cántabra, experimenta una amplificación en las proximidades a la costa (Fig. 4.25), como queda contrastado con observaciones mareográficas en la zona. Esta amplificación puede atribuirse a fenómenos inducidos por la topografía del fondo local. La interacción de las corrientes oceánicas con esta estratificación topográfica ocasiona mareas internas que originan un incremento en la turbulencia del fondo oceánico y que, a su vez, alteran localmente las características de la marea (en amplitud y fase) en las bandas diurnas y semi-diurnas (Pairaud et al., 2008).

En general, se han encontrado discrepancias para algunos modelos globales con respecto a IBER01 no observadas con los restantes (o bien, con otras versiones del mismo modelo) y que, por tanto, deben atribuirse a características particulares de su construcción (mallado del modelo, datos asimilados, etc.). En la Figura 4.24 se presenta la comparación de IBER01 con los modelos TPXO7.1, FES99 y FES2004 para la onda  $M_2$ . Para estos modelos, respectivamente, las diferencias medias en amplitud son del orden de 1,1, 2,1 y 1,5 cm (stdv 1,3, 1,6 y 1,5 cm) y 1,7°, 2,1° y 4,8° en fases (stdv 3,1°, 3,7° y 10,4°). Destacan, por ejemplo, las marcadas diferencias en amplitud que presenta FES99 en la región atlántica del dominio (2-3 cm) y que ya no aparecen en la versión 2004. Por el contrario, FES2004 muestra en la región Mediterránea diferencias significativas en las fases con respecto a todos los demás modelos, incluido IBER01. El patrón de propagación de las fases para los constituyentes semi-diurnos en esta zona será estudio en detalle en la Sección siguiente.

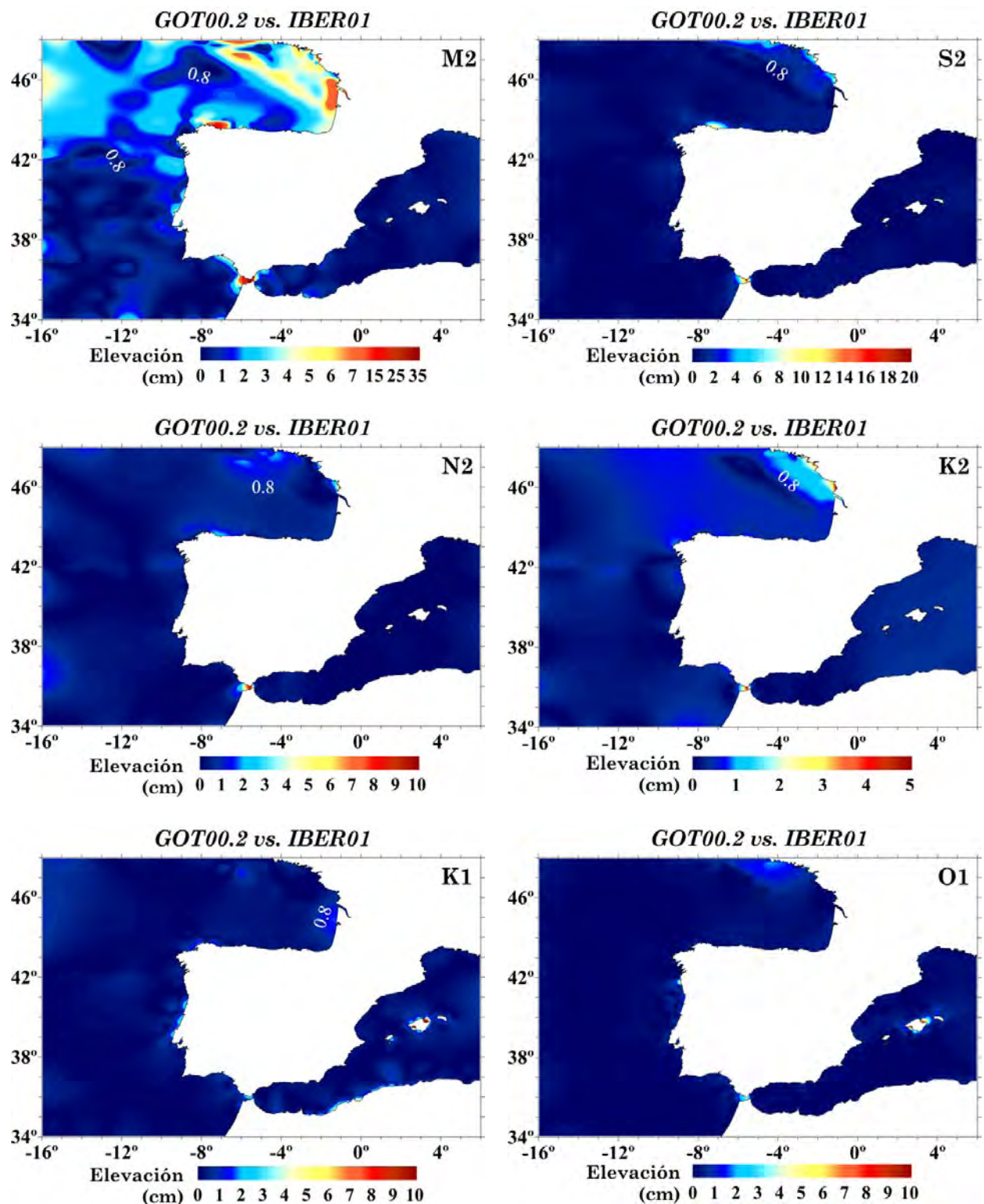


**FIGURA 4.20:** El modelo de marea oceánica IBER01 para los constituyentes de marea semi-diurnos  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados.

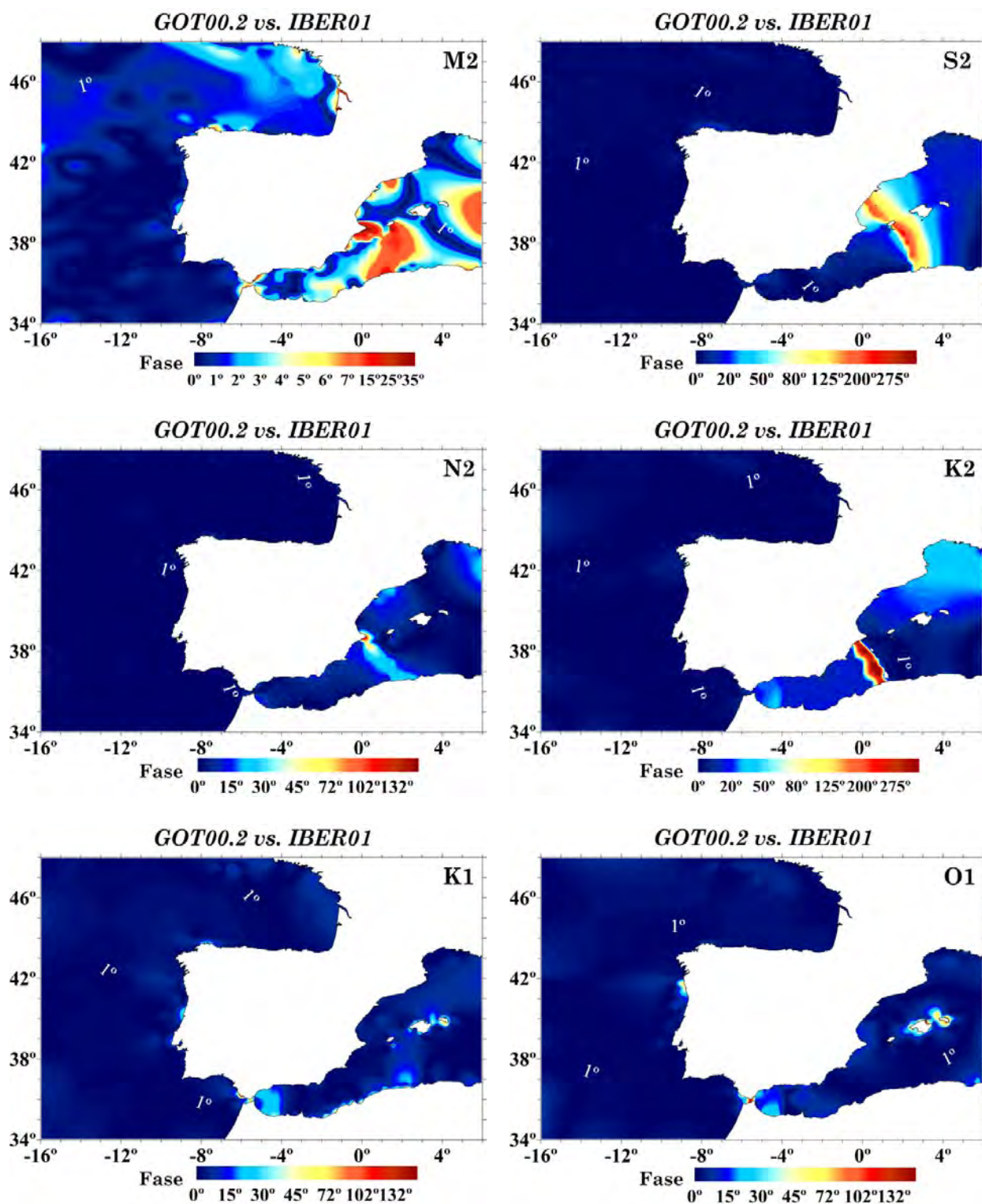


**FIGURA 4.21:** El modelo de marea oceánica IBER01 para los constituyentes de marea diurnos  $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $Q_1$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados. Obsérvese que las escalas de amplitud son diferentes para cada constituyente de marea.



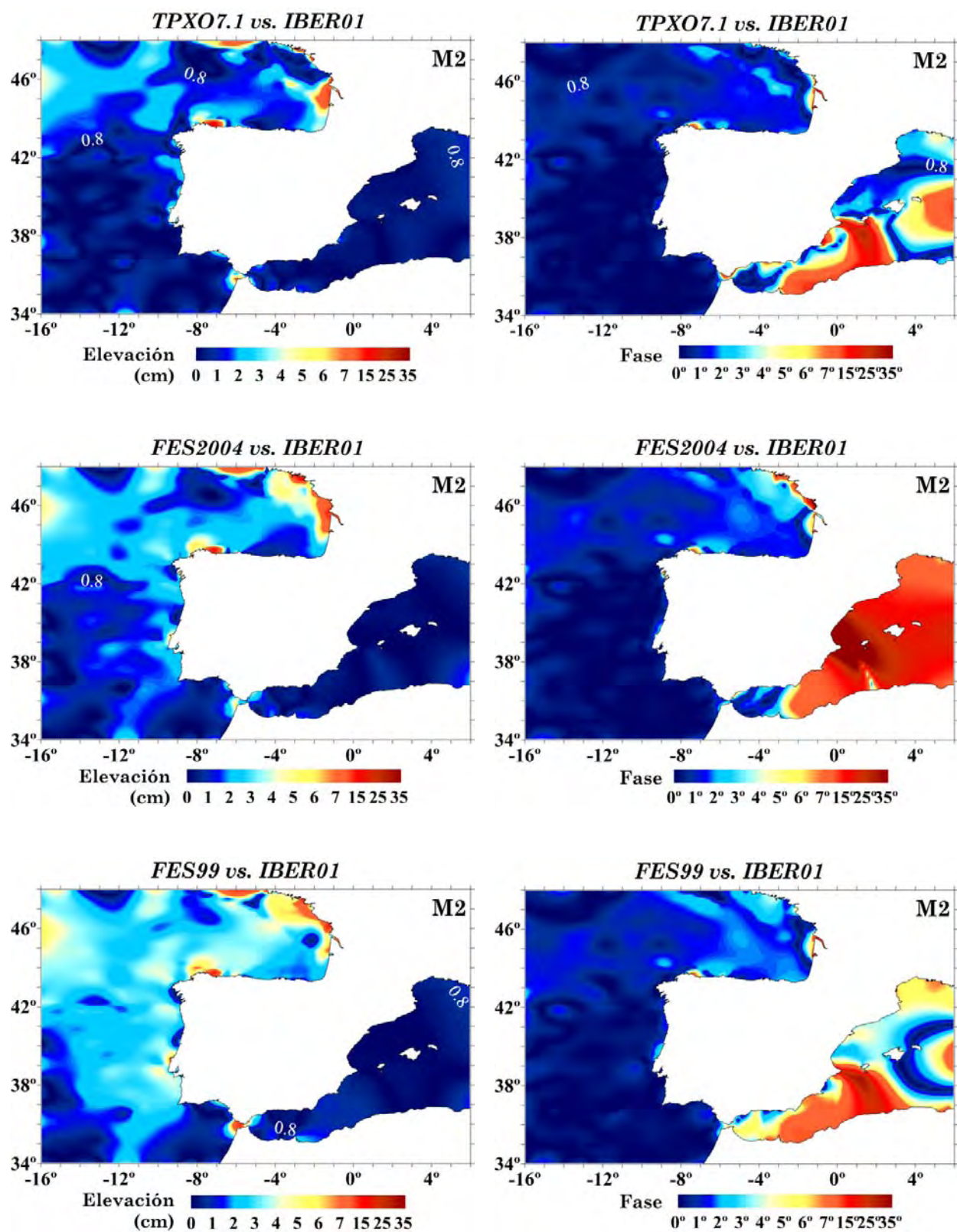


**FIGURA 4.22:** Valor absoluto de las diferencias en la amplitud de la marea oceánica entre los modelos IBER01 y GOT00.2, para los principales constituyentes de marea. Obsérvese que las escalas son diferentes para cada constituyente de marea.



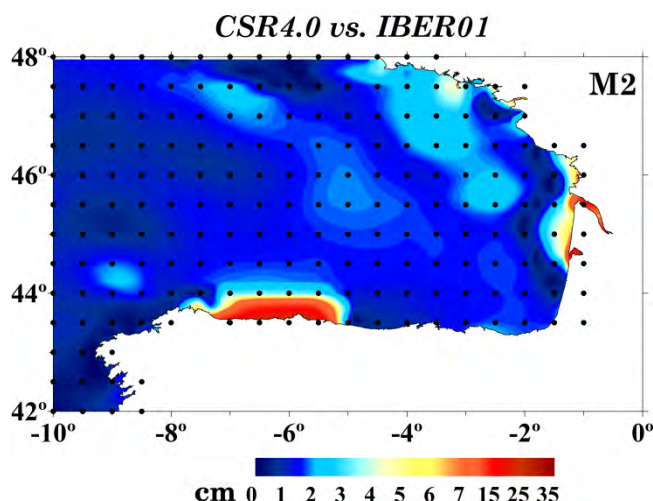
**FIGURA 4.23:** Valor absoluto de las diferencias en la fase respecto a Greenwich de la marea oceánica entre los modelos IBER01 y GOT00.2, para los principales constituyentes de marea. Obsérvese que las escalas son diferentes para cada constituyente de marea.





**FIGURA 4.24:** Para el constituyente de marea  $M_2$ , valor absoluto de las diferencias en la amplitud (dcha.) y la fase (izda.) de la marea oceánica entre IBER01 y los modelos globales TPX07.1, FES2004 y FES99.





**FIGURA 4.25:** Valor absoluto de las diferencias en la amplitud de la marea oceánica entre lo modelos IBER01 y CSR4.0 para el constituyente  $M_2$ , restringidos a la región de la cornisa cantábrica.

#### 4.6.2 Descripción Específica de IBER01 y Comparación con Modelos Locales y Observaciones

##### a) Golfo de Vizcaya, Mar Cantábrico y Litoral Gallego

La región norte del dominio del modelo (comprendida entre los paralelos 42° N y 48° N y desde el meridiano 16° O hasta la costa atlántica francesa) se caracteriza por un incremento de las amplitudes en dirección a la costa y las fases que se propagan hacia el norte, en una dirección casi perpendicular a la costa francesa (Fig. 4.26 y 4.27). Claramente, y en concordancia con la teoría (p. ej., Clarke y Battisti, 1981), se observa en la región una amplificación significativa de las mareas semi-diurnas sobre la plataforma continental francesa (también sobre la plataforma cántabra aunque en este caso más localmente, por las dimensiones y extensión propias de esta plataforma). En esta región el valor de  $\sigma_\zeta$ , definido en [4.6], varía de aproximadamente 88 cm al oeste (latitud 16° O) hasta unos 198 cm a lo largo de la costa francesa sobre la plataforma Armórica (Fig. 4.3). La elevación máxima de la marea oceánica, definida por [4.7], tiene un valor medio en la zona de aproximadamente 1,7 veces  $\sigma_\zeta$ .

Para el constituyente de marea  $M_2$  las amplitudes alcanzan un valor máximo de 170 cm. El patrón de propagación es similar para todas las ondas en la banda de marea semi-diurna aunque su magnitud disminuye considerablemente. Así, los valores máximos de las amplitudes para las ondas  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$  son del 70%, 40% y el 20%, respectivamente, con respecto a  $M_2$ . Las fases, que progresan de sur a norte, presentan en toda la banda de marea una diferencia de 25° entre las latitudes 48° N y 42° N (esto es, un retardo en el tiempo de 3,33 horas). En cuanto a los constituyentes de marea diurnos dominantes,  $K_1$  y  $O_1$ , sus amplitudes son casi constates en la zona, de unos 7 cm y 6 cm respectivamente, aunque presentan leves variaciones ocasionadas por la topografía del fondo oceánico y la geografía costera (en concreto, el cambio de orientación de la línea de costa de La Coruña al Cabo Finisterre, Fig. 4.26). En el caso de los constituyentes diurnos, la propagación de fases se produce en dirección noroeste, con una diferencia de fases (entre los 42° N y 48° N) que no supera los 10° para  $K_1$  y 20° para  $O_1$ .

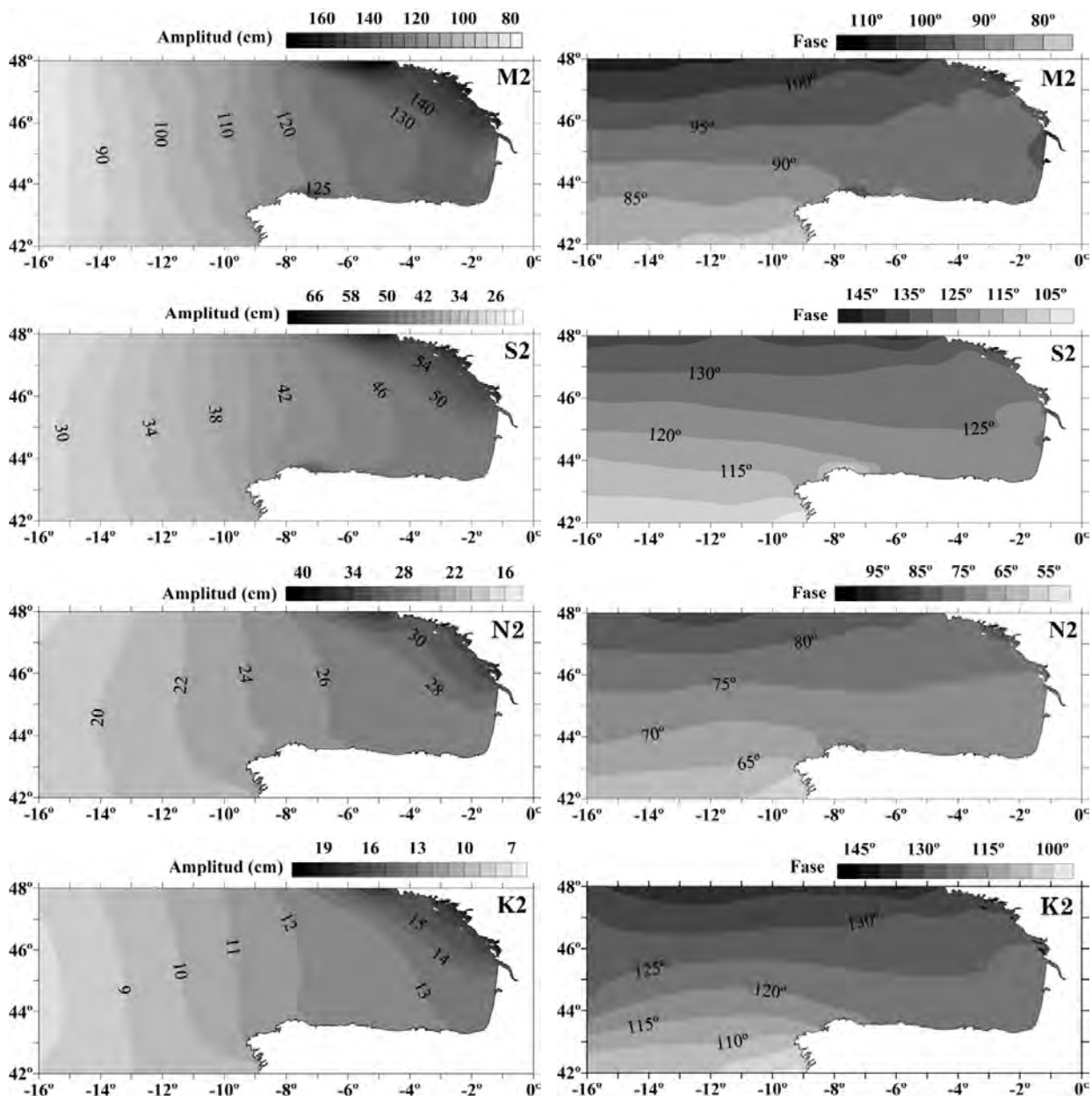
En general, los patrones de propagación y el rango de magnitudes típicas para las bandas de marea diurna y semi-diurna concuerdan, razonablemente, con los modelos desarrollados específicamente en esta zona por otros autores (p. ej., Pairaud et al., 2004; Fortunato et al., 2002; Fanjul et al. 1997)<sup>39</sup> aunque, localmente, existen diferencias significativas. Por ejemplo, Fortunato et al. (2002) y Fanjul et al. (1997) aprecian una región de fuertes gradientes de fase en las proximidades de Port-Bloc/Point de Grave. Por una parte, los resultados obtenidos por Fanjul et al. (1997) en esta estación, que discrepan significativamente con los datos observados, se atribuyen a problemas en éstos. La comparación realizada en esta memoria de los resultados obtenidos por Fanjul et al. (1997) con los datos observados, muestra discrepancias importantes no sólo en la estación Port-Bloc, si no que éstas se extienden también a las diversas estaciones situadas a lo largo de la costa francesa (Tabla 4.9). Por otra parte, Fortunato et al. (2002) señalan que sus resultados no concuerdan en Port-Bloc con los datos observados y, en este caso, los autores lo atribuyen a gradientes de fase en la zona no representados adecuadamente por su modelo (lo que les sugiere un aumento del refinamiento de la cuadrícula oceánica en la zona y la elección de una batimetría más adecuada). A diferencia de los resultados anteriores, las fases obtenidas con IBER01 en esta zona no presentan, en general, un gradiente de fases significativo (exceptuando un aumento local en las fases para las ondas  $M_2$  y  $K_1$ ). Además, tienen más concordancia con los datos observados que los autores anteriores. La combinación de la hidrodinámica y de los datos en esta zona en el modelo IBER01 se puede apreciar en la estación Cap Ferret (Tabla 4.9), donde las constantes de marea observadas y asimiladas en el modelo (con su correspondiente error) presentan un EMC, con respecto a la solución final IBER01, de unos 18 cm para las ondas  $M_2$  y  $S_2$ . Aun así, este EMC es considerablemente inferior al obtenido por Fanjul et al. (1997) y comparable al de Pairaud et al. (2004)<sup>40</sup>. Finalmente, hay que destacar que el modelo de Fortunato et al. (2002) confirma la amplificación de las amplitudes de la marea oceánica en la cornisa cantábrica obtenida por IBER01 y que se ha descrito anteriormente.

En las Tablas 4.7 y 4.8 se presenta el EMC y el RSS (ecuaciones [4.8] y [4.9], respectivamente) entre los modelos de Fanjul et al. (1997) e IBER01, para un total de 20 estaciones mareográficas en la región. La Tabla 4.15 presenta una estimación del EMC del modelo IBER01 calculado según la ecuación [4.10] sobre la base de los emplazamientos mareográficos anteriores y los principales constituyentes de marea diurnos y semi-diurnos. En general, en las Tablas se observa una mayor concordancia de IBER01 con las observaciones, para todos los constituyentes de marea listados, exceptuando la estación de Coruña-2. Muy próxima a la estación Coruña-2 se encuentra la estación Coruña-1 (Fig. 4.10), cuyas constantes armónicas han sido obtenidas a partir del análisis de 59 años de observación con el programa VAV (Tablas 3 y 4, Apéndice 2). Comparando los resultados de

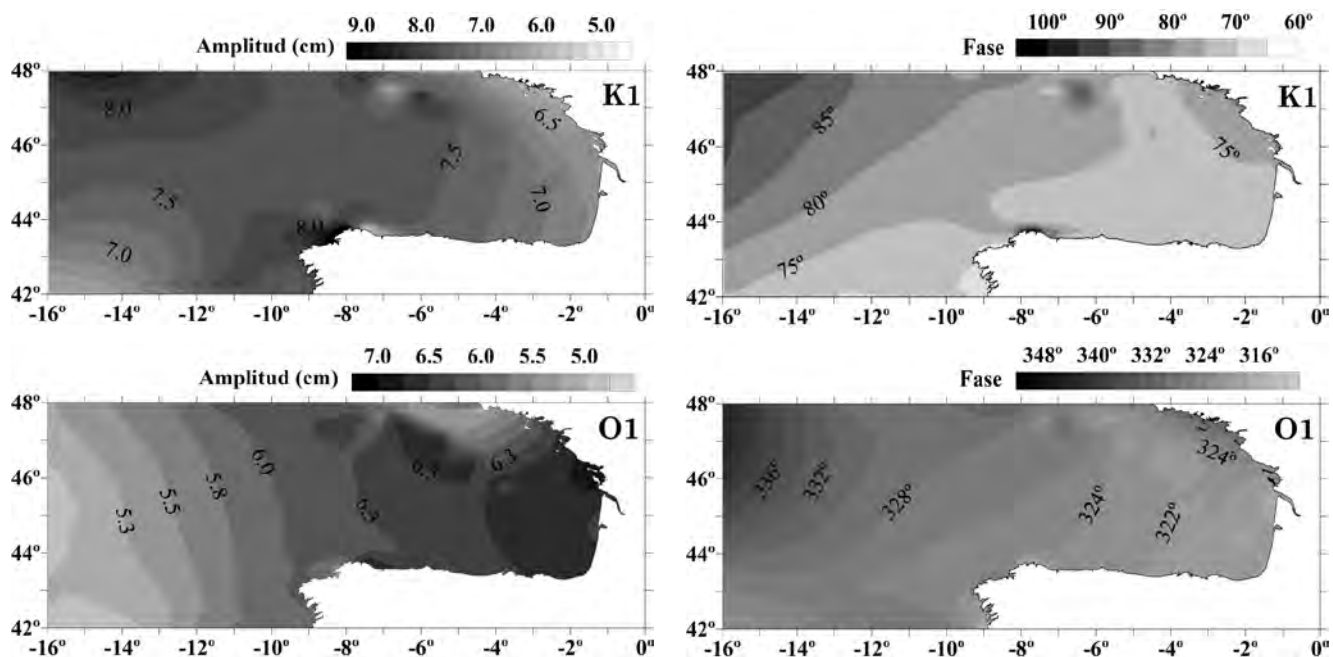
<sup>39</sup> La comparación con los modelos locales citados se lleva a cabo a partir de las cartas de marea publicadas en las referencias indicadas (los modelos no se encuentran a disposición pública).

<sup>40</sup> En la Tabla 4.9 no se presentan los resultados obtenidos por Pairaud et al. (2004) por el escaso número de estaciones disponibles para su comparación en la zona (sólo 5 de las 20 listadas) y la limitada resolución de las cartas de marea publicadas. Además, la precisión del modelo desarrollado por Pairaud et al. es inferior en áreas de aguas profundas a la de modelos globales, tales como GOT00.2 o FES2004, aunque ésta mejora sobre las plataformas continentales.

Coruña-1 con los obtenidos por Fanjul et al. (1997) y con IBER01, por ejemplo para el constituyente  $M_2$ , el EMC del modelo de Fanjul se incrementa de 0,7 a 4,2 cm mientras que, para IBER01 el EMC disminuye de 4,4 a 1,4 cm. Por otra parte, se observa en las Tablas que, por lo general, el valor de las amplitudes obtenidas por Fanjul et al. (1997) es superior (de 1 a varios cm, dependiente del emplazamiento y del armónico de marea considerados) a las modeladas por IBER01. Esto puede atribuirse a la no inclusión en el modelo de Fanjul del potencial generador de marea, lo que tiende a sobreestimar las amplitudes, como señalan los propios autores.



**FIGURA 4.26:** El modelo IBER01 restringido a la costa norte de la Península Ibérica, para los constituyentes de marea semi-diurnos  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados. Obsérvese que las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.



**FIGURA 4.27:** El modelo IBER01 restringido a la costa norte de la Península Ibérica, para los constituyentes de marea diurnos  $K_1$  y  $O_1$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados. Obsérvese que las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.

**TABLA 4.9:** Comparación de amplitudes (en cm) y fases (respecto a la marea en Greenwich, en grados) observadas (Tablas 3 y 4, Apéndice 2) con las modeladas por Fanjul et al. (1997) e IBER01 en diversos emplazamientos situados en la región cantábrica del dominio del modelo. EMC denota el error medio cuadrático calculado según [4.8] y expresado en cm.

Estación	$M_2$						$S_2$					
	Fanjul et al. (1997)			IBER01			Fanjul et al. (1997)			IBER01		
	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
RD11/IAPSO1.1.68	86.1	94.8	3.5	83.16	92.08	3.8	29.9	125.0	1.8	29.84	120.61	1.0
T1	143.1	94.0	9.2	132.09	92.70	3.3	70.5	127.6	23.5	47.41	125.08	1.8
T2	139.7	95.2	6.9	130.96	93.96	3.2	51.2	129.0	4.6	47.18	125.95	1.8
T3	146.1	98.1	10.6	134.16	95.81	3.8	51.8	133.4	5.7	48.15	128.98	1.5
T4	138.7	100.4	3.1	133.62	99.18	2.8	48.0	135.9	2.4	47.38	132.74	1.2
C1	185.8	100.9	30.1	151.42	97.09	8.5	70.5	134.2	14.7	57.20	129.48	1.2
C2	173.7	97.7	22.5	147.59	95.30	5.1	64.9	132.4	11.8	55.21	128.08	1.2
C3	166.9	97.2	19.3	144.13	94.61	6.0	61.6	132.0	9.9	53.59	127.59	0.7
CONCARNEAU	176.2	101.1	28.2	148.84	95.85	8.2	65.1	139.8	13.6	57.43	131.72	3.2
LE GUILVINEC	176.7	102.6	31.9	147.92	95.50	11.0	64.1	142.2	14.2	57.82	130.27	5.3
P-TUDY	174.0	100.2	26.1	147.48	95.87	7.1	65.1	137.0	12.6	56.23	130.45	2.2
OLONE	169.9	95.5	14.4	151.58	95.88	5.8	62.9	128.0	7.0	56.76	128.90	0.9
P-BLOC	165.1	92.8	49.1	149.63	108.62	4.9	60.0	124.7	21.0	51.67	140.59	3.5
C. FERRET	151.1	91.1	52.0	128.26	101.93	18.0	54.2	123.7	25.8	46.72	127.94	18.5
SOCOA	141.6	92.7	8.9	130.20	91.13	3.7	50.4	126.2	4.3	46.96	123.56	1.0
BILBAO-1	139.4	92.7	7.0	130.48	91.30	3.0	49.6	126.3	3.5	47.03	124.00	0.6
SANTANDER-2	137.6	92.8	7.1	132.82	93.97	3.7	48.9	126.3	3.1	47.36	124.97	3.2
GIJÓN	133.2	92.3	3.3	129.68	89.86	3.4	47.3	125.6	2.3	47.47	122.44	1.8
CORUÑA-2	120.2	87.0	0.7	116.51	85.48	4.4	43.2	119.4	1.5	41.30	113.10	3.7
VIGO-2	110.2	80.2	7.0	109.76	76.19	2.6	40.2	110.9	3.5	37.83	104.09	1.8

**TABLA 4.9:** Continuación.

Estación	K <sub>1</sub>						O <sub>1</sub>					
	Fanjul et al. (1997)			IBER01			Fanjul et al. (1997)			IBER01		
	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
RD11	7.0	73.8	1.6	7.59	86.81	0.6	4.5	339.2	0.9	4.97	334.98	0.3
T1	8.6	72.4	2.6	7.00	73.67	1.5	6.4	340.6	1.9	6.75	322.30	0.4
T2	8.5	72.5	2.0	7.17	73.00	0.9	6.4	340.8	1.7	6.47	321.18	0.5
T3	8.3	74.8	2.0	7.49	73.33	1.2	6.4	342.1	2.1	5.87	322.71	1.3
T4	8.8	75.4	2.2	7.97	82.00	2.0	6.5	341.3	1.8	6.12	323.39	0.7
C1	8.0	78.5	2.7	6.35	77.05	1.0	5.9	346.7	2.4	6.27	327.11	0.5
C2	8.1	77.2	2.6	6.54	75.99	1.1	6.0	345.2	2.5	6.22	325.22	0.6
C3	8.2	76.4	2.5	6.74	75.27	1.0	6.0	344.1	2.4	6.21	323.36	0.5
CONCARNEAU	7.8	78.6	1.9	6.24	75.85	0.4	5.4	6.1	3.7	5.46	330.96	0.8
LE GUILVINEC	7.7	79.3	1.9	6.22	71.93	0.5	5.6	338.5	1.3	4.99	329.92	1.3
P-TUDY	7.8	78.4	2.0	6.23	76.10	0.4	5.6	346.3	2.0	5.70	329.47	0.6
OLONE	8.1	77.5	2.1	6.44	79.88	0.7	6.0	345.6	0.3	6.80	324.56	0.3
P-BLOC	8.5	73.7	2.7	6.30	77.47	0.4	6.3	342.1	1.5	6.56	320.88	1.3
C. FERRET	8.5	72.2	2.9	6.74	73.11	1.1	6.3	340.7	1.2	6.28	321.40	1.2
SOCOA	8.6	71.6	2.6	6.77	70.73	0.8	6.4	339.9	2.5	6.64	320.08	0.5
BILBAO-1	8.6	71.5	2.3	6.93	72.38	0.7	6.4	339.8	2.3	6.41	321.36	0.7
SANTANDER-2	8.5	71.4	1.9	7.13	72.77	0.6	6.4	339.7	2.0	6.43	321.96	0.8
GIJÓN	8.5	71.1	1.7	7.53	74.47	0.8	6.3	339.3	1.9	6.25	323.41	0.8
CORUÑA-2	8.8	62.2	1.9	9.49	67.41	2.0	6.8	334.3	1.1	5.77	327.59	1.0
VIGO-2	8.2	59.9	0.7	7.58	66.48	0.9	6.5	325.6	0.8	5.77	318.76	0.9

**TABLA 4.10:** Valores de la raíz cuadrada de la suma de los EMC (RSS, en cm), para los constituyentes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  y  $O_1$ , en las estaciones listadas en la Tabla 4.9 y situadas en la región cantábrica del dominio del modelo, en el caso de los modelos de Fanjul et al. (1997) e IBER01.

Estación	MODELO		Estación	MODELO	
	Fanjul et al. (1997)	IBER01		Fanjul et al. (1997)	IBER01
	RSS (cm)	RSS (cm)		RSS (cm)	RSS (cm)
RD11	4.34	3.99	P-TUDY	29.12	3.99
T1	25.44	4.07	OLONE	16.15	4.07
T2	8.70	3.81	P-BLOC	53.49	3.81
T3	12.38	4.45	C. FERRET	58.13	4.45
T4	4.84	3.71	SOCOA	10.52	3.71
C1	33.69	8.66	BILBAO-1	8.48	8.66
C2	25.66	5.39	SANTANDER	8.22	5.39
C3	21.97	6.14	GIJÓN	4.76	6.14
CONCARNEAU	31.58	8.85	CORUÑA-2	2.75	8.85
LE GUILVINEC	34.99	12.29	VIGO-2	7.90	12.29

#### b) Región Atlántico Noroeste, Golfo de Cádiz y Estrecho de Gibraltar

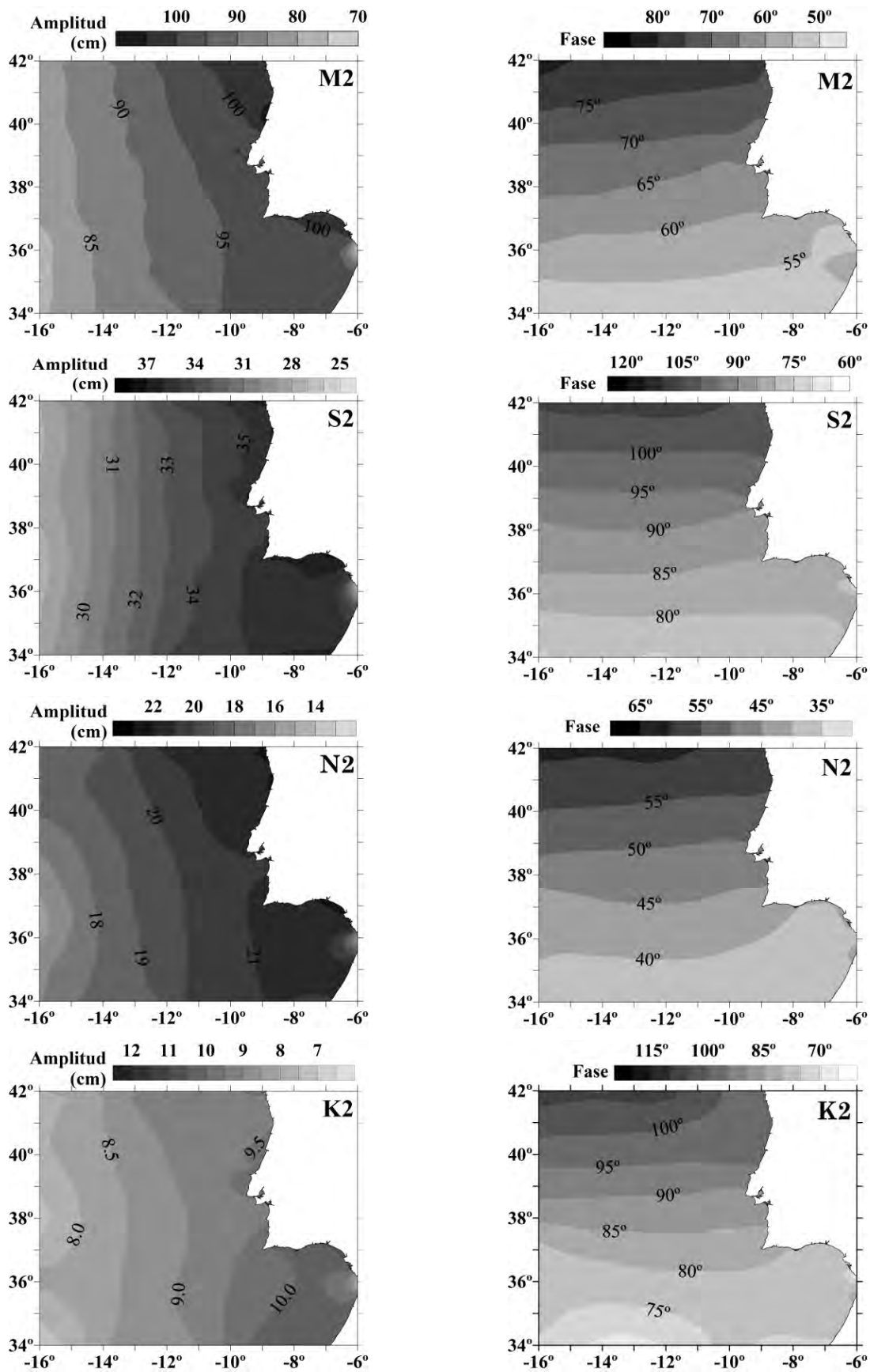
En esta región, el valor de  $\sigma_{\zeta}$  se incrementa desde los 20 cm (en la entrada este del Estrecho de Gibraltar) hasta alcanzar unos 117 cm. Las áreas de mayor variabilidad oceánica son, por una parte, la costa portuguesa al norte de Peniche y, por otra parte, el sur peninsular frente a las localidades de Faro y Cádiz). Al igual que en el caso anterior, la elevación máxima de la marea oceánica  $\zeta_{\max}$  tiene un valor medio de 1,7 veces  $\sigma_{\zeta}$ .

## La Costa Oeste de la Península Ibérica

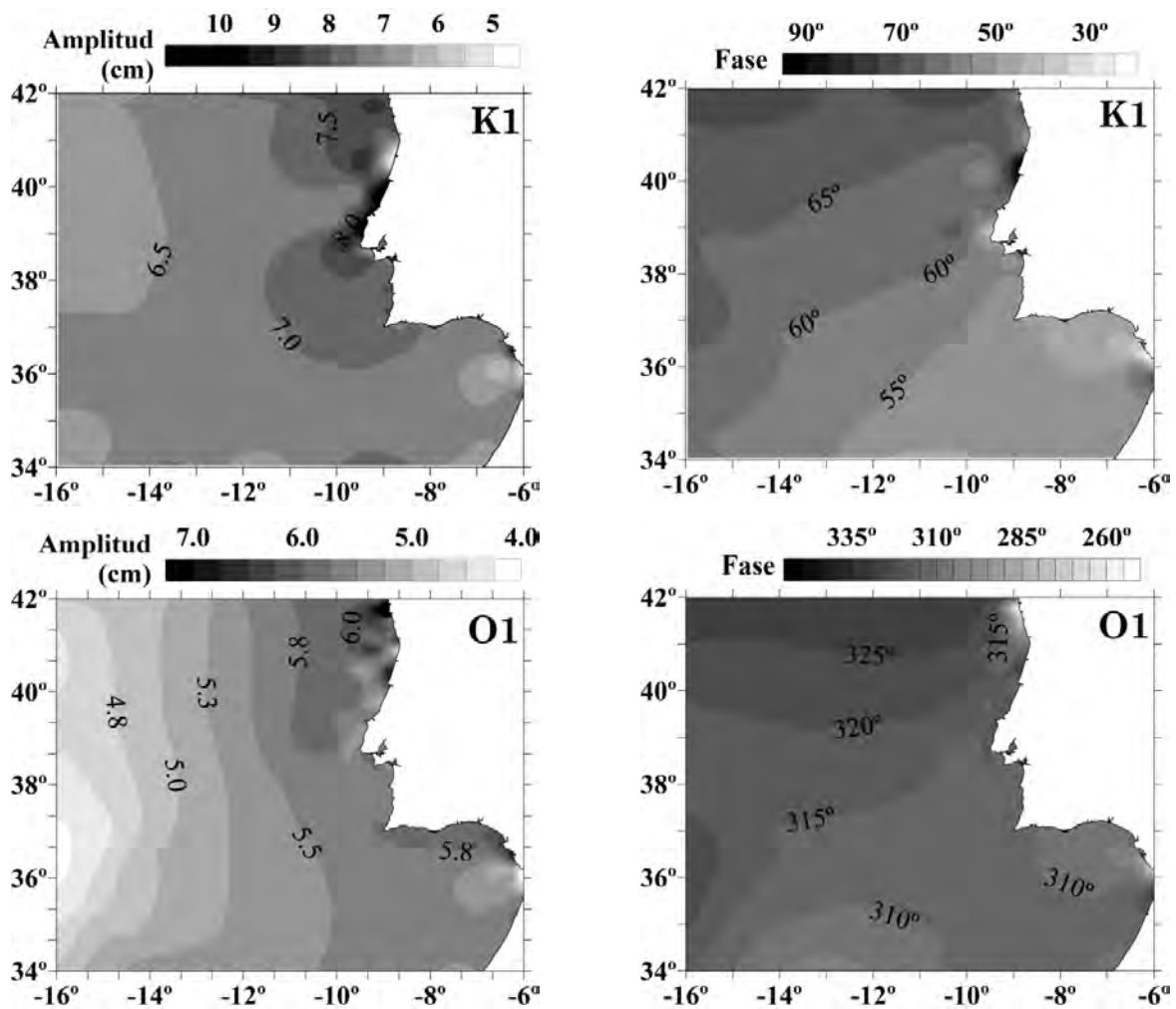
Las Figuras 4.28 y 4.29 presentan el modelo IBER01 restringido a la costa oeste de la Península Ibérica para los principales armónicos semi-diurnos y diurnos, respectivamente. Para  $M_2$  las amplitudes se propagan de oeste a este, y alcanzan un valor máximo de 100 cm en las proximidades de la costa peninsular (al norte de Peniche y en el Golfo de Cádiz). Para los restantes constituyentes en esta banda semi-diurna, su patrón de propagación es similar y sus magnitudes máximas decrecen hasta 35 cm para  $S_2$ , 21 cm para  $N_2$  y 10 cm para  $K_2$ . Las fases, que progresan de sur a norte, presentan en toda la banda de marea una diferencia de  $20^\circ$ - $25^\circ$  entre las latitudes  $34^\circ$  N y  $42^\circ$  N (lo que supone un retardo en el tiempo en la ocurrencia del máximo de marea de 2,67-3,33 horas). El patrón de propagación de los constituyentes diurnos difiere de los semi-diurnos, particularmente en el caso de la onda  $K_1$ . Para esta onda, las amplitudes casi constantes en el océano profundo (entre 6,5 y 7 cm) se incrementan de forma notoria en las proximidades de la costa, principalmente entre Cascáis y Peniche y también al norte de este último. Para  $O_1$  se observa una lenta propagación de las amplitudes, apenas 1 cm, de oeste a este con un incremento significativo al sur y al norte de Oporto, donde alcanza un valor máximo de 7 cm. La propagación de fases en la banda diurna se produce en dirección noroeste en el océano abierto, mientras que a lo largo de la plataforma continental portuguesa y desde el Golfo de Cádiz al Estrecho de Gibraltar las fases varían localmente. Así, puede concluirse que a lo largo de la plataforma continental portuguesa se produce una alteración de los patrones de propagación y de las magnitudes típicas de la marea oceánica en la banda diurna proveniente del atlántico. Esta alteración varía, además, en cada una de las secciones en las que la región queda dividida por sus tres cañones principales.

En general, el patrón de propagación y las magnitudes típicas para las ondas de marea  $M_2$  y  $O_1$ , tanto en amplitud como fase, concuerdan con los mapas publicados por Fortunato et al. (2002), aunque en el caso de  $O_1$  la resolución del mapa publicado por estos últimos autores no permite representar las variaciones locales que se producen en las proximidades de la costa. Por el contrario, la comparación de IBER01 con el modelo local desarrollado por Almeida y Dubert (2006) muestra una buena concordancia para los ocho constituyentes principales y, en el caso diurno, se confirma la amplificación de las amplitudes y la alteración de fases sobre las secciones descritas anteriormente.

En las Tablas 4.9 y 4.10 se presenta el EMC y el RSS entre los modelos hidrodinámicos desarrollados por Paireud et al. (2004), Fanjul et al. (1997) y el modelo IBER01, en un total de 6 estaciones mareográficas (Tabla 1 en Apéndice 2). Asimismo, la Tabla 4.15 presenta una estimación del EMC del modelo IBER01 calculado según [4.10] sobre la base de los emplazamientos mareográficos anteriores y los principales constituyentes de marea diurnos y semi-diurnos. Se observa en las Tablas una mayor concordancia de IBER01 con las observaciones, para todos los constituyentes de marea listados, exceptuando: (i) Para el modelo de Fanjul et al. (1997) y la onda  $M_2$  en la estación RM2 (ii) para el modelo de Paireud et al. (2004) y las ondas  $M_2$  y  $K_1$  en las estaciones IAPSO-1.1.74 y Cascáis.



**FIGURA 4.28:** El modelo IBER01 restringido a la costa oeste de la Península Ibérica, para los constituyentes de marea semi-diurnos  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados. Obsérvese que las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.



**FIGURA 4.29:** El modelo IBER01 restringido a la región de la costa oeste de la Península Ibérica, para los constituyentes de marea diurnos  $K_1$  y  $O_1$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados. Las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.

**TABLA 4.11:** Comparación entre las amplitudes (en cm) y las fases (expresadas con respecto a la marea en Greenwich, en grados) observadas (Tablas 3 y 4, Apéndice 2) y las modeladas por Pairaud et al. (2004), Fanjul et al. (1997) e IBER01 en diversas estaciones en la región atlántica del dominio del modelo. EMC denota el error medio cuadrático, según [4.8], expresado en cm.

Onda	Estación	MODELO								
		Pairaud et al. (2004)			Fanjul et al. (1997)			IBER01		
		Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
$M_2$	IAPSO-1.1.74	86	74	2.0	84.4	77.9	6.9	85.33	73.97	2.7
	RM2	---	---	---	83.9	66.5	2.5	85.56	60.56	10.7
	RM1	---	---	---	92.7	66.2	21.1	93.77	59.47	16.0
	CASCAIS	99	64	0.8	99.7	68.4	6.9	98.12	64.97	1.4
	H. MAZAGON	---	---	---	103.2	62.0	7.5	104.49	56.87	2.1
	S-BONANZA	---	---	---	103.0	61.0	9.5	95.33	60.79	3.7
$S_2$	IAPSO-1.1.74	29	100	1.0	30.5	106.3	3.4	29.18	99.44	0.8
	RM2	---	---	---	31.2	94.0	1.3	30.31	85.24	3.5
	RM1	---	---	---	34.7	94.3	11.1	33.88	84.62	6.2
	CASCAIS	34	91	1.2	37.3	97.3	4.7	35.12	91.23	0.3
	H. MAZAGON	---	---	---	39.4	90.2	3.5	37.24	82.90	1.9
	S-BONANZA	---	---	---	39.3	89.3	6.4	33.69	85.72	2.7



**TABLA 4.11:** Continuación.

Onda	Estación	MODELO								
		Pairaud et al. (2004)			Fanjul et al. (1997)			IBER01		
		Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
$K_1$	IAPSO-1.1.74	6	72	0.8	6.6	64.8	0.2	6.30	67.73	0.2
	RM2	---	---	---	6.3	56.2	0.5	6.87	61.49	0.6
	RM1	---	---	---	6.9	53.6	1.3	6.97	56.69	1.1
	CASCAIS	7	59	0.6	7.4	53.5	0.5	7.72	56.05	0.8
	H. MAZAGON	---	---	---	7.3	48.7	0.5	6.74	47.46	0.4
	S-BONANZA	---	---	---	7.3	47.7	1.7	6.79	50.70	1.1
$O_1$	IAPSO-1.1.74	5	326	0.3	4.6	326.7	0.6	4.68	322.58	0.5
	RM2	---	---	---	4.8	315.6	0.6	4.88	316.48	0.5
	RM1	---	---	---	5.4	314.4	1.2	5.41	312.92	1.4
	CASCAIS	6	317	0.4	6.0	316.0	0.3	5.92	314.12	0.2
	H. MAZAGON	---	---	---	6.0	309.6	0.2	5.92	308.89	0.3
	S-BONANZA	---	---	---	6.0	308.5	1.4	6.35	313.84	0.8

**TABLA 4.12:** Valores de la raíz cuadrada de la suma de los EMC (RSS, en cm), para  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  y  $O_1$ , en las estaciones listadas en la Tabla 4.11 y situadas en la región atlántica del dominio del modelo, en los casos de los modelos de Pairaud et al. (2004), Fanjul et al. (1997) e IBER01.

Estación	MODELO		
	Pairaud et al. (2004)	Fanjul et al. (1997)	IBER01
	RSS (cm)	RSS (cm)	RSS (cm)
IAPSO-1.1.74	2.39	7.72	2.87
RM2/IAPSO-1.1.42	---	2.92	11.28
RM1/IAPSO-1.1.43	---	23.91	17.25
CASCAIS	1.61	8.37	1.65
H-MAZAGON	---	8.29	2.88
S-BONANZA	---	11.66	4.78

## El Estrecho de Gibraltar

En las inmediaciones del Estrecho de Gibraltar, aproximándose desde el océano Atlántico, la amplitud de  $M_2$ , que es el constituyente dominante en la región, es de unos 100 cm (Fig. 4.31). El modelo IBER01 reproduce claramente el rápido decrecimiento de las amplitudes de este constituyente desde la región atlántica hacia el Mar Mediterráneo, a través del Estrecho. Aunque la variación en amplitud se produce de forma casi regular a lo largo de éste, se observa un mayor gradiente en la sección del Umbral de Camarinal. La amplitud decrece desde 80-75 cm en la línea que une los cabos de Trafalgar y Espartel hasta los 30 cm en la línea que une Gibraltar y Ceuta, lo que supone un factor de 2,75 en las amplitudes entre ambas entradas al Estrecho. A diferencia de lo anterior, a lo ancho del Estrecho, las amplitudes permanecen aproximadamente constantes. Por otra parte, la propagación de fases para este mismo constituyente se produce en dirección suroeste (con una diferencia de fases de unos  $10^\circ$ ), sin que exista una diferencia de fases entre ambos extremos del Estrecho. Este patrón de propagación de las fases se encuentra, así mismo, en oposición con la propagación hacia el Norte que este constituyente de marea tiene en el Atlántico. Para el resto de ondas semi-diurnas ( $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ ), la distribución espacial de las líneas de amplitud y fase es muy similar a  $M_2$ . Más aun, el factor de proporción de las amplitudes entre las dos entradas al Estrecho se

mantiene en torno a 2,5-2,7 para todos los constituyentes semi-diurnos. La diferencia de fases para estas ondas es inferior a 10°, a excepción de  $K_2$  que supera los 25°.

La amplitud de las ondas diurnas (Fig. 4.30) decrece en dirección Este, con un factor de proporción entre las dos entradas al Estrecho de 4-5 para los dos constituyentes dominantes en esta banda de marea,  $K_1$  y  $O_1$ . Estas ondas se caracterizan, principalmente, por su rápida variación de fases, que se acelera en el Estrecho de Tarifa en dirección al Mar de Alborán. Para el constituyente  $K_1$ , la diferencia de fases entre ambos extremos del Estrecho es de aproximadamente 90° en la costa marroquí (entre Espartel y Ceuta) y de unos 140° en la costa española (entre Trafalgar y Gibraltar). La propagación de fases para el constituyente  $O_1$  es compleja: (i) Aproximándose al Estrecho desde el Atlántico, la propagación se produce en dirección al Sur, con una diferencia de fases entre Trafalgar y Espartel de 60°. (ii) Aproximándose al Estrecho desde el Mediterráneo, la propagación se produce en dirección al Norte, con una diferencia de fases entre Gibraltar y Ceuta de unos 30°. (iii) A lo largo de la línea que une Tarifa (España) y Punta Cires (Marruecos), la propagación de fases varía drásticamente y se produce un cambio de fases de hasta 360° en sentido contrario a las agujas del reloj. Este patrón de propagación, junto con el de las amplitudes, parece indicar la existencia de un punto anfidrómico en esta línea.

En general, el patrón espacial de las líneas de amplitud constantes que presenta IBER01, en el caso de las mareas semi-diurnas  $M_2$  y  $S_2$  (Fig. 4.31), es comparable con los modelos puramente hidrodinámicos<sup>41</sup> TEJ98 y SAN04, así como con los modelos puramente empíricos, obtenidos a partir de observaciones mareográficas, LAF97 y CAN90. Asimismo, la magnitud de las mismas muestra una buena concordancia en todos los casos. Con respecto a las fases se observan algunas diferencias que deben ser reseñadas entre los distintos modelos:

- Aunque el patrón espacial de las líneas de fase constante es similar entre IBER01 y el modelo empírico CAN90, este último muestra una mayor diferencia de fases entre los extremos Norte y Sur del Estrecho (hasta 20° entre Tarifa y Punta Kankoush). La concordancia en magnitud aumenta ligeramente entre IBER01 y el resto de modelos (diferencias máximas de 5°).
- El modelo hidrodinámico SAN04 muestra una ligera desviación hacia el Norte de las fases en el Umbral de Camarinal, que no aparece en el resto de modelos.
- Los modelos LAF87 y TEJ98 presentan un cambio en la tendencia de la distribución espacial de las fases en el extremo noroeste de la región (en las proximidades del Cabo de Trafalgar). Esta diferencia puede atribuirse, como indican los autores, a que ambos modelos están forzados en ese punto por las constantes armónicas obtenidas del mareógrafo de Trafalgar (bien interpoladas, como en LAF87, o bien a través de las condiciones de frontera abierta impuestas por TEJ98). Por el contrario, el área abarcada por IBER01 se aleja considerablemente de esta zona, por lo que la propagación de la marea desde el exterior, junto

---

<sup>41</sup> Se denotan por LAF87, TEJ98, CAN90, FOR02 y SAN04 los modelos de García-Lafuente et al. (1987), Tejedor et al. (1998), Candela et al. (1990), Fortunato et al. (2002) y Sannino et al. (2002, 2004), respectivamente.

con el proceso de asimilación de las observaciones en Trafalgar en la dinámica modelada, homogeniza la distribución espacial de las líneas de amplitud, en concordancia con la resolución del modelo. Otros autores, p. ej. González et al. (1995), destacan también cómo la elección de estas condiciones sobre la fronteras del Estrecho es crítica sobre los resultados.

- Finalmente, en los modelos LAF87 y TEJ98 se observa también una aceleración en el incremento de las fases en las proximidades de Punta Kankoush, en dirección a Cabo Espartel (que coincide con la zona de máxima diferencia en fases con respecto a IBER01). Por una parte, estas diferencias pueden atribuirse, al igual que en el caso anterior, a la imposición de las constantes armónicas obtenidas a partir de las observaciones mareográficas en la estación Cabo Espartel. Por otra parte, como se especificará más adelante, debe observarse que la resolución de 5 minutos de IBER01 (lejos de los ~3 segundos de FOR02 o los ~16 segundos de TEJ98) no es lo suficientemente fina como para resolver con precisión la rápida variación de fases en esta zona, lo que afectará principalmente a los constituyentes de marea diurnos.
- Para el constituyente de marea  $M_2$ , IBER01 y SAN04 muestran una buena concordancia con respecto a las amplitudes, cualitativa y cuantitativamente. Con respecto a las fases IBER01 mejora su concordancia que con respecto a CAN90. Además, IBER01 no reproduce los efectos anómalos que muestra SAN04 en las proximidades de Tarifa y punta Kankoush (y su desviación hacia el norte en el Umbral de Camarinal, como señalan los autores), ajustándose más al modelo CAN90. Análogamente, para  $S_2$  tampoco se observa la mayor desviación hacia el norte en las fases que presentaba SAN04. Así, para los modelos IBER01 y SAN04, el factor de proporción  $M_2/S_2$  entre ambas entradas al Estrecho concuerda (con un valor de 2,5 a 2,7).

Con respecto a los constituyentes diurnos, se observan diferencias significativas, tanto entre los propios modelos utilizados para la comparación (LAF87; TEJ98 y FOR02) como con IBER01. Aunque estas diferencias son más importantes en el caso de las fases también se aprecian diferencias reseñables en la amplitud de la marea oceánica.

- Para la onda  $K_1$ , LAF87 muestra un patrón de propagación concordante con IBER01 y magnitudes similares en la mayor parte del Estrecho, exceptuando en las proximidades de la costa española desde Punta Gracia hasta Trafalgar, donde las amplitudes obtenidas por LAF87 son más bajas (de 1-2 cm). Para este mismo constituyente, el modelo TEJ98 muestra una distribución espacial de las líneas de amplitud más irregular que los dos anteriores (IBER01 y LAF87) y, aunque las magnitudes son similares, presentan diferencias locales importantes en el extremo noroeste (en las proximidades de Trafalgar). Estas diferencias están claramente ocasionadas por la imposición de las CFA.
- Para la onda  $O_1$ , el modelo LAF87 difiere tanto de IBER01 como de TEJ98 y FOR02 en la entrada Este del Estrecho. En esta zona, todos los modelos (exceptuando LAF97) muestran un incremento en las amplitudes que se inicia a lo largo de la línea que une Punta Carnero con Ceuta y se propaga en dirección al Mediterráneo. En el resto del dominio se produce, en general,

una buena concordancia entre los diferentes modelos, que es mayor en el caso de IBER01 y FOR02, mientras que TEJ98 muestra variaciones en la región noroeste (con respecto al resto de modelos, así como con respecto a la propia tendencia de sus resultados).

Finalmente, en cuanto a las fases:

- Para el constituyente  $K_1$ , los modelos muestran en general una buena concordancia. A pesar de ello, aunque la distribución espacial de las líneas de fases mostradas por LAF87 es similar a la de los restantes, se observa una variación más lenta de las mismas frente a las costas españolas. Así, los patrones de propagación de IBER01 y TEJ98 se ajustan más, aunque este último presenta magnitudes ligeramente más bajas (unos 20 grados) a lo largo de la costa marroquí.
- Para el constituyente  $O_1$ , la distribución de fases que presenta LAF87 varía significativamente con respecto al resto de modelos (incluido IBER01). Así, LAF87 parece no reproducir el patrón de propagación de las líneas de fases que provienen desde el Atlántico (hasta la línea que une las puntas de Paloma y Kankoush), aunque sus magnitudes sí se aproximan bastante bien. Por el contrario, desde el Atlántico hasta el Estrecho de Tarifa los modelos TEJ98 e IBER01 concuerdan, tanto en la distribución como en la magnitud de las fases. En el estrecho de Tarifa TEJ98, FOR02 e IBER01 reproducen un cambio de fases de 360 grados en sentido contrario a las agujas del reloj, pero de un modelo a otro varía su localización sobre la línea Paloma-Kankoush: TEJ98 sitúa este punto ligeramente hacia el Norte, desde el eje del Estrecho, mientras que IBER01 lo sitúa hacia el Sur (la localización de ambos puntos difiere, aproximadamente, 6 minutos en latitud). Esta diferencia puede, por tanto, atribuirse a la resolución de IBER01 (5 minutos). Nuevamente, desde la línea Paloma-Kankoush la propagación de fases, que se produce en dirección al Mar de Alborán, es concordante para los tres modelos anteriores.

En las Tablas 4.11 y 4.12 se presenta el EMC y el RSS, calculados respectivamente según las ecuaciones [4.8] y [4.9], entre los modelos TEJ98 e IBER01<sup>42</sup> con diversas observaciones mareográficas en el Estrecho de Gibraltar (Tabla 1 en Apéndice 2). La Tabla 4.15 muestra una estimación del EMC del modelo IBER01 para la región del Estrecho, calculado según la ecuación [4.10] sobre la base de los emplazamientos mareográficos anteriores y los principales constituyentes de marea diurnos y semi-diurnos. En general, puede verse en las Tablas una mayor concordancia de IBER01 con las observaciones, para todos los constituyentes de marea listados, exceptuando los mareógrafos costeros Kankoush, P. Cires y Ceuta y de profundidad DP5. Este aumento de las discrepancias de IBER01 con respecto a las observaciones (en comparación con los resultados presentados por TEJ98) puede atribuirse, por una parte, a la resolución de 5 minutos de IBER01 que tiende a suavizar las soluciones obtenidas en estaciones próximas (p. ej., entre DP5 y Tarifa, y entre P. Cires y DS) y, por otra parte, a la imposición de la estación de Ceuta como CFA en el modelo TEJ98.

---

<sup>42</sup> Para su comparación, se incluyen los resultados del modelo de Brandt et al. (2004) para la onda de marea  $M_2$ .

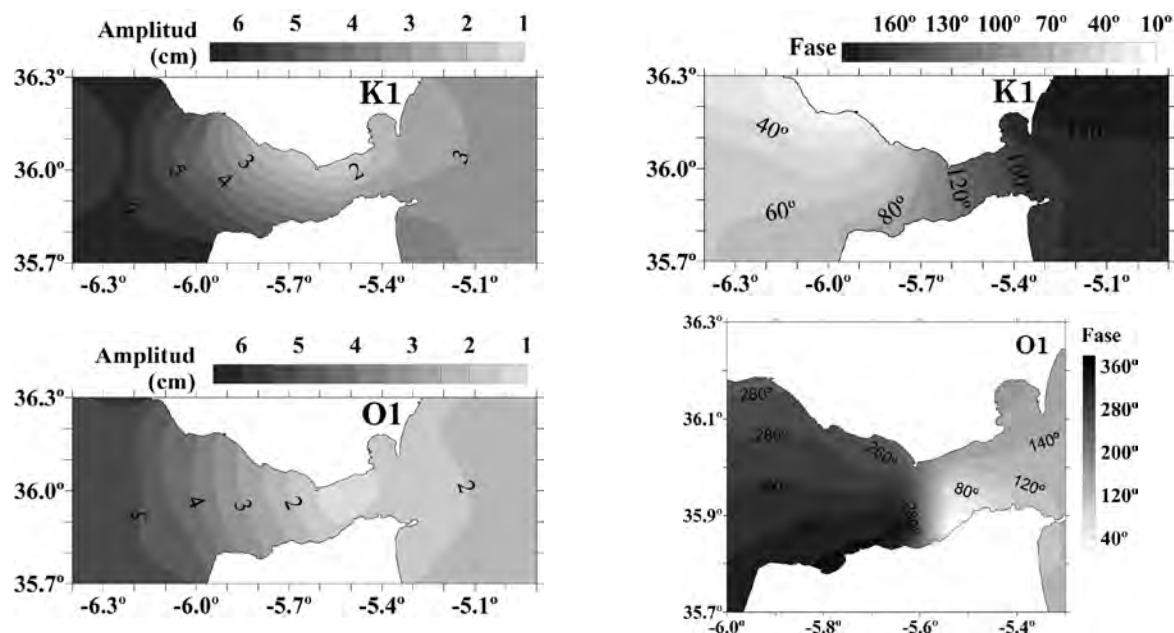


FIGURA 4.30: IBER01 restringido al Estrecho de Gibraltar, para las ondas  $K_1$  y  $O_1$ .

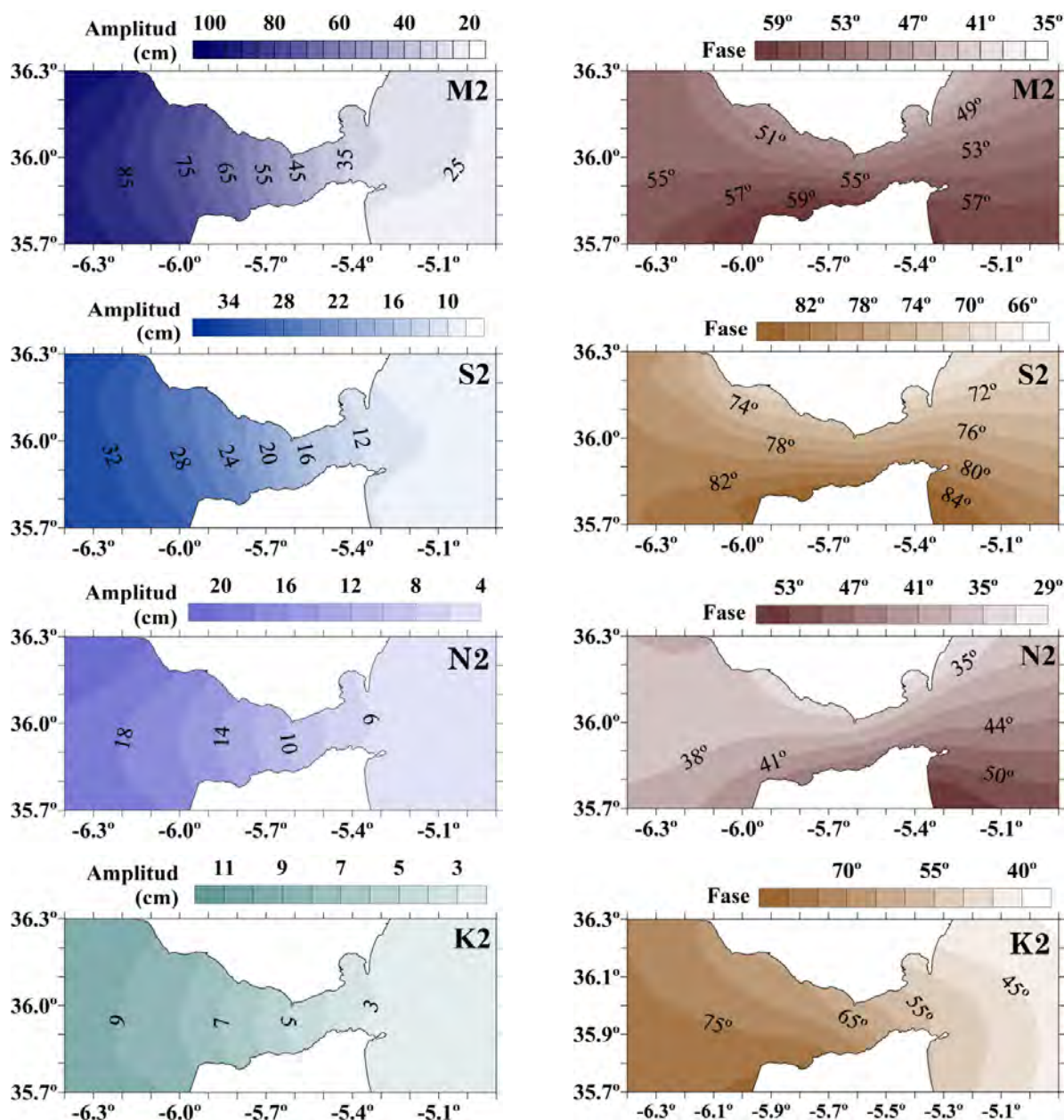


FIGURA 4.31: IBER01 restringido al área del Estrecho de Gibraltar, para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ .

**TABLA 4.13:** Comparación de amplitudes (en cm) y fases (expresadas con respecto a la marea en Greenwich, en grados) observadas (Tablas 3 y 4, Apéndice 2) con las modeladas por Brandt et al. (2004), TEJ98 e IBER01 en diversos emplazamientos situados en la región del Estrecho de Gibraltar. EMC denota el error medio cuadrático calculado según [4.8] y expresado en cm.

Estación	M <sub>2</sub>									S <sub>2</sub>					
	Brandt et al. (2004)			TEJ98			IBER01			TEJ98			IBER01		
	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
P. Gracia	57.8	48.2	7.2	70.4	55.0	9.0	64.87	47.96	1.2	24.7	78.8	3.1	23.97	72.66	1.8
Tarifa	38.1	38.4	4.1	47.4	49.9	8.7	44.93	50.48	7.5	17.1	75.8	2.5	16.39	75.16	2.0
P. Carnero	26.2	38.2	6.7	29.3	42.0	3.4	33.07	48.09	1.9	11.5	70.8	0.1	12.23	72.68	0.9
Algeciras	27.5	43.0	5.3	27.5	44.5	4.9	32.30	45.31	1.8	11.0	72.7	0.7	11.56	70.72	0.7
DW	67.6	58.3	10.7	76.1	63.6	10.4	74.51	57.30	3.8	26.3	88.2	3.9	27.82	81.82	1.0
DN	48.1	51.0	11.6	61.6	58.1	6.7	58.93	53.58	1.8	21.6	82.3	3.3	21.85	77.85	1.6
DS	45.3	61.2	8.3	57.4	61.2	3.9	57.27	57.60	5.6	21.0	75.9	3.0	21.80	81.67	1.0
DP5	35.2	40.1	10.4	42.2	49.2	2.1	42.46	50.70	2.6	15.5	75.4	0.6	16.44	75.13	0.6
Kankoush	40.8	64.0	11.7	52.4	63.7	4.9	57.90	62.51	8.7	18.3	88.2	1.9	21.20	85.89	1.9
P. Cires	27.7	53.4	9.5	36.7	56.8	6.6	38.59	57.72	7.7	13.7	81.6	1.9	15.06	81.47	2.1
Ceuta	25.0	52.6	5.5	29.3	48.2	0.9	28.22	57.30	4.8	11.1	73.1	0.6	11.12	82.21	1.3

Estación	K <sub>1</sub>						O <sub>1</sub>					
	TEJ98			IBER01			TEJ98			IBER01		
	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC
P. Gracia	3.4	39.6	2.2	2.41	32.67	2.6	3.4	282.8	2.0	2.42	273.97	1.5
Tarifa	1.8	92.7	1.6	1.68	115.88	1.1	1.3	266.1	1.7	0.91	209.15	1.0
P. Carnero	2.9	136.3	0.7	2.06	168.16	0.9	1.2	121.5	1.0	1.29	151.63	0.7
Algeciras	2.5	145.5	1.0	2.09	178.13	1.2	1.5	147.8	0.7	1.46	157.34	0.7
DN	2.8	56.6	1.2	2.88	70.22	0.7	2.5	286.8	1.0	2.11	294.01	0.6
DS	3.0	68.6	1.4	3.53	82.51	0.9	2.2	299.6	1.6	2.00	318.35	1.1
DP5	1.8	108.2	1.1	1.62	108.75	0.9	0.7	234.6	1.0	0.88	175.69	1.3
Kankoush	2.3	73.9	2.4	4.30	95.45	0.6	1.7	281.0	2.6	1.99	348.77	0.9
P. Cires	3.0	111.9	1.2	3.20	127.76	0.3	0.6	34.1	0.9	2.51	60.47	1.4
Ceuta	3.3	143.4	0.4	6.28	151.06	2.6	1.6	99.8	0.4	1.74	122.91	0.8

**TABLA 4.14:** Valores de la raíz cuadrada de la suma de los EMC (RSS, en cm), para los constituyentes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  y  $O_1$ , en las estaciones de la Tabla 4.13 situadas en la región del Estrecho de Gibraltar, en el caso de los modelos de Tejedor et al. (1998) e IBER01.

MODELO					
Estación	TEJ98 RSS (cm)	IBER01 RSS (cm)	Estación	TEJ98 RSS (cm)	IBER01 RSS (cm)
P. Gracia	9.97	3.7	DS	5.36	5.86
Tarifa	9.35	7.90	DP5	2.64	3.10
P. Carnero	3.61	2.39	Kankoush	6.34	8.97
Algeciras	5.10	2.38	P. Cires	7.03	8.11
DN	7.63	2.58	Ceuta	1.22	5.67

**TABLA 4.15:** Error medio cuadrático (EMC, en cm) del modelo IBER01 calculado para diferentes regiones del dominio del modelo, según la ecuación [4.10] y sobre la base de las estaciones listadas en las Tablas 4.9<sup>43</sup>, 4.11 y 4.13 ( $N$  denota el número total de estaciones).

Onda	IBER01 en la REGIÓN					
	Cantábrica		Atlántica		Estrecho	
	$N$	EMC (cm)	$N$	EMC (cm)	$N$	EMC (cm)
$M_2$	20	4.75	6	5.75	11	3.55
$S_2$	20	3.30	6	2.27	11	1.02
$K_1$	20	0.76	6	0.56	10	1.03
$O_1$	20	0.57	6	0.51	10	0.75

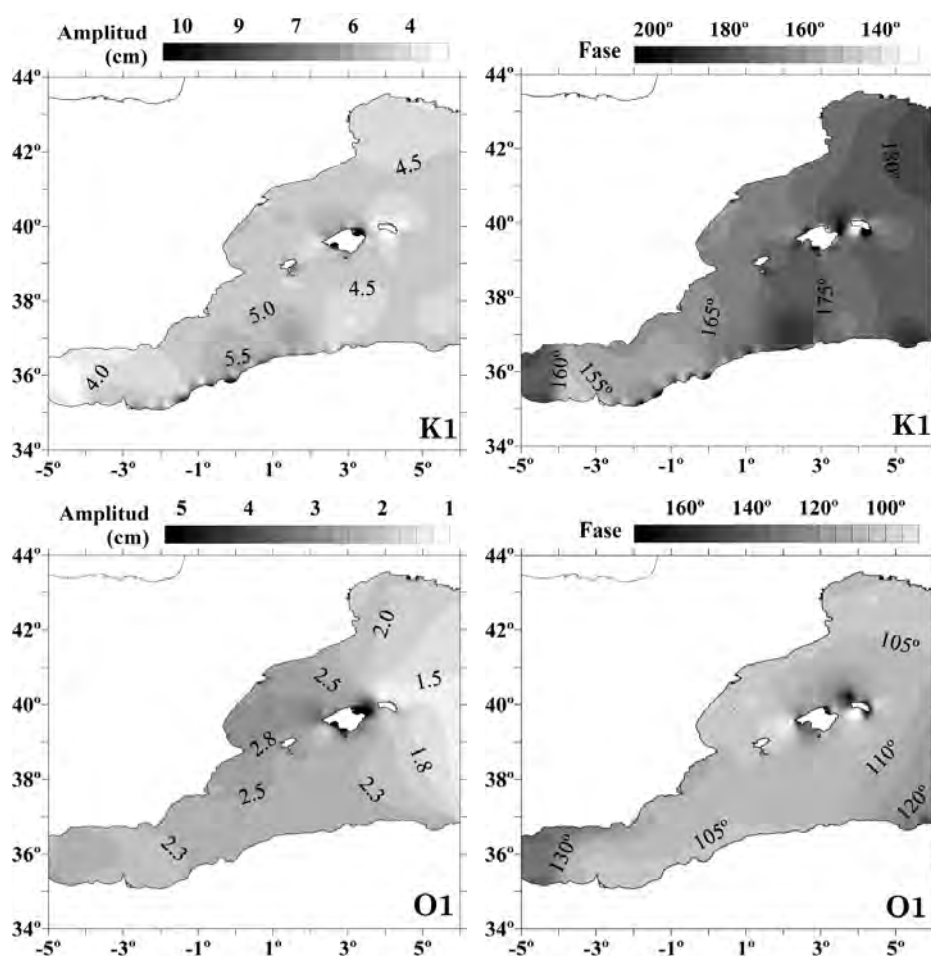
### c) Mar Mediterráneo

Por último, en la Cuenca Mediterránea Occidental, el valor de  $\sigma_\zeta$  varía desde unos 3 cm sobre la línea que une Alicante y Orán hasta un máximo de 24 cm en el Mar de Alborán. En esta zona, la elevación máxima de la marea oceánica,  $\zeta_{\max}$ , tiene un valor medio de unas 2,1 veces  $\sigma_\zeta$ . En las Figuras 4.32 y 4.33 se ha representado en modelo IBER01 restringido a la región mediterránea para los constituyentes armónicos diurnos y semi-diurnos, respectivamente. El patrón de propagación de las líneas de igual amplitud, en la banda de marea semi-diurna, se caracteriza por un decrecimiento de las amplitudes desde el Mar de Alborán hasta la línea que une Alicante y Orán (donde las amplitudes se aproximan a cero para todos los constituyentes en esta banda de marea), seguido de un incremento lento de las mismas en dirección noreste. Así, para el constituyente de marea dominante,  $M_2$ , las amplitudes máximas que se alcanzan en el Mar de Alborán son de unos 18 cm (8, 4 y 1,8 cm para las ondas  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ , respectivamente). La distribución espacial de las líneas de amplitud para el constituyente  $K_2$  difiere levemente de los restantes constituyentes semi-diurnos debido a su pequeña magnitud. A diferencia del resto del dominio de IBER01, en la región Mediterránea el patrón de propagación de las fases para estos constituyentes presenta más peculiaridades que en el caso diurno. Para las ondas  $M_2$  y  $N_2$ , se observa desde el Mar de Alborán hasta la plataforma ibicenca una rápida variación de fases en dirección noreste, aproximadamente  $180^\circ$  (en sentido contrario a las agujas del reloj) y con una convergencia de las líneas de fase frente a la costa alicantina, donde las amplitudes son casi cero. A partir de este punto de convergencia, la propagación de las fases, aun con

<sup>43</sup> La estación Coruña-2 ha sido reemplazada por Coruña-1.

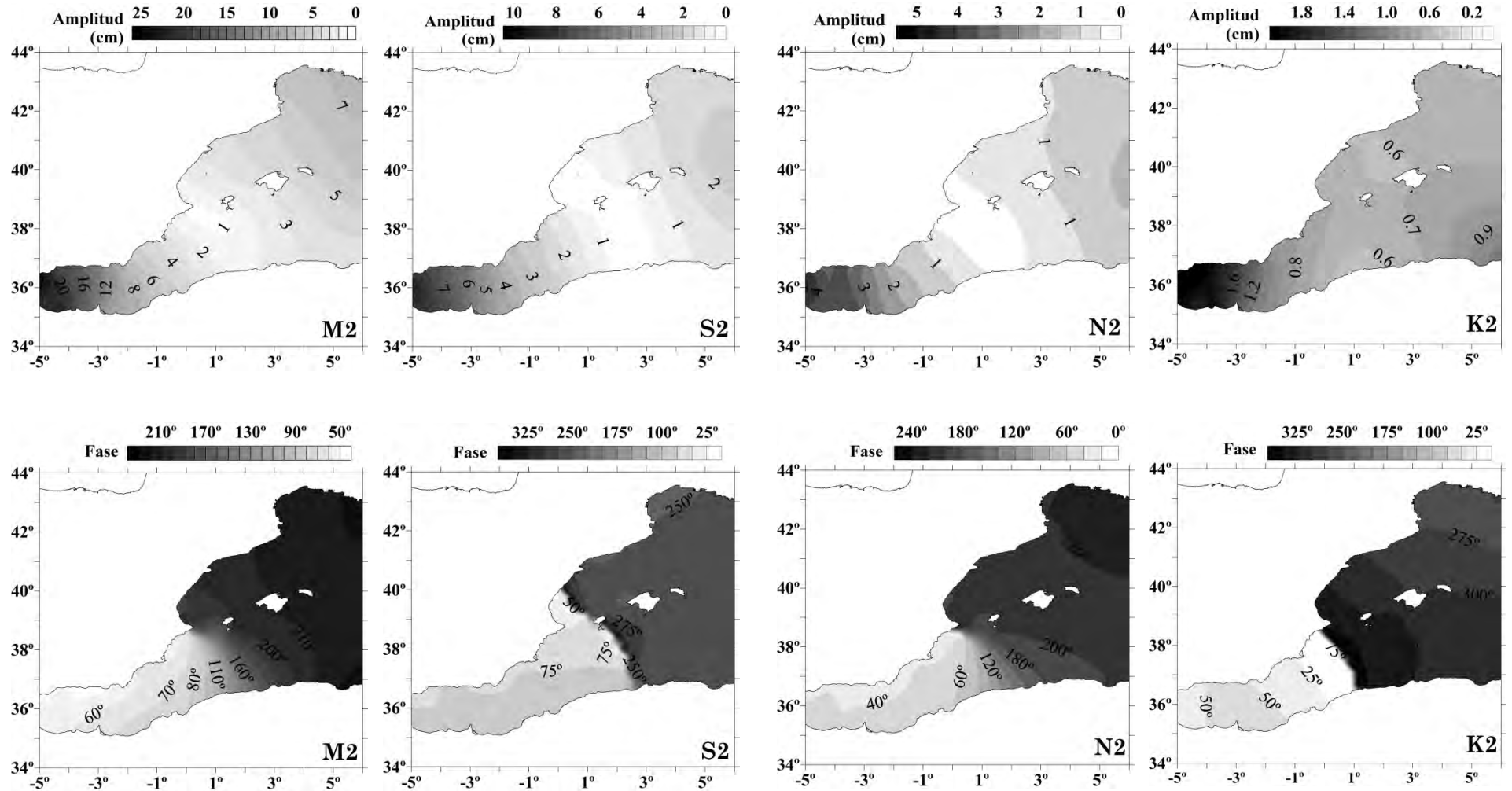
dirección noreste, decelera. La localización de este punto concuerda con Pérez et al. (2002), pero no con Tsimplis et al. (1995) (quienes lo sitúan en las proximidades de Almería) o Lozano y Candela (1995) (al sur de Valencia). Para las ondas  $S_2$  y  $K_2$  se observa para las fases una línea de divergencia, levemente desplazada al Norte para  $S_2$ . Para ambas ondas, las fases decrecen desde el Mar de Alborán hasta alcanzar, a lo largo de esta línea, valores de unos pocos grados, mientras que las fases provenientes de la Cuenca Mediterránea Oriental se incrementan en esta línea hasta alcanzar los  $325^\circ$ . En el caso de  $S_2$  el patrón de propagación de las amplitudes y fases confirma la presencia de una línea nodal Alicante-Orán. Destaca la concordancia de IBER01 con García et al. (2000) respecto al salto de fase entre Alicante y Valencia, y la existencia de una línea nodal Alicante-Orán. Por su parte, el patrón de propagación del modelo de de Toro et al. (1995) difiere tanto de IBER01 como del resto resultados en los trabajos citados anteriormente. Aunque la propagación de fases en este modelo se mantiene en dirección noreste y con magnitudes similares a IBER01, el modelo no reproduce puntos de convergencia o líneas nodales.

Finalmente, para los constituyentes de marea diurnos, la propagación de las amplitudes y fases es compleja, sin ningún patrón determinado. Destaca que las plataformas insulares del Archipiélago Balear constituyen el principal elemento perturbador de las mareas diurnas en la zona.



**FIGURA 4.32:** IBER01 restringido a la región del Mar de Alborán y Mar Mediterráneo, para  $K_1$  y  $O_1$ . Las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.





**FIGURA 4.33:** El modelo IBER01 restringido a los Mares de Alborán y Mediterráneo, para los constituyentes de marea semi-diurnos M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> y K<sub>2</sub>. Las amplitudes (arriba) están expresadas en cm y las fases (abajo), respecto de Greenwich, en grados. Obsérvese que las escalas de amplitud y fase son diferentes para cada constituyente de marea.

#### 4.6.3 Estadísticas de los Errores en el modelo IBER01

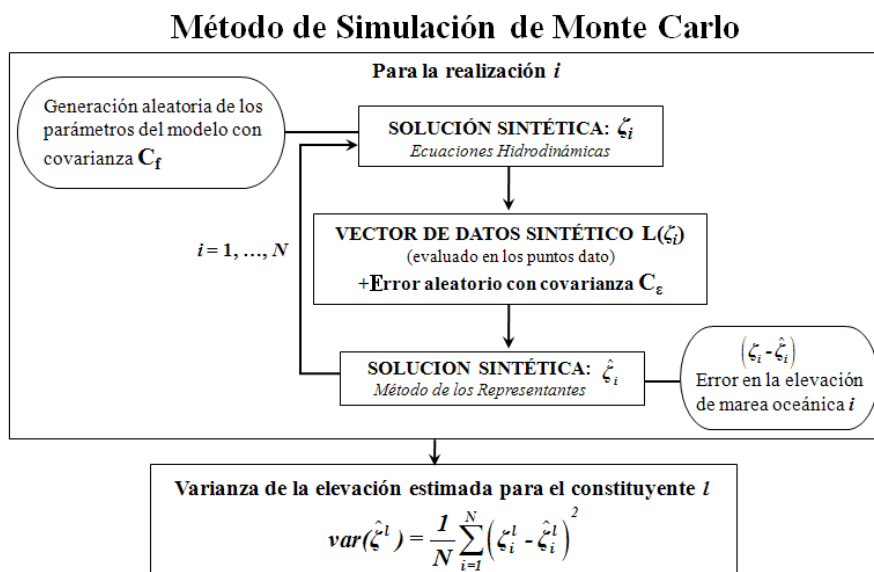
El método de simulación de Monte Carlo (Dushaw et al., 1997) permite realizar un estudio estadístico de los errores en el modelo IBER01. Dicho método se basa en la realización, para cada constituyente de marea, de sucesivas iteraciones del siguiente proceso de simulación (p. ej., Egbert y Erofeeva, 2002). Para una iteración  $i$  cualquiera del proceso:

- Se genera un modelo hidrodinámico sintético, que se denotará por *solución dinámica sintética* y se representa mediante  $\zeta_i$ . Esta solución se obtiene a partir de la resolución de las ecuaciones de aguas someras, en las que se introducen perturbaciones aleatorias en los parámetros del modelo, las cuales se consideran con la covarianza de error asumida a priori (Secc. 4.5.3).
- La solución dinámica sintética se evalúa en los puntos dato, de la forma  $L(\zeta_i)$ . A este vector se le incorporan errores aleatorios con la covarianza de error a priori en los datos (Secc. 4.5.3), lo que genera un *vector de datos sintético*,  $d_i$ .
- Los datos sintéticos resultantes se invierten, siguiendo la misma técnica de minimización sobre el ajuste de los datos y del modelo hidrodinámico descrita en la Sección 4.5.4. El resultado de esta inversión es la solución  $\hat{\zeta}_i$  (denominada *solución inversa sintética*).
- Después del proceso de inversión, la diferencia entre las soluciones sintéticas (dinámica e inversa), esto es  $(\zeta_i - \hat{\zeta}_i)$ , proporciona una estimación del error en el modelo IBER01.

Repetiendo el proceso un número  $N$  de iteraciones, se obtiene una serie  $i = 1, \dots, N$  de estimaciones del error en las elevaciones de marea, que se utiliza para calcular las estadísticas del error (varianzas y desviaciones estándar) en IBER01, mediante

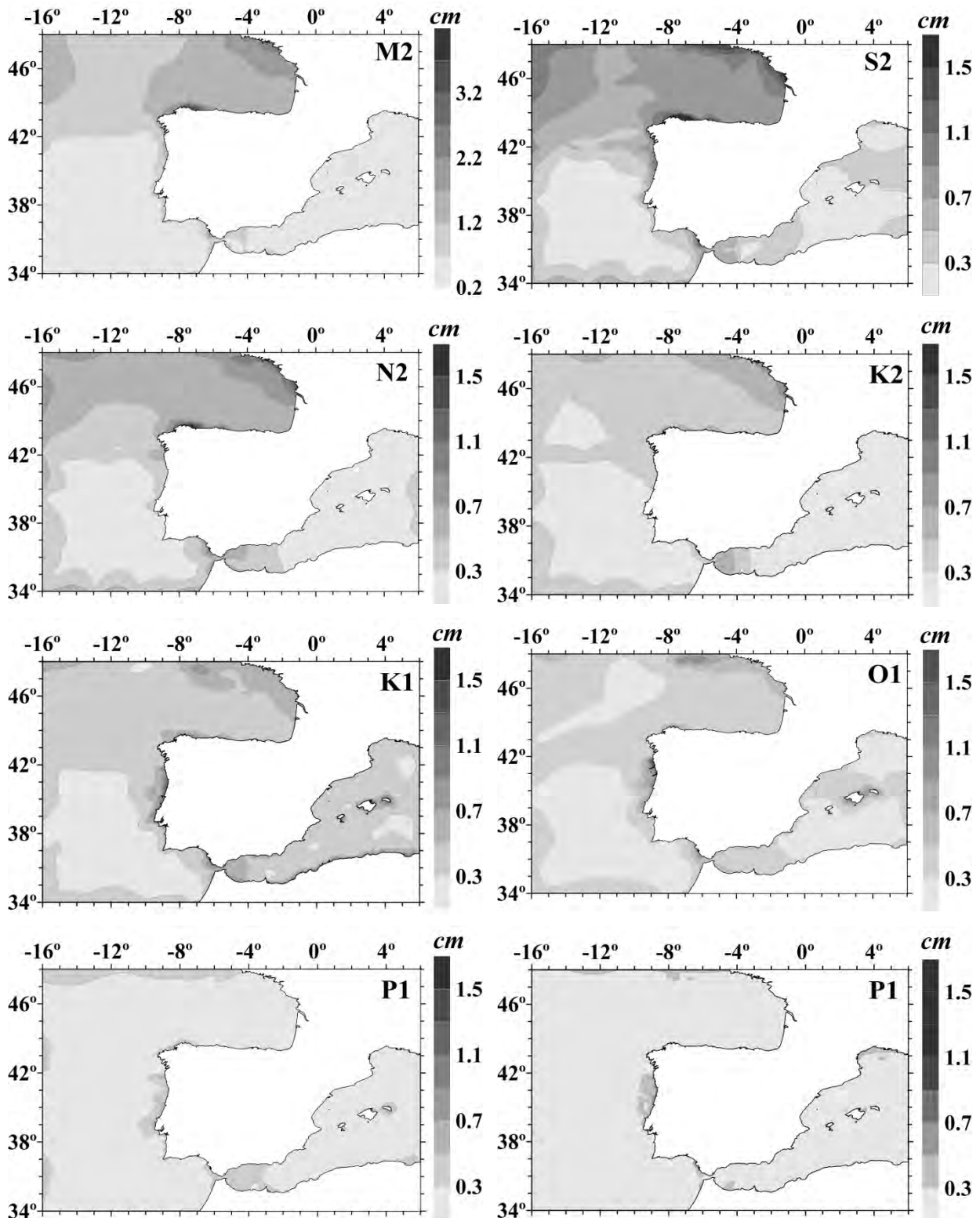
$$\text{varianza}(\hat{\zeta}^l) = \sum_{i=1}^N (\zeta_i^l - \hat{\zeta}_i^l)^2 / N \quad [4.11]$$

donde el superíndice  $l$  denota el constituyente de marea considerado. En la Figura 4.34 se ha representando esquemáticamente el proceso de simulación de Monte Carlo descrito.



**FIGURA 4.34:** Esquema del método de simulación de Monte Carlo para el cálculo de las estadísticas de error del modelo IBER01.

La Figura 4.35 muestra las respectivas desviaciones estándar para las principales ondas de marea. Los mayores valores en la desviación estándar se encuentran en áreas geográficas específicas: sobre la plataforma continental del Golfo de Vizcaya, en las proximidades a la costa de Galicia y en el Estrecho de Gibraltar. La desviación estándar de IBER01 alcanza hasta un 2% de la amplitud de marea en el Golfo de Vizcaya.



**FIGURA 4.35:** *Desviaciones estándar para los principales constituyentes de marea modelados por IBER01. Obsérvese que las escalas son diferentes para cada constituyente armónico.*

## 4.7 Conclusiones

En este Capítulo se ha elaborado un modelo de carga oceánica para la región circundante a la Península Ibérica, IBER01, con el objetivo principal de obtener un cálculo más exacto del EOI en la Península Ibérica y el norte de África. Así, IBER01 mejora los modelos de marea existentes en cuanto a su resolución (de  $5'\times 5'$ ), al número de constituyentes armónicos modelados ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ) y a la representación de la marea oceánica. Estas últimas mejoras provienen de la metodología empleada para su construcción. Previamente a la construcción de IBER01 se ha realizado un estudio preliminar, consistente en un análisis detallado de la zona objeto de estudio (Secc. 4.2) y una exposición de los trabajos previos relacionados con la marea oceánica en el entorno de la Península Ibérica (Secc. 4.3), con el fin de investigar sus limitaciones potencial susceptibles de ser mejoradas. La técnica de asimilación de datos utilizada conlleva la conjugación óptima de observaciones en un modelo hidrodinámico:

- En la Sección 4.4 se han recopilado y descrito las observaciones de marea oceánica asimiladas en el modelo: 88 estaciones mareográficas y 10 años de medidas del satélite T/P.
- En la Sección 4.5 se ha descrito propiamente la construcción del modelo IBER01 (Fig. 4.20 y 4.21).

Del análisis de los resultados y de la validación de IBER01 (Secc. 4.6) se concluye:

- La comparación de IBER01 con modelos globales muestra que las máximas discrepancias se producen en zonas batimétricas complejas o de gran variabilidad oceánica. La magnitud de las diferencias varía para cada modelo global dependiendo, fundamentalmente, de su resolución. Para el constituyente armónico  $M_2$ , las diferencias medias en el océano abierto son del orden de 1 cm. Para esta misma onda, sobre la plataforma continental francesa las diferencias en amplitud pueden superar los 10 cm y en el Estrecho de Gibraltar incluso más de 30 cm.
- El estudio detallado de las zonas más complejas (plataforma cantábrica, Estrecho de Gibraltar y la región Mediterránea), basado en la comparación de IBER01 y otros modelos locales (muy específicos y de gran resolución) con datos *in-situ*, pone de manifiesto la mejor concordancia (en general) de IBER01 con las observaciones. Se detectan, esencialmente, dos zonas que deben ser estudiadas en trabajos futuros, puesto que la resolución de IBER01 no permite reproducir con exactitud variaciones de marea especialmente singulares que se producen: Por una parte, la localización precisa del anfídromo diurno en el Estrecho de Gibraltar y, por otra parte, el estudio del punto de convergencia y la línea nodal detectadas en la región Mediterránea para las ondas semi-diurnas.
- A partir del estudio estadístico de los errores en el modelo IBER01, basado en el método de simulación de Monte Carlo (Fig. 4.35), las desviaciones estándar obtenidas para  $M_2$  en la mayor parte del dominio son inferiores a 1 cm. Excepcionalmente, se producen desviaciones estándar más altas en la cornisa cantábrica (de un 2% de la amplitud de la marea en el Golfo de Vizcaya).

Para los trabajos llevados a cabo en este Capítulo, se han desarrollado una serie de programas escritos en FORTRAN90, que comprenden:

- El diseño de la cuadrícula oceánica, que engloba: la determinación de las profundidades batimetría y las máscaras tierra/agua (*make\_Grid.f90*), la determinación de las fronteras abiertas (*make\_FA.f90*) y de las condiciones establecidas mediante la interpolación bilineal a partir de un modelo global (*interpol\_CFA.f90*).
- Sobre una cuadrícula pre-establecida, el promediado de batimetrías y filtros de suavizado (*average\_Batym.f90*, *filter\_Gauss.f90*, *filter\_Blackman.f90*), la interpolación de modelos oceánicos o batimétricas (*interpol\_Grid.f90*), la comparación entre modelos oceánicos o batimetrías (*differences\_Grid.f90*).
- El formato de archivos de datos para su adaptación al programa VAV (*xx\_VAV.f90*, siendo *xx* el tipo de formato original).
- El formato de archivos de modelos globales a ASCII (*xx\_ASCII.f90*, siendo *xx* el tipo de formato original, p.ej., el estándar binario NETCDF).
- La extracción de las constantes de marea en un punto de un modelo seleccionado y su comparación con observaciones (*interpol\_diff.f90*).

## Capítulo 5

# Modelo de Carga Oceánica de Marea para la Región de las Islas Canarias

*En este Capítulo se describe el diseño y desarrollo del modelo de marea oceánica para el entorno del Archipiélago Canario, denominado CIAM2. Las Secciones, 5.1 a 5.3, se dedican a la presentación de los objetivos, la descripción de la zona de estudio y del régimen de marea oceánica en la misma. En la Sección 5.4 se reseña el conjunto de datos observados, mareográficos y de altimetría por satélite, que se han seleccionado para su asimilación en el modelo y, además, se exponen los métodos de análisis de las series temporales utilizados para la obtención de las constantes armónicas de marea. En la Sección 5.5 se detalla el proceso de elaboración del modelo CIAM2: Se describe la construcción del modelo hidrodinámico y la asimilación en este último de los datos observados, siguiendo el “método de los representantes”. La descripción de los resultados obtenidos, esto es, el modelo de marea oceánica CIAM2 y su validación se realiza en la Sección 5.6. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 5.7.*

### 5.1 Introducción

El objetivo principal de este Capítulo es la construcción de un modelo de marea oceánica para el entorno del Archipiélago Canario, que se denominará CIAM2. Al igual que en el caso del modelo desarrollado para el entorno de la Península Ibérica, IBER01, presentado en el Capítulo anterior, la finalidad de CIAM2 es su adopción y explotación para el cálculo preciso del efecto oceánico indirecto en la región de Canarias. Su construcción se basa, fundamentalmente, en la misma metodología empleada para la elaboración de IBER01, es decir, en la asimilación de observaciones mareográficas y de altimetría por satélite en un modelo hidrodinámico siguiendo el *método de los representantes*. En este caso, se han introducido diversas modificaciones en la construcción del modelo hidrodinámico a priori, que resultan adecuadas para esta nueva zona de estudio y que consisten, fundamentalmente, en la resolución de las ecuaciones linealizadas de aguas poco profundas, en el dominio de la frecuencia, siguiendo la denominada *aproximación de factorización directa* (Egbert y Erofeeva, 2002).

Nuevamente, el interés de elaborar un modelo de marea oceánica de alta resolución para la región de las Islas Canarias surge de la necesidad de calcular el EOI que afecta a las observaciones geodésicas y gravimétricas de precisión. En el caso particular de las Islas Canarias, por sus características singulares (localización geográfica, origen volcánico, etc.), dichos estudios geodésicos y gravimétricos cobran una gran relevancia. Desde hace varias décadas se están llevando a cabo, en

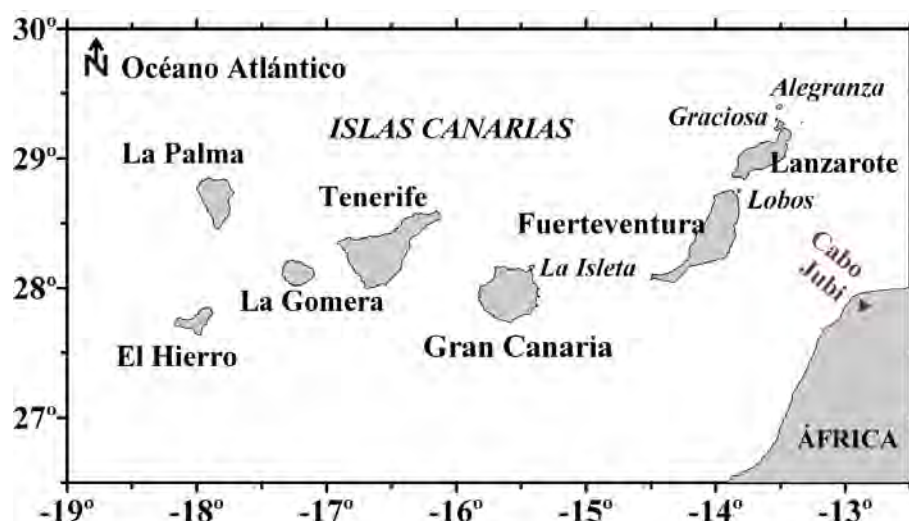
las diferentes islas que conforman el archipiélago, numerosas investigaciones geodésicas con fines tales como el control de deformaciones, la vigilancia de peligros volcánicos o el estudio de las variaciones del nivel del mar. Por ejemplo, en la isla de Lanzarote, donde se ubica el Laboratorio de Geodinámica de Lanzarote (Vieira et al., 1991), se encuentran operando continuamente un gran número de instrumentos geodésicos de precisión (gravímetros, clinómetros, extensómetros, GPS, etc.). Todas estas observaciones están afectadas por el EOI y deben, por tanto, corregirse de este efecto para que puedan complementar con mayor exactitud a otras técnicas geodésicas y, asimismo, se empleen con rigor en las investigaciones geodésicas, geofísicas y geodinámicas llevadas a cabo en la isla. En esta zona el EOI alcanza amplitudes muy grandes y, para su determinación, se requiere una determinación precisa de la marea oceánica circundante. Considérese, como ejemplo, el constituyente de marea  $M_2$  para el que el EOI origina variaciones de gravedad que superan los 10  $\mu\text{Gal}$  en el interior de la isla de El Hierro. Para este mismo constituyente, la amplitud de la marea gravimétrica observada se encuentra en torno a los 58  $\mu\text{Gal}$  (Arnosó et al., 2009), lo que supone que el EOI contribuye hasta un 17% en dicho valor. Destaca en esta región, además, la gran influencia de la delimitación de la geometría costera sobre el EOI calculado. Por ejemplo, en la isla de El Hierro las imprecisiones en la representación de las líneas de costa procedentes de *Generic Mapping Tools* (GMT; Wessel y Smith, 1996), y que son las más frecuentemente utilizadas por la comunidad científica para este tipo de cálculos, afectan hasta un 50% el valor del EOI calculado<sup>1</sup>. Por tanto, estos hechos hacen imprescindible la elaboración de un modelo preciso de carga oceánica para el entorno de las Islas Canarias, basado en una buena representación de las líneas de costa.

En las Secciones 5.2 y 5.3 se describen la región objeto de estudio, los patrones generales de propagación de la marea oceánica en la misma y, finalmente, se realiza una revisión de los trabajos previos existentes en relación con la modelización de la marea oceánica en el Archipiélago Canario. En la Sección 5.4 se detallan las observaciones de marea oceánica, procedentes de mareógrafos costeros y de altimetría por satélite, consideradas en el proceso de asimilación de datos. Para ambos tipos de datos, se describe el procesado y análisis de las series temporales para la obtención de los correspondientes armónicos de marea. La Sección 5.5 se dedica a la descripción del procedimiento de modelización de CIAM2, prestando una atención especial a las modificaciones introducidas para la construcción del modelo hidrodinámico a priori. En la Sección 5.6 se analizan y validan los resultados obtenidos para los ocho constituyentes armónicos principales, 4 semi-diurnos ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ ) y 4 diurnos ( $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $K_1$ ). Finalmente, las conclusiones extraídas se resumen en la Sección 5.7.

---

<sup>1</sup> Este resultado se presenta en el Capítulo 6.

## 5.2 Descripción de la Zona de Estudio



**FIGURA 5.1:** Área geográfica cubierta por el modelo de marea oceánica CIAM2.

### 5.2.1 Dominio del Modelo

El dominio del modelo CIAM2 se encuentra delimitado por los paralelos 26,5° N y 30° N y los meridianos 19° O y 12,5° O, que incluyen el Archipiélago Canario y la costa noroeste de África (Fig. 5.1). El archipiélago se localiza en la zona oriental del Océano Atlántico, al oeste del margen occidental africano, y se extiende 200 km en dirección NS y unos 500 km en dirección EO. Consta de siete islas principales, localizadas a una latitud próxima a 28° N y son, de oeste a este: El Hierro, La Palma, La Gomera, Tenerife, Gran Canaria, Fuerteventura y Lanzarote.

**TABLA 5.1:** Límites del dominio del modelo CIAM2 para el entorno de las Islas Canarias.

Dominio del Modelo Oceánico del Archipiélago Canario		
	MÍNIMA	MÁXIMA
<b>LATITUD</b>	26,5° N	30° N
<b>LONGITUD</b>	19° O	12,5° O

### 5.2.2 Ámbito Geográfico y Descripción General del Régimen de Marea

Las islas más occidentales del Archipiélago Canario son El Hierro y La Palma. La primera de ellas se caracteriza por ser la de menor tamaño, aproximadamente 278 km<sup>2</sup>, y presentar una morfología triangular. La Palma, con una superficie de 708 km<sup>2</sup>, tiene una forma alargada que se extiende en dirección NS. En el centro del archipiélago se encuentran la isla de Tenerife, que está franqueada al oeste por La Gomera y al este por Gran Canaria. Tenerife se caracteriza por ser la isla de mayor extensión, con unos 2.014 km<sup>2</sup>, mientras que las islas de La Gomera y Gran Canaria lo hacen por sus morfologías casi circulares. La superficie de La Gomera es de tan solo 372 km<sup>2</sup>, mientras que Gran Canaria tiene 1.560 km<sup>2</sup>. Esta última se encuentra a una distancia aproximada de 100 km de cada una de las islas que la franquea, Tenerife y Fuerteventura. Por último, Fuerteventura y Lanzarote son las dos islas más orientales del archipiélago. Ambas islas forman parte de la Dorsal



Canaria, cuyo trazado se extiende en dirección NE-SO, aproximadamente paralelo a la línea de costa africana. Estas dos islas comparten la misma la misma plataforma insular sobre una corteza terrestre de tipo oceánica, aunque algo más gruesa de lo normal. Fuerteventura es la isla situada más próxima al margen noroeste del continente africano (a sólo 100 km de la costa de Marruecos) y tiene una superficie de 1.660 km<sup>2</sup>. Al norte de esta isla se encuentra el islote de Lobos. Lanzarote, a su vez, ocupa la posición más oriental de las Islas Canarias y está a una distancia de unos 125 km de la costa marroquí. La isla se extiende, en forma alargada, en dirección NE-SO con una longitud aproximada de 60 km. Su superficie abarca unos 846 km<sup>2</sup>, incluidos los islotes situados al norte de la isla: La Graciosa, Montaña Clara, Alegranza, Roque del Este y Roque del Oeste (Llanes, 2006).

La batimetría en la región del Archipiélago Canario es muy abrupta (Fig. 5.2). Sus plataformas insulares son muy estrechas y las islas, por lo general, están separadas entre sí por canales profundos. Estas características hacen que, incluso en las proximidades de sus costas, se produzcan condiciones muy similares al océano abierto. Las Islas Canarias emergen en el Océano Atlántico oriental sobre un fondo oceánico que se encuentra a una profundidad de unos 4.000 m, en los flancos norte y sur de las islas occidentales, en torno a las que se producen los mayores gradientes batimétricos. A lo largo del archipiélago, las profundidades decrecen en dirección a la costa africana, hasta alcanzar unos 3.000 m, aproximadamente, al este de Lanzarote y Fuerteventura. En el centro del archipiélago, la isla de Gran Canaria presenta una plataforma insular independiente muy estrecha, salvo un leve ensanchamiento en la parte sureste de la misma (entre Maspalomas y Arinaga). En su talud la profundidad aumenta rápidamente hasta alcanzar 2.000-3.000 m (Martínez et al., 1997). Al este de esta isla, se encuentra una de las características topográficas más reseñables de la región, la presencia al sur de Fuerteventura de dos bancos submarinos, Amanay y El Banquete (Fig. 5.2). Ambos bancos, separados por un canal de más de 1.000 m de profundidad, tienen características similares: un diámetro en su base de unos 28-29 km y su altura que excede los 2.000 m (Ancoechea y Huertas, 2003). Destaca, además, que El Banquete está conectado al extremo sur de la isla de Fuerteventura por una plataforma plana y poco profunda. Asimismo, la franja de agua que separa las islas de Fuerteventura y Lanzarote, denominado Estrecho de Bocaina, se caracteriza por alcanzar una profundidad máxima de 40 m. Otra característica topográfica importante, situada al norte de las islas sobre la frontera noreste del dominio del modelo, es el banco de Concepción (Fig. 5.2). Este banco, que se eleva desde los 2.000 m hasta los 160 m por debajo del nivel del mar, sigue la alineación de las islas de Fuerteventura y Lanzarote y supone, de hecho, la extensión marina de las mismas (Dañobeitia y Collette, 1989). Por último, y aunque se encuentran en el exterior del dominio del modelo, hay que mencionar las islas Salvajes (situadas a 30° N y 16° O, aproximadamente). Estas islas, aunque geológicamente se atribuyen al Archipiélago Canario, se consideran estructuras aisladas ya que no están conectadas con la Dorsal Canaria (Dañobeitia, 1987; Dañobeitia y Collette, 1989).

Finalmente, por su importancia en el cálculo del EOI, cabe remarcar el carácter oceánico de la corteza terrestre en todas las Islas Canarias, aunque en su estructura presenten diferencias

importantes. Este hecho ha sido confirmado, no sin mucha controversia, a partir de estudios de sismica de refracción y reflexión, en diversos trabajos (p. ej., Banda et al., 1981, Ye et al., 1999).

La particular localización geográfica de las Islas Canarias, situadas entre la plataforma continental africana y el océano abierto, conlleva que la región esté sujeta a influencias de distinta naturaleza (morfográficas, medioambientales, etc.) que generan, a su vez, características oceanográficas singulares. Estas características afectan al patrón de propagación de las componentes horizontales de la marea oceánica (esto es, las corrientes de marea) y, como consecuencia, también a su elevación. Por tanto, resulta conveniente exponer aquí, aunque brevemente, algunas particularidades relevantes. El Archipiélago Canario se encuentra en la zona de unión entre las aguas del océano abierto, al este del Giro Subtropical del Atlántico Norte<sup>2</sup> y el afloramiento<sup>3</sup> de la plataforma continental de la región noreste africana, de tal forma que las islas representan un obstáculo directo al flujo oceánico dominante en la región, la Corriente de Canarias<sup>4</sup> (ya que alteran la velocidad de la masa de agua en movimiento). Además, debido a su altitud<sup>5</sup>, constituyen una barrera para el paso continuo del flujo atmosférico. El efecto indirecto del viento sobre la superficie del mar produce remolinos y estelas de agua cálida a sotavento de las islas, modificando el campo de vientos alisios procedentes del NE. Además, la interacción de los vientos alisios y de la Corriente de Canarias con las islas del archipiélago origina, entre otros fenómenos locales, la aceleración del flujo de agua en los canales interinsulares. Por otro lado, las islas más orientales están afectadas por las aguas del afloramiento africano, que extienden su influencia hacia el archipiélago, en forma de filamentos de agua fría de varios cientos de kilómetros de longitud. Por el contrario, al norte de Cabo Jubi (Fig. 2) la línea costera presenta una prominente forma cóncava que, junto con la morfología de su fondo oceánico, hace que el afloramiento de esta región sea más reducido. Como han demostrado numerosos estudios recientes (Aristegui et al., 1994; Barton et al., 2004), la variabilidad de los flujos oceánicos, que ocurren en un rango muy amplio de escalas espaciales y temporales, junto con las irregularidades de la geografía costera y la interacción entre las aguas oceánicas y costeras sobre la plataforma continental africana e insular canaria, generan en esta zona un conjunto muy amplio de estructuras temporales de naturaleza espacial mesoescalar (eddies), principalmente remolinos.

En la zona del Archipiélago Canario el régimen de marea oceánica es predominantemente semi-diurno. Las amplitudes se incrementan en dirección noreste y las fases se propagan de sur a norte. Así, para el constituyente dominante  $M_2$ , el rango de amplitudes se encuentra entre,

---

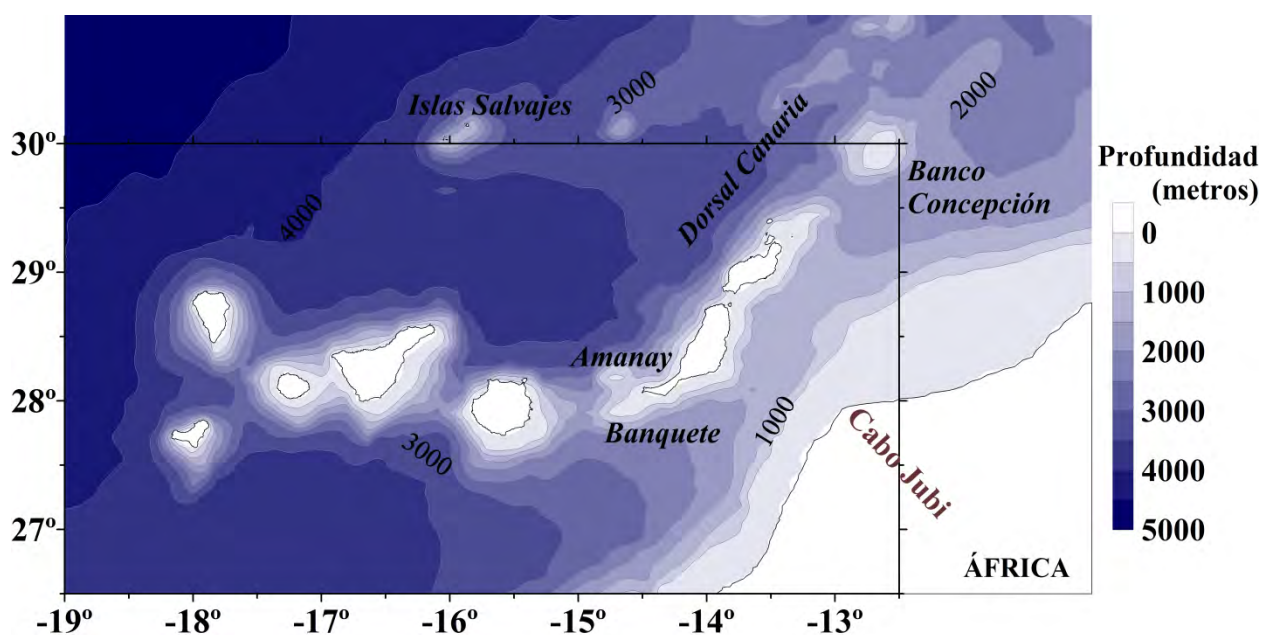
<sup>2</sup> Se denomina *Giro Subtropical del Atlántico Norte* al conjunto de corrientes superficiales en las cuencas oceánicas tropicales (15° N – 40° N), que giran en sentido horario y están relacionadas con los vientos dominantes en la zona.

<sup>3</sup> Se denomina *afloramiento* al desplazamiento vertical de las aguas profundas, más frías y densas, hacia la superficie oceánica. Diversos factores que actúan conjuntamente originan el afloramiento de las aguas, entre ellos la acción del viento y la topografía costera.

<sup>4</sup> Se conoce como *Corriente de Canarias*, la corriente superficial que fluye en dirección hacia el sur, asociada con el afloramiento costero causado en esta zona por los vientos alisios procedentes del NE (Mittelstaedt, 1991).

<sup>5</sup> La mayor altitud del archipiélago se alcanza en la isla de Tenerife, exactamente en el Pico del Teide, con 3.718 m. Por orden decreciente, las alturas máximas que se alcanzan en el resto de islas son de: 2.426 m en el Roque de los Muchachos (La Palma), 1.949 m en el Pico de las Nieves (Gran Canaria), 1.501 m en la zona central de Malpaso (El Hierro), 1.487 m en Alto Garajonay (La Gomera), 807 m en Jandía (Fuerteventura) y 671 m en Peñas del Chache (Lanzarote).

aproximadamente, 60 cm al oeste de las islas occidentales y 85 cm al noreste de Lanzarote. Por otra parte, las ondas diurnas exhiben un patrón similar a las semi-diurnas, con amplitudes que se incrementan en dirección a la costa africana y fases que se propagan en dirección Sur-Norte. Estos patrones generales en esta región están alterados, localmente, por la presencia de las islas. Algunos autores (p. ej. Larsen, 1977) apuntan a que este hecho podría estar provocado por la difracción de las ondas de marea en las islas, que origina variaciones locales significativas en la marea oceánica. Por esta razón, para la modelización de la marea oceánica en regiones como el Archipiélago Canario, es de gran importancia disponer de información sobre las mareas, tanto en el océano abierto como sobre las plataformas insulares (p. ej., Parke y Hendershoot, 1980; Hendershoot, 1981).



**FIGURA 5.2:** Mapa batimétrico del dominio del modelo CIAM2, obtenido a partir del banco de datos ETOPO2 (Smith y Sandwell, 1997). Se indican las características topográficas más reseñables y las isobatas cada 500 m. El mapa se extiende fuera de los límites del dominio del modelo (hacia el norte y este) para representar los accidentes topográficos fronterizos con éste citados en el texto.

### 5.3 Estudios Previos en la Región

Exceptuando los modelos globales de marea oceánica (Cap. 3, Secc. 3.3.3), no existe en la literatura un gran número de trabajos dedicados al estudio de la marea oceánica, y adecuados para el cálculo de EOI, en la región de las Islas Canarias. Aunque su dominio abarca una gran extensión fuera de los límites de la zona objeto de estudio en este Capítulo, por la metodología de cálculo y los datos observados considerados, el modelo elaborado por de Toro (1989), denominado IBERIA, puede considerarse como pionero en la región (Secc. 4.3, Cap. 4). Este modelo, de tipo empírico, se basa en observaciones procedentes de mareógrafos (un total de 16 en la región canaria) y la imposición del modelo hidrodinámico de Schwiderski (1980) (SCH80) como condiciones de frontera sobre los límites del dominio. Su resolución varía de  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  hasta  $0,0625^\circ \times 0,0625^\circ$  y se presenta

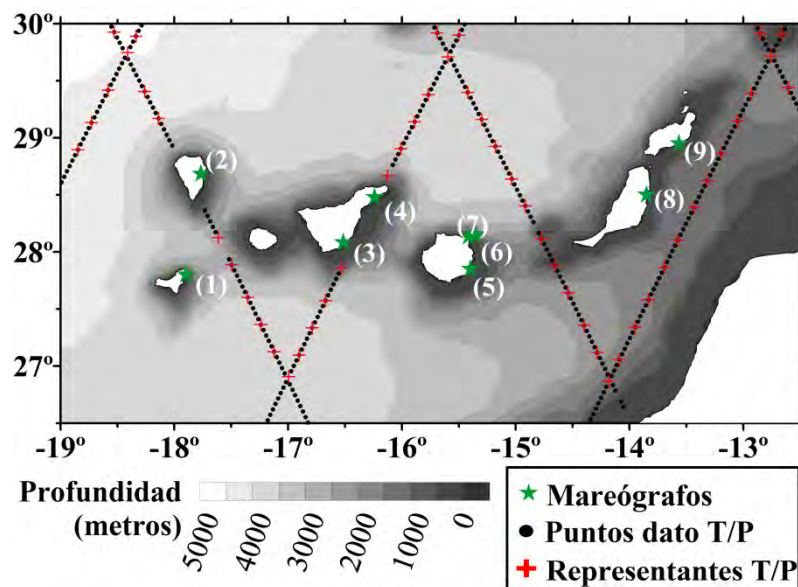
para los armónicos de marea  $M_2$ ,  $S_2$  y  $N_2$ . Posteriormente, Arnoso (1996) y Arnoso et al. (2001; 2001b) construyen, expresamente para la región canaria, un modelo basado en la interpolación de SCH80 en las celdas de una cuadrícula oceánica de tamaños que comprenden desde 5'×5', 43"×43" hasta 9"×9" en las proximidades de las líneas de costa. En este modelo, elaborado para 9 armónicos de marea ( $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$  y  $M_f$ ), se imponen como condiciones de contorno los valores de marea oceánica procedentes de 15 mareógrafos, y los proporcionados por de Toro (1989) para las ondas  $N_2$ ,  $M_2$  y  $S_2$ , distribuidos sobre las costas de las diferentes islas que conforman el archipiélago. A su vez, este modelo regional se complementa con un modelo local de mayor resolución, denominado CLML, que cubre la parte noreste de la isla de Lanzarote. En este caso, CLML se presenta sobre una cuadrícula compuesta de 121 celdas de tamaños que varían entre 56"×56", 28"×28" y 14"×14". De éstas, 56 celdas se encuentran situadas sobre tierra, en el área del malpaís de La Corona, hasta el límite de la línea de costa previa a la erupción del volcán La Corona. En las celdas establecidas como agua en CLML en esta zona de tierra, que se caracteriza por una gran porosidad de su estructura rocosa, se asignan diferentes valores de la densidad del agua para ajustar, de esta forma, el porcentaje de agua en la misma. El modelo CLML se presenta en dos versiones: La primera de ellas, denotada por CLML<sub>m1</sub>, se construyó sobre la base de los resultados proporcionados por 4 mareógrafos, pertenecientes al IAG (CSIC-UCM), situados en la zona. Tres de estos mareógrafos se ubican en los lagos naturales formados en el interior del túnel de lava del volcán de La Corona. La segunda versión, CLML<sub>m3</sub>, se obtuvo mediante interpolación del modelo original desarrollado por los autores para la región de Canarias. Finalmente, cabe mencionar el modelo hidrodinámico 3D desarrollado por Fanjul et al. (1997, 1998), descrito en la Sección 4.3.1 (Cap. 4). Este modelo incluye el Archipiélago Canario, aunque su extensión total es mucho mayor. Destaca en su construcción la utilización de la batimetría ETOPO5 (ETOPO5, 1988) que, como señalan los propios autores, no es adecuada para la región de Canarias. Esto se debe, por una parte, a que la resolución de 5' no es suficiente para reproducir la geometría costera de las islas y que, de hecho, dos de ellas no están representadas. Por otra parte, esta batimetría contiene numerosos errores groseros, además de un desplazamiento de unos 5' en la dirección longitudinal en la región Canaria (p. ej. Montesinos, 2002). Entre los resultados obtenidos por Fanjul et al. (1997, 1998) es importante señalar las grandes discrepancias existentes (que superan los 10 cm), en comparación con observaciones mareográficas, en las proximidades a las islas de Gran Canaria y Tenerife. Esto se debe, según los autores, a que la resolución del modelo elaborado por Fanjul et al. (1997), de 10' en latitud y 15' en longitud, no es suficiente para representar con exactitud la variabilidad de la marea oceánica existente en torno a estas dos islas.

Por otra parte, en el marco de los trabajos llevados a cabo para esta memoria y, como primer experimento en la modelización de la marea oceánica en la región Canaria a partir de la asimilación de datos en un modelo hidrodinámico, se elaboró una versión preliminar del modelo presentado en

esta memoria. La metodología empleada para la construcción de ambas versiones, CIAM1<sup>6</sup> y CIAM2, es la misma y los resultados obtenidos con la versión preliminar han sido utilizados como herramienta de perfeccionamiento para la obtención de CIAM2.

## 5.4 Datos Asimilados en el Modelo CIAM2

Los datos disponibles y seleccionados para asimilar en el modelo CIAM2 consisten en observaciones realizadas in-situ con mareógrafos costeros y mediante altimetría por satélite.



**FIGURA 5.3:** Observaciones mareográficas asimiladas en el modelo CIAM2 (Tabla 5 en Apéndice 2). Se indican las trayectorias del T/P, cuyos datos se han asimilado en el modelo CIAM2. Las cruces rojas señalan los datos T/P usados como representantes (puntos cruzados más cinco puntos dato a lo largo de las trayectorias).

### 5.4.1 Observaciones Mareográficas Costeras. Descripción de los Datos y Análisis de las Series Temporales

Las observaciones mareográficas comprenden datos procedentes de un total de nueve mareógrafos costeros, situados en seis de las siete islas que constituyen el archipiélago. La Figura 5.3 muestra la localización de estos mareógrafos, cuyas coordenadas geográficas se listan en la Tabla 5 (Apéndice 2). En lo que sigue, las observaciones se denotan por el número asignado a cada estación en dicha Tabla. Las series de datos y/o las constates armónicas han sido facilitadas por los correspondientes organismos responsables que son, en este caso, la **RED de MAREógrafos de Puertos del Estado (REDMAR)** y el **Instituto Español de Oceanografía (IEO)** (Secc. 4.4.1.1, Cap. 4). Más concretamente, la información recopilada para esta zona de estudio comprende:

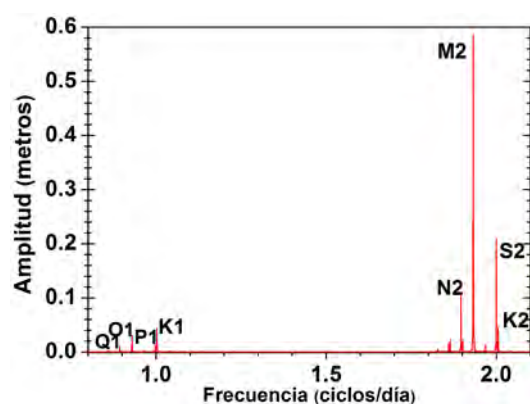
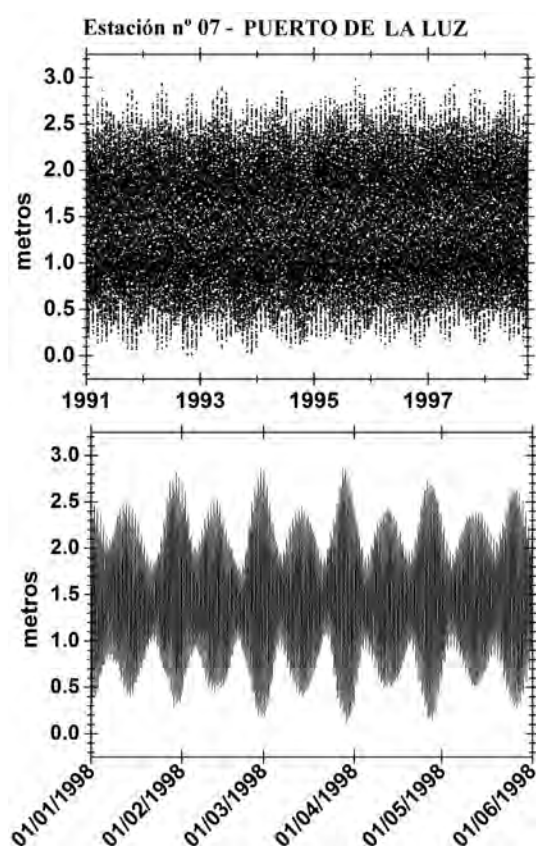
- Las constantes armónicas facilitadas por REDMAR, publicadas en los informes anuales que edita Puertos del Estado (PE). Los datos de aquí extraídos corresponden a las estaciones mareográficas números 1, 3, 4, 5, 6 y 8. El método seguido por PE para la obtención de las constantes armónicas es el análisis armónico de las series temporales, basado en el algoritmo

<sup>6</sup> Los resultados han sido publicados en: J. Arnos, M. Benavent, B. Ducarme y F. G. Montesinos, 2006. A new ocean tide loading model in the Canary Islands region. *Journal of Geodynamics*, Vol. 41, pp. 100-111.

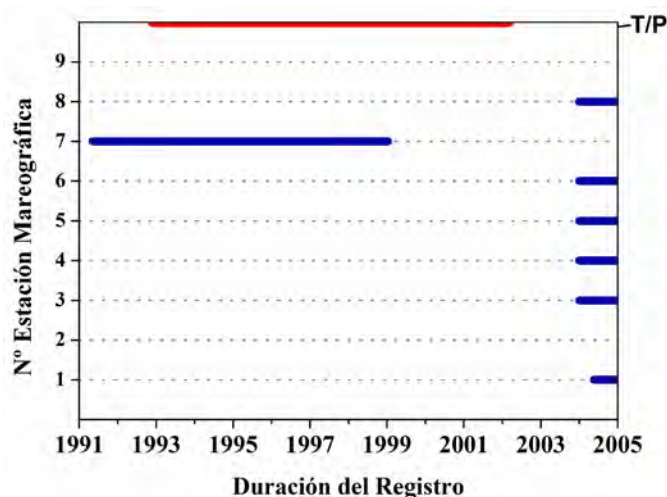
desarrollado por Foreman (1977), previo control de calidad y filtrado de los datos, según se describió en la Sección 4.4.1.4 (Cap. 4).

- Las constantes armónicas recopiladas por el IEO en sus informes técnicos. En este caso, los datos considerados corresponden a las estaciones números 2 y 9. En la estación número 7, Puerto de la Luz, se ha dispuesto de una serie de datos observados, con una longitud de 9 años (Fig. 5.4). El análisis de la serie temporal se ha realizado con el programa VAV (Venedikov et al., 2005; 2003), basado en el método de análisis armónico por mínimos cuadrados.

En la Tabla 6 (Apéndice 2) se resume, para todas las estaciones, el periodo de tiempo considerado en el análisis de las series temporales (Fig. 5.5) y la metodología empleada para la obtención de las constantes armónicas. Los respectivos valores de amplitud y fase de marea de los principales constituyentes armónicos semi-diurnos y diurnos se recopilan en la Tabla 3 (Apéndice 2).



**FIGURA 5.4:** (Izda.) Observaciones mareográficas en la estación Puerto de la Luz para un periodo de 9 años de (arriba.) y de 6 meses (abajo). (Dcha.) Espectro de amplitudes (ciclos diurnos y semi-diurnos) de la serie temporal en Puerto de la Luz.



**FIGURA 5.5:** Periodo de registro de las observaciones mareográficas (azul). En el eje de ordenadas se representan cada una de las 9 estaciones identificadas por el número asignado en la Tabla 5 (Apéndice 2). Para su comparación, se ha representado el periodo de tiempo correspondiente a las observaciones procedentes del satélite altimétrico T/P (roja).



### 5.4.2 Observaciones Altimétricas por Satélite

Las medidas de altimetría por satélite que se han considerado para su asimilación en el modelo de marea oceánica de la región del Archipiélago Canario, corresponden al satélite TOPEX/Poseidón. Esta serie de medidas comprende el periodo de tiempo entre Septiembre de 1992 y Febrero de 2002 (364 ciclos), con un intervalo de datos de unos 10 días, pertenecientes a la base de datos proyecto Pathfinder (Secc. 4.4.2). En este caso, el número total de puntos dato donde se han considerado las medidas T/P es de 276. Comprenden todos los puntos a lo largo de las trazas del satélite (con su espaciado original de unos 7 km y con unas 340 observaciones en cada punto), más los 5 puntos de cruce de las mismas en el interior del dominio del modelo (en los que se duplica el número de observaciones). La Figura 5.3 muestra la región de estudio con las trayectorias del satélite utilizadas, tanto ascendentes como descendentes.

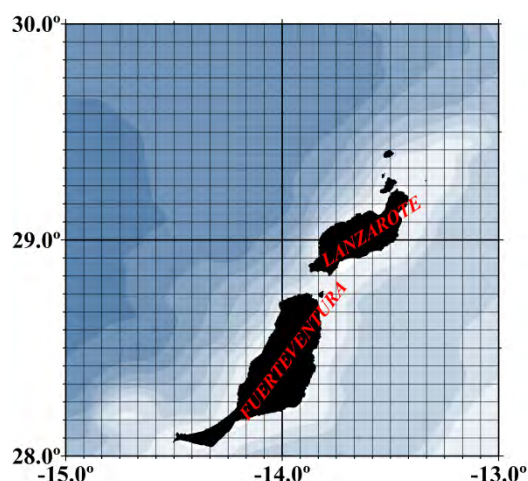
Los datos T/P utilizados en este estudio tienen todas las correcciones estándar aplicadas (debidas a la posición, instrumentales, por refracción atmosférica, por la marea terrestre y el efecto de carga oceánica, etc.), exceptuando la de marea oceánica. Estas correcciones, así como los modelos geofísicos aplicados, se encuentran detalladas en la Sección 4.4.2.2 (Cap. 4) y listadas en la Tabla 4.2. El análisis armónico de las series temporales del residual del nivel del mar,  $h$ (SSA) definido por [3.13], para obtener los valor de amplitud y fase de la marea oceánica para los constituyentes armónicos considerados, junto con sus respectivas desviaciones estándar, se ha llevado a cabo con el programa de análisis englobado en el paquete informático OTIS (Egbert y Erofeeva, 2002; 2006).

## 5.5 El Modelo de Carga Oceánica CIAM2

### 5.5.1 Construcción de la Cuadrícula Oceánica

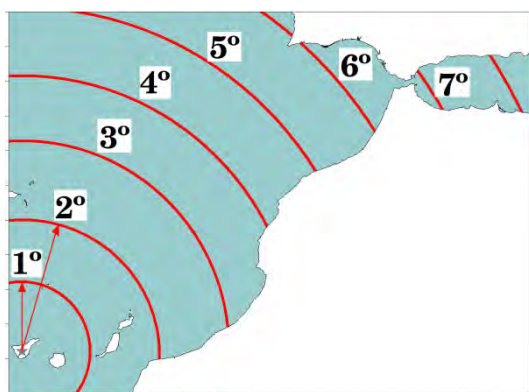
En la construcción de la cuadrícula oceánica del modelo de marea, cuyos límites están comprendidos entre las longitudes 19° O-12,5° O y las latitudes 26,5° N-30° N, se ha considerado un espaciado constante para las celdas de la cuadrícula de  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$ , lo que corresponde, aproximadamente, a una resolución de 9 km en las direcciones NS y EO. El estado tierra/agua de las celdas de la cuadrícula oceánica se ha determinado a partir de un modelo digital de la topografía del fondo oceánico, resultando un total de 2.952 celdas oceánicas (cerca del 90% del área total del dominio). En la Figura 5.6 está representada la cuadrícula oceánica alrededor de las islas de Lanzarote y Fuerteventura. El dominio del modelo CIAM2, su extensión y límites, han sido seleccionados teniendo en cuenta diversos factores que atienden, principalmente, a dos aspectos diferenciados. Por una parte, puesto que el objetivo primordial del modelo es el cálculo preciso del efecto de la carga oceánica sobre las observaciones geodésicas y gravimétricas realizadas en las islas del archipiélago, se tiene en cuenta el entorno oceánico de mayor influencia sobre el EOI calculado. Por otra parte, puesto que la modelización matemática de la dinámica de marea no está exenta de errores, se intenta minimizar en lo posible los efectos de las condiciones impuestas en la

modelización tales como, por ejemplo, las condiciones de frontera establecidas sobre los límites exteriores del dominio.



**FIGURA 5.6:** Discretización de la cuadrícula oceánica del modelo CIAM2 (resolución 1/12°×1/12°) alrededor de Lanzarote y Fuerteventura.

Como se ha explicado a lo largo de esta memoria, para un emplazamiento dado, la mayor contribución al EOI proviene de la región oceánica circundante. En el caso particular del Archipiélago Canario, para estudiar el área de mayor influencia se llevó a cabo el cálculo de las diferentes componentes del EOI (p. ej. desplazamientos y variaciones de gravedad) sobre áreas de diferente radio en torno a emplazamientos situados en cada una de las islas del archipiélago. Inicialmente, se calcula en cada uno el EOI originado por las aguas que lo circundan en un radio de 1°. Consecutivamente, este radio se amplía a 2°, 3°, etc. hasta cubrir todos los océanos del globo (es decir, un radio de 180° en torno a dicho emplazamiento). De esta forma, es posible estudiar la contribución al EOI de las regiones oceánicas en el interior de los diferentes radios considerados. La Figura 5.7 esquematiza el proceso descrito para un emplazamiento situado en Tenerife.

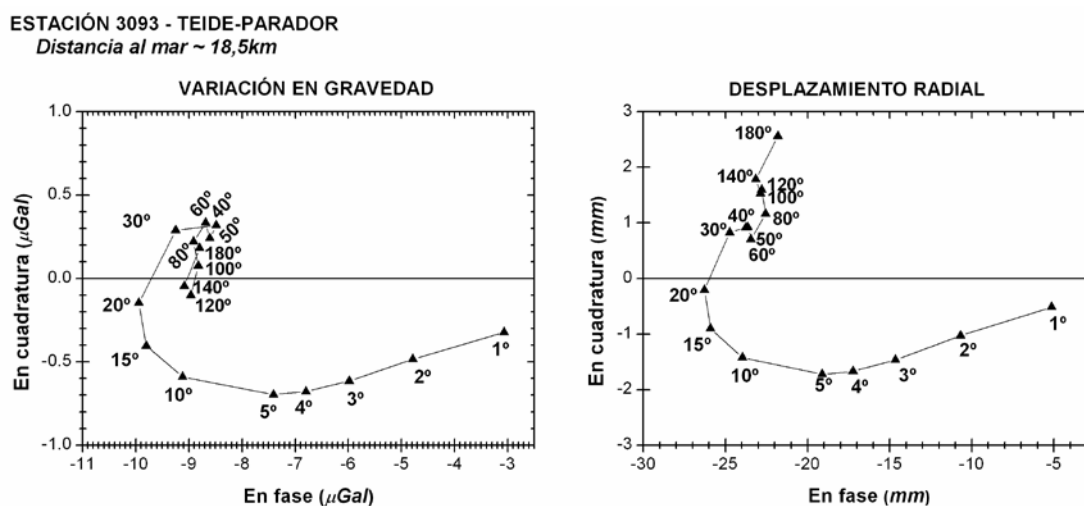


**FIGURA 5.7:** Esquema seguido para el cálculo del EOI originado por áreas oceánicas de diferente radio en torno a un emplazamiento situado en la isla de Tenerife.

La Figura 5.8 muestra, en un diagrama de Argand, los resultados obtenidos para el desplazamiento radial y las variaciones de gravedad causadas por el EOI en Tenerife. En general, se observa que la mayor contribución al EOI proviene de la región oceánica en el interior de un radio de 5°. A mayor distancia, la contribución al EOI disminuye progresivamente hasta, aproximadamente, 10°-15°. A partir ahí, los efectos tienden a compensarse unos con otros. Teniendo en cuenta que, a poco menos de 1° de distancia de las costas insulares, las profundidades oceánicas se sitúan entre 4.000 y 5.000 metros (exceptuando el margen Este de las islas orientales donde la batimetría, a



distancias no superiores a  $1^\circ$ , es del orden de 3.000 m) y que sobre estas zonas la exactitud de los modelos globales de marea oceánica más recientes es adecuada (Secc. 3.3.3, Cap. 3), se establece que el modelo regional del archipiélago debe abarcar al menos  $1^\circ$  de distancia a partir de las costas de Canarias. Con esto se satisface, a su vez, que las fronteras abiertas del modelo estén situadas sobre aguas profundas. De esta forma, resulta adecuado, en la modelización hidrodinámica, imponer sobre estas fronteras las elevaciones de marea obtenidas a partir de un modelo global, puesto que en aguas profundas estos modelos aumentan su exactitud. La elección de un modelo global determinado para su utilización como condiciones de frontera abierta (CFA) se describe en la Sección 5.5.2.2. Asimismo, y puesto que la imposición de unas CFA conlleva errores, aun cuando se han seleccionado los valores de marea más precisos posibles, se ha procurado que en sus proximidades existan datos observados, con el fin de minimizar la propagación de estos errores hacia el interior del dominio. Las fronteras del modelo CIAM2 se establecieron, finalmente, próximas a los puntos de cruce de las trayectorias del satélite T/P (Fig. 5.3).



**FIGURA 5.8:** Variaciones de gravedad (izda.) y desplazamiento radial (dcha.) provocados por el efecto de carga oceánica para la onda  $M_2$  en la isla de Tenerife. Los cálculos se han realizado para áreas de distinto radio en torno al punto de cálculo (distancias angulares desde el punto de cálculo desde  $1^\circ$  hasta cubrir todas las regiones oceánicas del globo, esto es, un radio de  $180^\circ$ ).

Por último, la resolución de la cuadrícula oceánica  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$  se ha seleccionado atendiendo a los siguientes criterios:

- Debe ser adecuada para resolver con exactitud la variabilidad espacial de la marea oceánica, para los principales constituyentes armónicos, en el área cubierta por el dominio del modelo.
- Debe ser acorde con el espaciado de los datos procedentes de altimetría por satélite asimilados en el modelo.
- El área abarcada, la resolución de la cuadrícula y el número de datos asimilados en el modelo son tales que cada uno de ellos no limita a los restantes, teniendo en cuenta la capacidad de memoria computacional disponible.

### 5.5.2 Modelo Hidrodinámico

El modelo hidrodinámico construido, denominado simplemente *modelo directo o a priori*, consiste en la solución numérica de las ecuaciones barotrópicas linealizadas de aguas poco profundas, promediadas en la dirección vertical. La hipótesis de fluido barotrópico (es decir, independiente de la profundidad) se justifica por ser ésta la componente dominante en la región, como han demostrado numerosos autores a partir del análisis de observaciones de la marea oceánica (p. ej. Martínez et al., 1999). En este caso, en las ecuaciones hidrodinámicas, que incluyen los términos correspondientes a las fuerzas generadoras de marea y a la fricción debida a la presencia del fondo oceánico, se desprecia la viscosidad turbulenta horizontal. Todo esto, junto con la descripción de las constantes, parámetros y condiciones utilizados en la construcción del modelo a priori, se detalla y justifica a lo largo de esta Sección.

#### 5.5.2.1 Modelo Digital de la Topografía del Fondo Oceánico

La información sobre la topografía del fondo oceánico, necesaria para la resolución de las ecuaciones hidrodinámicas, se obtiene promediando sobre la cuadrícula oceánica de CIAM2 los datos batimétricos procedentes de un modelo digital de batimetría. Para la zona de estudio actual, el entorno del Archipiélago Canario, se ha seleccionado la información correspondiente a la base de datos mundial ETOPO2 (Smith y Sandwell, 1997), de resolución 2' (Fig. 5.2). Esta elección se ha llevado a cabo según los criterios expuestos en el Capítulo 4 (Secc. 4.5.2.1), después de la comparación en esta zona de los datos procedentes de diversos bancos batimétricos mundiales existentes a disposición pública<sup>7</sup>, cuyos resultados se presentan a continuación.

#### Resultados de la comparación con otras batimetrías

Para la selección de la batimetría en el entorno de las Islas Canarias, se realizó un estudio comparativo entre los modelos digitales de la topografía del fondo oceánico GEBCO-1m (Secc. 4.5.2.1, Cap. 4) y ETOPO2. Con este fin, y puesto que la resolución de ambas batimetrías es mayor que la de CIAM2, se promedian sobre las celdas de la cuadrícula oceánica los valores de la profundidad del océano de cada modelo digital. Las diferencias obtenidas se resumen en la Tabla 5.2. Aunque en el dominio del modelo existen diferencias entre ambas batimetrías que superan los 700-800 m, éstas representan menos del 3% del total de puntos comparados, se localizan de forma aislada y no se sitúan sobre características topográficas reseñables. Las diferencias en el resto de puntos comparados, que disminuyen progresivamente desde los 500 m, se concentran en los estrechos entre islas, a lo largo de la Dorsal Canaria, sobre la pendiente continental africana y, puntualmente, en las proximidades a las islas Salvajes (Fig. 5.2). A pesar de estas diferencias, la distribución de las líneas de costa y de los accidentes geográficos más significativos en el dominio del modelo, presenta una buena concordancia entre ambos conjuntos de datos, por lo que las discrepancias señaladas no pueden atribuirse a un sesgo o desviación en alguna de las batimetrías.

---

<sup>7</sup> La batimetría ETOPO5 se descartó por los problemas reseñados en la Secc. 5.3.

**TABLA 5.2:** Comparación de las batimetrías GEBCO-1m y ETOPO2 en el dominio del modelo CIAM2. Se indica, en cada caso, el número de puntos cuya diferencia  $D$ , en m, se encuentra en el rango especificado.

Diferencia (m)	GEBCO-1m vs ETOPO2	
$0 < D \leq 50$	1.471	(48,4%)
$50 < D \leq 100$	520	(17,1%)
$100 < D \leq 200$	402	(13,2%)
$200 < D \leq 300$	221	(7,3%)
$300 < D \leq 400$	144	(3,7%)
$400 < D \leq 500$	92	(3,0%)
$500 < D \leq 600$	63	(2,1%)
$600 < D \leq 700$	40	(1,3%)
$700 < D \leq 800$	26	(0,9%)
$800 < D \leq 900$	21	(0,7%)
$900 < D \leq 1000$	18	(0,6%)
$D > 1000$	23	(0,8%)
Nº total de puntos comparados:	3.041	(100%)

### 5.5.2.2 Condiciones de Frontera

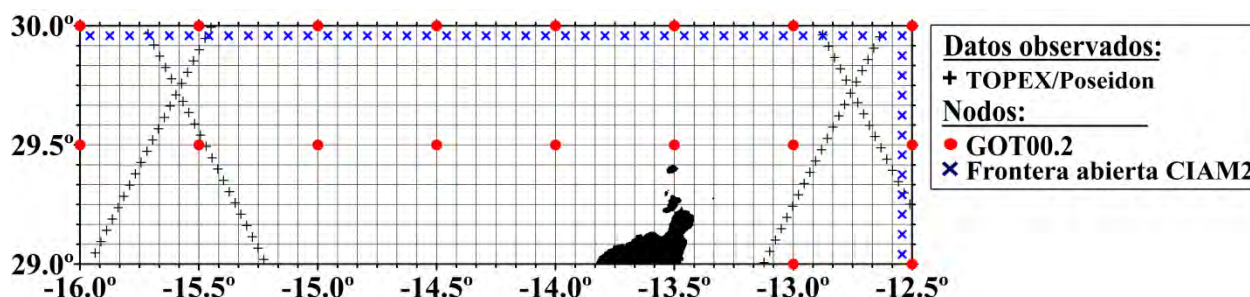
#### a) Fronteras Abiertas

Los límites del dominio del modelo se sitúan, en su mayor parte, sobre el océano Atlántico profundo, excepto el borde sureste que se ubica sobre el continente africano. Más específicamente, las fronteras norte y oeste son íntegramente abiertas y se sitúan sobre el océano a profundidades medias de unos 4.000 m. Excepcionalmente, el extremo oriental de la frontera norte atraviesa la Dorsal Canaria, donde las profundidades oceánicas disminuyen hasta alcanzar su mínimo sobre el banco Concepción. Precisamente, en las proximidades de este banco, donde se produce el mayor gradiente batimétrico de esta frontera, se localiza un punto de cruce de las trayectorias T/P (Fig. 5.3), sobre la isobata de 2.000 m y a una distancia equidistante de las fronteras norte y este (de unos 15'). Otro punto de cruce T/P se sitúa en las proximidades a la frontera norte, frente a la estructura aislada que constituyen las islas Salvajes, sobre la isobata de 3.500 m. Por otra parte, las fronteras sur y este son sólo parcialmente abiertas y sus nodos cubren áreas oceánicas profundas y de plataforma continental. Así, la frontera sur cubre la plataforma continental africana y su pendiente, que se extienden una distancia aproximada de un grado desde la línea de costa (entre los 15° O y los 14° O). Las isobatas, que en esta zona son paralelas a la línea de costa, atraviesan la frontera de sur a norte (Fig. 5.2). Debe remarcarse el hecho de que en esta zona se dispone de observaciones altimétricas de satélite y, en particular, de un punto de cruce de las trayectorias T/P situado muy próximo a la isobata de 2.000 m. Finalmente, los nodos oceánicos de la frontera Este están atravesados, de forma casi perpendicular, por la plataforma continental africana. Como se describió en la Sección 5.2, la costa africana frente a esta frontera presenta una prominente concavidad (limitada por los cabos de Guir y

Jubi en las latitudes  $28^{\circ}$  N y  $30,7^{\circ}$  N, respectivamente), lo que ocasiona que su plataforma atravesase el meridiano  $12,5^{\circ}$  O en dirección noreste (Fig. 5.2).

Las CFA impuestas sobre estas fronteras son de tipo activas, con valores de la elevación de marea asignados mediante interpolación bilineal a partir del modelo global GOT00.2, que tiene una resolución espacial de  $0,5^{\circ} \times 0,5^{\circ}$ , (Fig. 4.8). La elección de este tipo de frontera se justifica siguiendo los criterios descritos en la Sección 3.4.1.3 (Cap. 3), por los siguientes motivos: (i) Las fronteras yacen, en su mayor parte, sobre aguas profundas (superiores a 1.000 m), por lo que el uso de un modelo global es recomendable (p. ej. Zhang et al., 2003). (ii) La propagación de la marea oceánica se produce desde el exterior hacia el interior del dominio del modelo (según se describió en la Secc. 5.2.2). (iii) Las isobatas, principalmente en las zonas menos profundas, son casi perpendiculares a las fronteras. Además, en estas zonas de aguas menos profundas (principalmente, la plataforma continental africana, la Dorsal Canaria y frente a las islas Salvajes) las fronteras se han situado de tal forma que se dispone de información procedente del satélite T/P.

La elección del modelo GOT00.2 para la obtención de las CFA se realizó teniendo en cuenta los siguientes criterios: (i) A nivel global, las recomendaciones del IERS de 2003 (McCarthy y Petit, 2003) que aconsejan el uso, entre otros, de este modelo con fines geodésicos. (ii) A nivel regional, la adecuación de este modelo a la zona de estudio, verificada a partir de la comparación entre las variaciones de gravedad causadas por el EOI calculadas con éste y otros modelos globales. Los resultados obtenidos en esta comparación se presentan y analizan en el Capítulo 6.



**FIGURA 5.9:** Fragmento del dominio del modelo CIAM2 sobre su frontera norte. Se muestran los datos T/P y las posiciones donde se consideran las constantes armónicas procedentes del modelo GOT00.2 (círculos rojos) para su interpolación bilineal en los nodos de frontera abierta de CIAM2 (cruces azules).

## b) Fronteras Cerradas y Condiciones de Contorno

Siguiendo lo descrito en la Sección 3.4.1.3 (Cap. 3), para la resolución del sistema hidrodinámico se ha establecido:

- La condición de impermeabilidad, dada por la ecuación [3.37], sobre las fronteras cerradas.
- La condición de flujo normal cero, según [3.38], sobre los contornos costeros en el interior del dominio del modelo.

### 5.5.2.3 Términos de Disipación

En la modelización hidrodinámica se ha considerado el rozamiento con el fondo oceánico, mediante su inclusión a través de la parametrización lineal dada por la ecuación [3.31]. En dicha expresión se ha considerado:

- Un coeficiente de arrastre,  $C_b$ , constante en todo el dominio e igual a  $3 \times 10^{-3}$ . Este valor ha sido seleccionado por considerarse adecuado en áreas de aguas profundas (Le Provost et al., 1994), como es la zona de estudio. Es más, los diferentes test realizados, variando el coeficiente de arrastre en el rango de valores usuales entre  $1 \times 10^{-3}$  y  $3 \times 10^{-3}$  (p. ej. Bills, 1992), mostraron que la solución final no se veía afectada. Esto coincide, además, con los resultados obtenidos por otros autores en test similares (p. ej. McInerney, 2005).
- La velocidad del agua,  $u_0$ , estimada a priori, como función de la posición en el dominio del modelo, según se describió en la Sección 3.4.1 (Cap. 3).

Teniendo en cuenta que los efectos de la fricción con el fondo oceánico sobre la componente vertical de la marea oceánica, en profundidades superiores a 1000 m, son muy inferiores a los originados en aguas someras (casi despreciables) en el dominio del modelo CIAM2, se considera adecuado incorporar estos efectos a partir de una parametrización lineal y un coeficiente de arrastre constante en todo el dominio. La dependencia espacial y, por tanto, de la profundidad oceánica de estos efectos se introduce en la parametrización a través de la velocidad del agua, estimada en función de la posición en el espacio.

Por otra parte, puesto que los efectos de la viscosidad turbulenta horizontal decrecen con la profundidad oceánica (McInerney, 2005), es razonable despreciar dichos efectos en el dominio del modelo CIAM2.

### 5.5.2.4 Fuerzas Generadoras de Marea

Los términos correspondientes a las fuerzas generadoras de marea (ecuación [3.24]) se determinan a partir del potencial astronómico de marea dado por Cartwright (1977), del factor  $\alpha = (1 + k_2 - h_2)$  y del modelo de carga y atracción oceánica TPXO6.2\_load referido en la Sección 4.5.2.5 (Cap. 4).

### 5.5.2.5 Esquema Numérico de Resolución de las Ecuaciones Hidrodinámicas

Las ecuaciones hidrodinámicas consideradas corresponden a las dadas por [3.16] a [3.18] en las que, como se ha descrito anteriormente, se omiten los términos de viscosidad turbulenta horizontal y donde la fricción con el fondo oceánico se introduce mediante la parametrización lineal [3.31]. La resolución de este sistema, que incluye las condiciones de frontera descritas previamente, se lleva a cabo mediante la *aproximación de factorización directa* (Secc. 3.4.1.4, apartado b), en el dominio de la frecuencia para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $O_1$ ,  $K_1$ ,  $P_1$  y  $Q_1$ . La Tabla 5.3 resume las constantes, los parámetros y los modelos utilizados en la obtención del modelo hidrodinámico a priori.

**TABLA 5.3:** Constantes, parámetros y modelos utilizados para la construcción del modelo hidrodinámico.

PARÁMETRO	VALOR
Radio de la Tierra	$R_T = 6.370,8 \text{ km}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9,80621 \text{ m}^2/\text{s}$
Velocidad angular de rotación de la Tierra	$\omega = 0,00007292 \text{ rad/s}$
Densidad media del agua del mar	$\rho_w = 1.028 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de fricción del fondo	$C_b = 0,003$
Profundidad mínima fricción del fondo	10 m
Resolución horizontal de la cuadrícula	$\Delta\phi = \Delta\lambda = 1/12^\circ$
Condiciones de Frontera Abierta	GOT00.2
Corrección carga y atracción oceánica	TPXO6.2_load

### 5.5.3 Errores Asignados al Modelo Hidrodinámico y a los Datos Observados

#### a) Errores asignados en el modelo hidrodinámico

Para estimar los errores en el modelo hidrodinámico se ha llevado a cabo el procedimiento descrito en la Secc. 3.4.3 (Cap. 3). Se asume que todos los errores provienen de las ecuaciones de conservación del momento (a través de las imprecisiones en la batimetría, en las condiciones de frontera abierta y en la parametrización del término de la fricción con el fondo oceánico). Se han establecido los siguientes errores (resumidos en la Tabla 5.4):

- Los datos batimétricos se consideran con una incertidumbre del 5%.
- A la parametrización lineal de la fricción del fondo se le asigna un error del 55%.
- Las condiciones de frontera abierta se consideran con una imprecisión del 5% de su magnitud.

Todas estas fuentes de error se consideran independientes entre sí y dependientes de su posición en el espacio. Para ello, se ha establecido una longitud de correlación constante igual a 50 km en el interior del dominio del modelo (aproximadamente 5 celdas de la cuadrícula oceánica) e igual a 500 km (unas 55 celdas de la cuadrícula oceánica) sobre las fronteras abiertas. Finalmente, la varianza de error total es la suma de los cuadrados de los errores independientes.

#### b) Errores asignados en los datos observados

Los errores considerados a priori en los datos, tanto de las medidas altimétricas del satélite T/P como de los mareógrafos, corresponden a los estimados en el procedimiento de análisis armónico de las series temporales realizado para cada emplazamiento. En el caso de las series mareográficas, los errores asignados a las constantes armónicas están listados en la Tabla 7 (Apéndice 2). En aquellos emplazamientos donde no se dispone de una estimación de los errores en las constantes armónicas se establece un error por defecto de 0,05 cm. Para los datos procedentes de satélite, estos errores se consideran no correlados. La varianza de error se ha estimado, para cada constituyente, a partir del error medio cuadrático obtenido en el proceso de ajuste mínimos cuadrados.

**TABLA 5.4:** Errores asignados en el modelo hidrodinámico y su longitud de correlación espacial.

ERROR	VALOR	LONGITUD DE CORRELACIÓN	VALOR
Batimetría	5%	Interior	50 km
Batimetría (mínimo)	10 m	Fronteras abiertas	500 km
Arrastre	55%		
Condición fronteras abiertas	5%		
Condición fronteras cerradas	20%		

#### 5.5.4 La Solución Inversa: El Modelo CIAM2

El modelo de carga oceánica CIAM2 se obtiene utilizando el *método de los representantes*, siguiendo los procedimientos descritos en los Capítulos 3 y 4. Para su construcción se ha considerado, en el cálculo de los representantes, la localización de todas las observaciones mareográficas, los puntos cruzados T/P más 10 puntos a lo largo de sus trayectorias entre dichos puntos de cruce (Fig. 5.3). La resolución numérica del problema de inversión se ha llevado a cabo con el software OTIS.

**TABLA 5.5:** Número de datos asimilados y representantes seleccionados para la construcción del modelo CIAM2.

	Puntos Dato	Representantes
<b>TOPEX/Poseidón</b>	<b>276</b>	<b>54</b>
Cruzados	5	5
Trayectorias	271	49
<b>Mareógrafos</b>	<b>9</b>	<b>9</b>
Costeros	9	9
<b>Total</b>	<b>285</b>	<b>63</b>

## 5.6 Resultados

### 5.6.1 Descripción General de CIAM2

En el dominio del modelo, la variabilidad de la marea oceánica, calculada a partir de la desviación estándar de las amplitudes de la marea oceánica de los ocho constituyentes de marea principales ( $\sigma_{\zeta}$  dado por [4.6]), se incrementa desde unos 60 cm al suroeste (60-68 cm a lo largo de la frontera oeste) hasta los 90 cm en las proximidades a la frontera este. Localmente, se produce un máximo de  $\sigma_{\zeta}$  de unos 98 cm en torno a la isla de Gran Canaria. La elevación máxima de la marea oceánica, definida por [4.7], tiene un valor medio en la región de 1,7 veces  $\sigma_{\zeta}$ . Por tanto, el régimen de marea oceánica en el dominio del modelo es, principalmente, semi-diurno y se caracteriza por un factor *Número Forma*,  $F = (A(K_1)+A(O_1))/(A(M_2)+A(S_2))$ , en el rango de 0,09 a 0,14 (su valor medio en el dominio es de  $F = 0,11$  y la desviación estándar de 0,01).

En las Figuras 5.10 y 5.11 se representa el modelo CIAM2 (amplitudes y fases de la marea oceánica) para los principales constituyentes de marea semi-diurnos y diurnos, respectivamente. Como se ha puesto de manifiesto en las primeras Secciones de esta Capítulo, la elevada amplitud de

la marea oceánica en la región del Archipiélago Canario resulta de la conjunción de diversos factores: la localización geográfica de las islas, el régimen de vientos locales y la topografía del fondo marino, caracterizada por plataformas estrechas y grandes pendientes.

La amplitud de la marea oceánica para el constituyente  $M_2$ , dominante en la banda de marea semi-diurna, se incrementa en dirección noreste y su fase se propaga hacia el Norte. Así, en el extremo suroeste del dominio del modelo las amplitudes, que alcanzan aquí su valor mínimo, se encuentran en torno a 52 cm, mientras que en el extremo opuesto, al noreste, estos valores son del orden de 84 cm. En el interior de la región se observan, también para la onda  $M_2$ , variaciones significativas en el patrón general de propagación de su amplitud, que se atribuyen a la topografía del fondo marino y a la geometría costera de las islas. Estas variaciones se producen, principalmente, en torno a las dos islas mayores del archipiélago, Tenerife y Gran Canaria, al sur de Fuerteventura y, por último, frente a la costa africana en las proximidades a Cabo Jubi (Fig. 5.1). En cuanto a la progresión de fases para la onda  $M_2$  en el dominio del modelo, aunque ésta se produce de forma casi uniforme (de  $16^\circ$  al sur hasta unos  $38^\circ$  al norte), la presencia de las islas ocasiona leves perturbaciones locales.

Analizando separadamente las zonas señaladas anteriormente, donde se producen las variaciones más significativas con respecto al patrón general de propagación de la marea oceánica, se observa que para el constituyente  $M_2$ :

- En el estrecho entre Tenerife y Gran Canaria, así como alrededor de esta última, se produce el mayor gradiente en amplitud de la región modelada. Frente a la costa oeste de Gran Canaria, la amplitud de la marea presenta valores unos 10 cm inferiores a los que alcanza frente a su costa Este. Es más, es en esta última zona donde se obtienen los valores máximos en amplitud (no superiores a 90 cm). Puesto que la variación anómala, con respecto al patrón general de propagación de la marea oceánica, se produce en esta zona y que ésta se caracteriza por un ensanchamiento de la plataforma insular es razonable atribuir dichas variaciones a la presencia de aguas someras. Estas conclusiones concuerdan con las extraídas por Martínez et al. (1997), quienes descartan que dichas variaciones puedan atribuirse a la difracción de las ondas de marea incidentes, debido a las pequeñas dimensiones de la isla. Por otra parte, la máxima diferencia en las fases en torno a esta isla es de unos  $5^\circ$ , la cual se produce entre sus extremos norte (en La Isleta) y sur. Esta diferencia de  $5^\circ$  se mantiene, aproximadamente, para todos los constituyentes en las bandas de marea semi-diurna y diurna. Otros autores (p. ej. Fanjul et al., 1997 y Martínez et al., 1997) han confirmado las variaciones descritas en las características de la marea oceánica, en las proximidades de las islas de Tenerife y Gran Canaria<sup>8</sup>, a partir de observaciones in-situ. Los resultados obtenidos con CIAM2 concuerdan con los presentados

---

<sup>8</sup> Según determinan Fanjul et al. (1997), para la onda  $M_2$  la amplitud de las componentes horizontales de la marea oceánica en los estrechos entre islas (principalmente, en torno a Tenerife y Gran Canaria) se incrementa considerablemente (con un valor máximo de unos 15 cm/s, siendo las amplitudes típicas del orden de 5 cm/s en la región canaria).

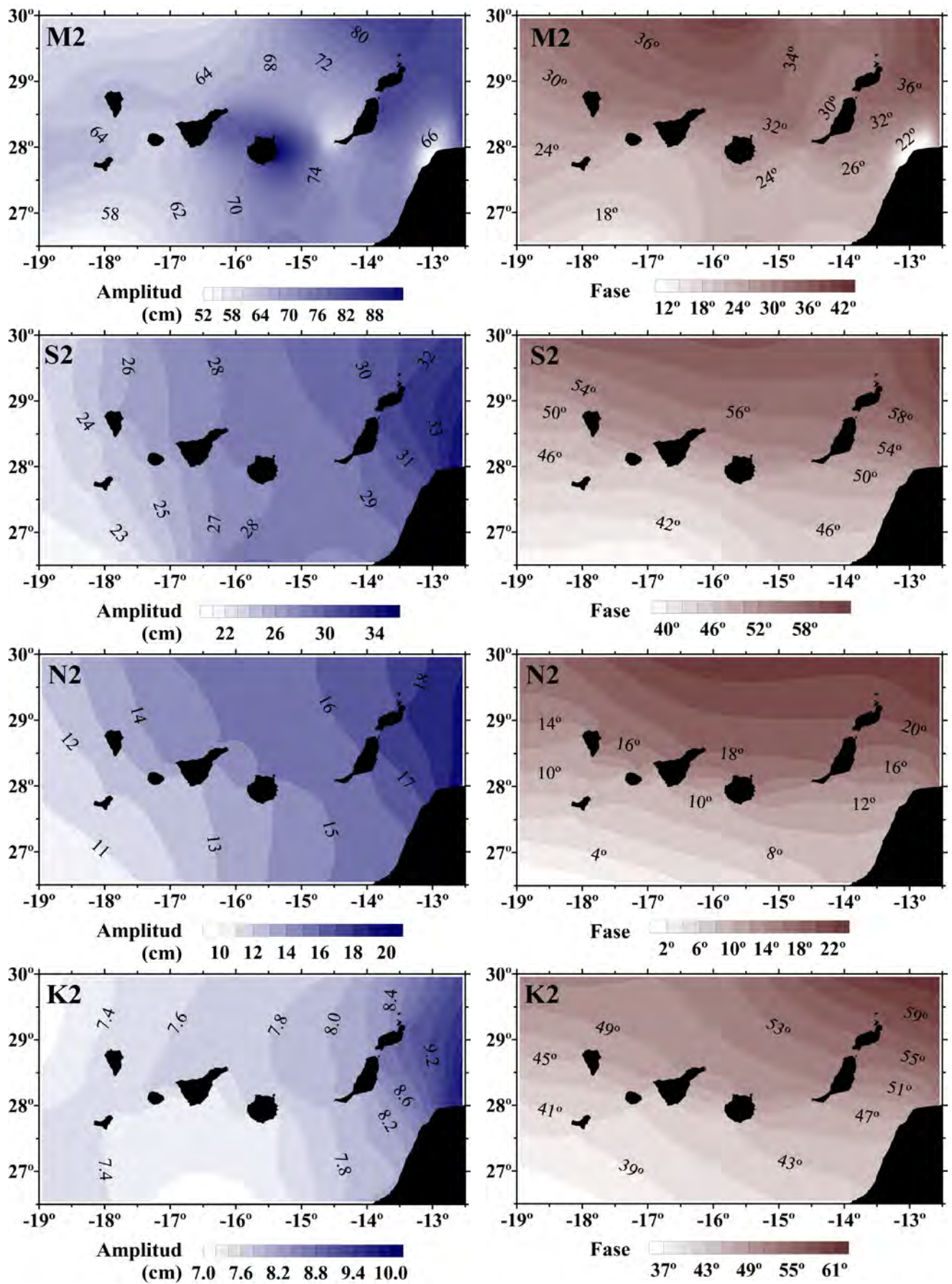


por estos autores en cuanto a la variabilidad de la marea (patrón de propagación y diferencias máximas), aunque en lo que respecta a las magnitudes alcanzadas se aprecian ligeras diferencias (se analizará en la siguiente Sección).

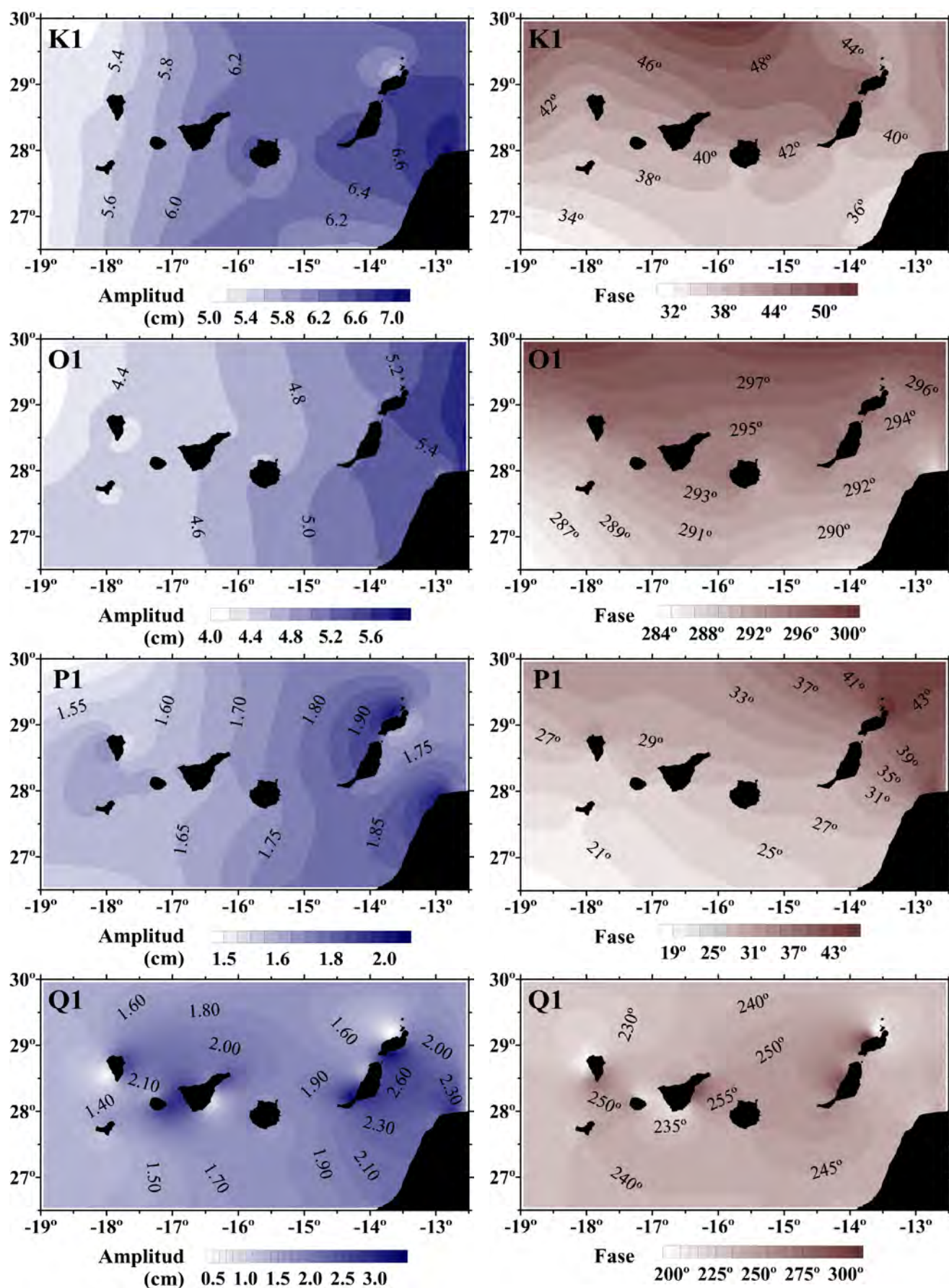
- Para la onda  $M_2$ , las amplitudes de marea presentan también una variación significativa al sur de Fuerteventura, sobre los bancos submarinos Amanay y Banquete. Esta variación se caracteriza por una importante disminución de las amplitudes sobre las características topográficas señaladas (hasta alcanzar valores del orden de 58 cm).
- Finalmente, frente a la costa africana, en las proximidades a cabo Jubi se observa una importante variación anómala en las características de la marea oceánica que afecta, principalmente, a su amplitud. Esta anomalía puede atribuirse a la conjunción de diversos factores: Una geometría costera compleja, con un cambio en la orientación de la línea de costa de unos  $90^\circ$ , seguido de una prominente concavidad (que se extiende unos  $3^\circ$  en dirección longitudinal y latitudinal), junto con un ensanchamiento de la plataforma continental frente a esta costa. Puesto que en esta zona no se dispone de observaciones in-situ que permitan validar los parámetros de marea modelados, es importante analizar detalladamente los resultados obtenidos por CIAM2 y los proporcionados por los modelos globales. Esta cuestión será tratada en la siguiente Sección.

El resto de constituyentes semi-diurnos se caracterizan por un patrón espacial similar al de la onda  $M_2$ , aunque su variabilidad en torno a las principales islas del archipiélago ya no es significativa. Más aun, estos constituyentes semi-diurnos están menos afectados por la topografía marina que la onda dominante  $M_2$ . Las magnitudes de las amplitudes para  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$  representan, aproximadamente, un 40%, 20% y 11% de la de  $M_2$ , respectivamente. La diferencia de fases entre los límites norte y sur del modelo es, para todos los armónicos de esta banda, de unos  $20^\circ$ .

Aunque el patrón de propagación de los constituyentes en la banda de marea diurna es similar al de los semi-diurnos en el dominio del modelo, sus magnitudes son significativamente inferiores (Fig. 5.11). En el caso de las ondas de marea  $K_1$ ,  $O_1$  y  $P_1$  las amplitudes se propagan, aproximadamente, en dirección Este, aunque el patrón general se ve alterado localmente por la presencia de las diversas islas y, principalmente, por la costa africana. A pesar de estas pequeñas perturbaciones, se observa que los constituyentes diurnos no están tan afectados por la topografía del fondo como los de la banda semi-diurna. Para la onda dominante en la banda diurna,  $K_1$ , la amplitud de la marea varía de unos 5,2 cm (en el límite oeste del dominio del modelo) hasta, aproximadamente, 6,8 cm (en su extremo este). Las fases para  $K_1$ ,  $O_1$  y  $P_1$  se propagan de sur a norte, con una diferencia entre ambos extremos de unos  $15^\circ$ . Cabe señalar que el patrón espacial, tanto de amplitudes como de fases, para  $Q_1$  difiere del resto de ondas en esta banda de marea. El comportamiento de esta onda, que tiene una amplitud de unos 2 cm, similar a  $P_1$ , es complejo y está dominado por la geometría costera.



**FIGURA 5.10:** Representación del modelo de marea oceánica CIAM2 para los constituyentes de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados.



**FIGURA 5.11:** Representación del modelo de marea oceánica CIAM2 para los constituyentes de marea  $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $Q_1$ . Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados.



### 5.6.2 Comparación de CIAM2 con Modelos Globales, Regionales/Locales y con Observaciones

En general, los patrones de propagación de la marea oceánica que presenta CIAM2 concuerdan con los de los modelos globales comúnmente utilizados (p. ej., GOT00.2, TPXO7.2, etc.), aunque la resolución de estos últimos no permite representar la variabilidad de la marea en torno a las diferentes islas del archipiélago. Como ejemplo, se han representado en las Figuras 5.12 y 5.14 las diferencias, en amplitud y fase, entre CIAM2 y el modelo GOT00.2. Para el constituyente armónico  $M_2$ , las mayores discrepancias en amplitud entre ambos modelos se producen en las áreas donde ésta presenta un mayor gradiente: el estrecho entre Tenerife y Gran Canaria (con diferencias del orden de 10 cm), alrededor de esta última (con diferencias máximas próximas a 20 cm frente a la costa Este) y al sur de Fuerteventura (de unos 15 cm). Destaca que en el entorno de las islas de Tenerife y Gran Canaria los valores en amplitud del modelo GOT00.2 son más bajos que los obtenidos en CIAM2, mientras que al sur de Fuerteventura se produce la situación inversa. Las diferencias señaladas se atribuyen, principalmente, a la insuficiente resolución de GOT00.2, que no permite representar con exactitud la gran variabilidad de la marea oceánica que se produce en estas zonas, en una distancia espacial muy pequeña. Es más, en el modelo GOT00.2 se tiene que:

- La isla de Tenerife está representada en su totalidad como “agua” (Fig. 5.15), lo que influye sobre las constantes armónicas determinadas por este modelo en las aguas circundantes.
- La variación existente en la amplitud de la marea oceánica entre el norte y el sur de la isla de Tenerife (de unos 3 cm para  $M_2$ ) está representada sólo por dos celdas oceánicas (Fig. 5.15), lo que es significativamente inferior a lo observado (más de 12 cm entre GRANADILLA y S. C. TENERIFE, Tabla 7 en Apéndice 2).

Las diferencias anteriores se reducen cuando la comparación se realiza entre CIAM2 y otros modelos globales de mayor resolución, como por ejemplo FES2004 (Fig. 5.14). Destacan las significativas diferencias encontradas en las proximidades a cabo Jubi, para la amplitud de la onda  $M_2$ , entre CIAM2 y los diferentes modelos globales considerados. Estudiando el comportamiento individual de cada uno de los modelos, se observa que todos ellos reproducen un cambio en la orientación de las isolíneas de amplitud en el meridiano 13° O. Esta variación está ocasionada, principalmente, por el cambio de orientación de la geometría costera (de 90°), que altera la propagación noreste de las isolíneas hasta este meridiano, dirigiéndolas hacia la costa africana. La Fig. 5.16 muestra la variación descrita para los modelos FES2004 y TPXO.7, dos de los modelos globales más recientes y de mayor resolución. Aunque, en general, todos los modelos globales estudiados reproducen este cambio de orientación, pequeñas variaciones en los mismos (como la mayor o menor aceleración de las isolíneas de amplitud en dirección a la costa africana) ocasionan que se produzca entre ellos diferencias de entre 5-10 cm (dependiendo de los modelos comparados) a partir de este meridiano y, aproximadamente, hasta un grado en latitud hacia el norte desde la costa africana. Por tanto, la variación anómala detectada en las amplitudes de  $M_2$  obtenidas con CIAM2 y los diferentes modelos globales está en concordancia con las variaciones existentes entre los propios modelos globales,

pudiéndose atribuir todas ellas a las causas expuestas anteriormente, así como al cambio de orientación en la línea de costa, seguido de una prominente concavidad en la misma y el ensanchamiento de la plataforma continental frente a esta. Por otra parte, hay que tener presente que en esta zona la onda  $M_2$  se caracteriza por una rotación de su velocidad y un incremento significativo en su amplitud (véase Fig. 10 en Fanjul et al., 1997). Diversos autores (p. ej. Paiva et al., 2000<sup>9</sup>) han remarcado la importante dependencia existente entre las corrientes de marea (y, como consecuencia, de la elevación de la marea) y la resolución espacial de la cuadrícula oceánica empleada para su modelización. Finalmente, debe señalarse que la frontera Este de CIAM2 constituye un factor restrictivo puesto que perturba la progresión natural de las isolíneas de amplitud en dirección a la costa africana, en el exterior del dominio del modelo<sup>10</sup>.

Con respecto al resto de constituyentes armónicos en la banda semi-diurna, las diferencias de amplitud entre los modelos CIAM2 y GOT00.2 (así como con los restantes modelos globales) se reducen considerablemente (Fig. 5.12). Las máximas discrepancias no superan los 3 cm y tienden a distribuirse regularmente en todo el dominio. Para estos constituyentes ( $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$ ) no se aprecia que las diferencias se concentren en torno a características geográficas u oceanográficas reseñables. En cuanto a la diferencia de fases entre CIAM2 y GOT00.2 (Fig. 5.13), destaca lo siguiente:

- El valor medio de las diferencias es del orden de  $0,5^\circ$  para  $M_2$  (stdv =  $2,1^\circ$ ),  $-1,1^\circ$  para  $S_2$  (stdv =  $1,0^\circ$ ),  $-0,6^\circ$  para  $N_2$  (stdv =  $1,2^\circ$ ) y  $0,9^\circ$  para  $K_2$  (stdv =  $0,9^\circ$ ). El signo negativo indica un retardo en las fases de GOT00.2 con respecto a CIAM2.
- Las mayores diferencias se localizan frente a la costa africana para  $M_2$ , al sur de Tenerife para  $S_2$  y al suroeste de El Hierro para  $N_2$ . En el primer caso, las diferencias en fase existentes frente a la costa africana para el constituyente  $M_2$  se atribuyen a las mismas causas expuestas para las amplitudes. En el caso de las ondas  $S_2$  y  $N_2$  se ha estudiado la propagación de las fases al sur de la isla de Tenerife proporcionadas por diversos modelos globales, además de CIAM2. Para  $S_2$ , la comparación muestra que los modelos de menor resolución (GOT00.2 y TPXO7.1) presentan un desfase de entre  $1^\circ$  y  $2^\circ$  con respecto a FES2004 y CIAM2, los cuales muestran una buena concordancia entre sí (Fig. 5.17). Para  $N_2$ , en el área comprendida al sur de la isla de Tenerife y al este de El Hierro se observa que las fases, para todos los modelos comparados, concuerdan en un margen de  $1^\circ$  (Fig. 5.18). Al oeste de El Hierro las diferencias de fase entre modelos aumentan (aunque no superan los  $2^\circ$ ). Destaca en esta zona la distribución irregular de las líneas de co-fase para GOT00.2 y TPXO7.1. Para ambas ondas,  $S_2$  y  $N_2$ , las diferencias de fase entre todos los modelos tienden a disminuir a partir de la latitud de  $28^\circ$  en dirección Norte. Destaca, también, la buena concordancia entre CIAM2 y las observaciones de marea en esta región (Fig. 5.10 y Tablas 7 y 9, Apéndice 2).

<sup>9</sup> En particular, Paiva et al. (2000) tratan sobre los patrones de propagación de las corrientes oceánicas en la zona que nos ocupa (a partir de observaciones y de modelos teóricos) y su relación con la Corrientes de Canarias y de Azores.

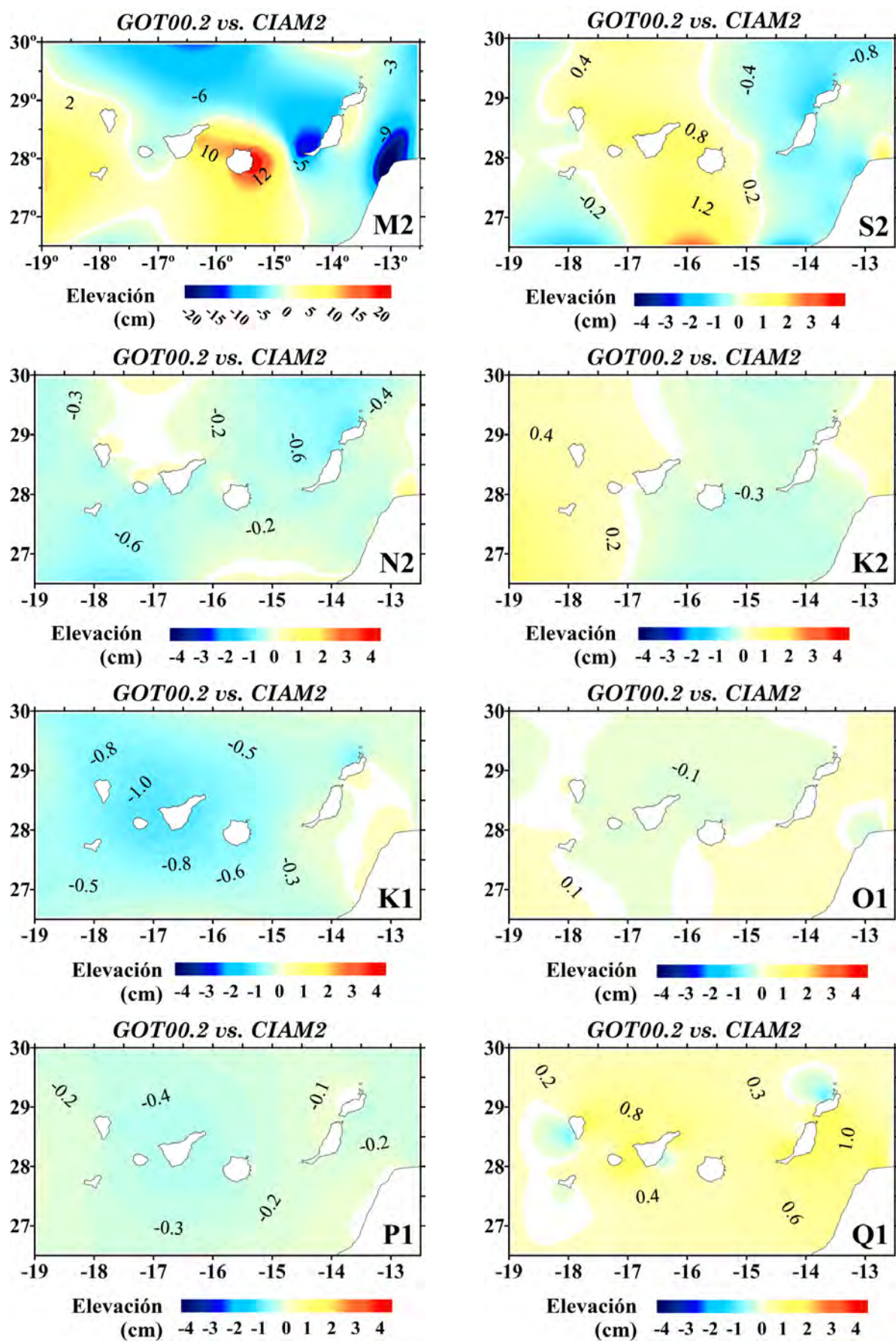
<sup>10</sup> Estas consideraciones plantean tres cuestiones interrelacionadas para trabajos futuros: (i) Emplazamiento de la frontera Este, (ii) condiciones de frontera sobre la misma (iii) influencia de las corrientes de marea sobre las elevaciones.

En la banda de marea diurna las diferencias de amplitud entre CIAM2 y GOT00.2 se reducen considerablemente, debido a la magnitud de los constituyentes (diferencias máximas del orden de 1 cm para el constituyente dominante  $K_1$ ). Además, las diferencias no se concentran en torno a características topográficas singulares. En cuanto a las fases, destaca que el valor medio de las diferencias para las ondas  $K_1$  y  $O_1$  son del orden de  $-0,4^\circ$  (stdv =  $2,0^\circ$ ) y  $0,8^\circ$  (stdv =  $1,4^\circ$ ), respectivamente. En el caso de los constituyentes armónicos  $P_1$  y  $Q_1$  estas diferencias medias se incrementan significativamente:  $-8,0^\circ$  (stdv =  $5,3^\circ$ ) para  $P_1$  y  $-2,4^\circ$  (stdv =  $11,3^\circ$ ) para  $Q_1$ .

Aunque el patrón de propagación de las fases para la onda  $P_1$  es similar para todos los modelos, CIAM2 muestra un desfase de varios grados con respecto a los diversos modelos globales. Al oeste del meridiano  $15^\circ$  O varía entre  $12^\circ$  y  $16^\circ$  (dependiendo del modelo global), mientras que al este de dicho meridiano la diferencia en fases se reduce hasta unos  $6^\circ$  (Fig. 5.19). En esta zona, el patrón de propagación de GOT00.2 y TPXO7.1 difiere con respecto al de FES2004 y CIAM2, los cuales muestran una mayor concordancia. En cuanto a la magnitud de las fases se demuestra más adelante, en esta misma Sección y después de exponer diversas consideraciones necesarias, que las magnitudes obtenidas por CIAM2 concuerdan, aproximadamente, con las observaciones, mientras que los modelos globales presentan, en general, un retardo de fases de unos  $10^\circ$ .

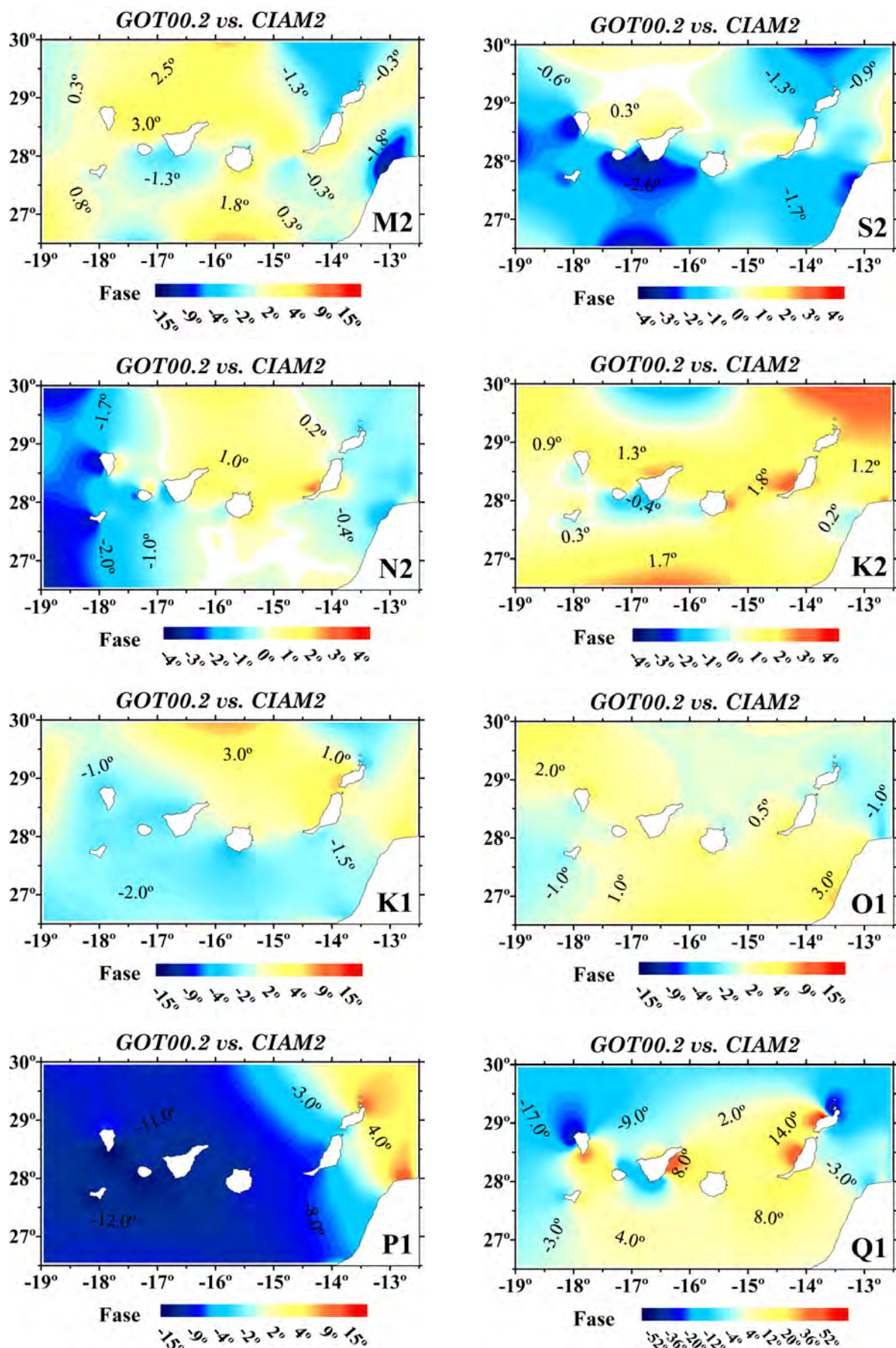
Para el constituyente  $Q_1$ , aunque el patrón de propagación y la magnitud obtenida coincide con los modelos globales en las zonas de aguas profundas en el interior del dominio, CIAM2 presenta una extremada variabilidad de fases en las proximidades de las costas canarias. Esta variabilidad puede ser representativa bien de efectos locales que afecten a la dinámica de marea en estas zonas (como la batimetría), no reproducidas por los modelos globales debido a su menor resolución, o bien, por el contrario, de imprecisiones en la modelización de las fases de esta onda en las proximidades de las costas. Debe observarse que, para la onda  $Q_1$ , las observaciones asimiladas en CIAM2 en las proximidades de las diferentes islas son escasas (y, por tanto, el modelo será acorde, principalmente, a la hidrodinámica modelada a priori). Por una parte, se dispone únicamente de observaciones in-situ, para este constituyente, en tres de las siete islas canarias. Además, para las observaciones disponibles, las fases obtenidas mediante el análisis de las series temporales están estimadas con un error considerable (de más de  $2^\circ$ ). Más aun, al igual que en el caso de  $P_1$ , aunque la longitud de la serie temporal permite estimar  $Q_1$ , la calidad de la misma influye significativamente en el resultado, dando lugar a errores que pueden superar la decena de grados. Además, las observaciones altimétricas no cubren estas zonas adyacentes a la costa.

Así pues, es difícil establecer a priori, sin otras consideraciones adicionales, si en el entorno de las costas Canarias el modelo CIAM2 refleja una variabilidad anómala de las fases de  $Q_1$  o si, por el contrario, los modelos globales (por su resolución) no reflejan dicha variabilidad. La validación de CIAM2 para el constituyente  $Q_1$  debe realizarse a partir de otras consideraciones o metodologías, lo que se realizará mediante un método de simulación numérica (Secc. 5.6.3) y, posteriormente, a partir del cálculo del EOI (Cap. 6).



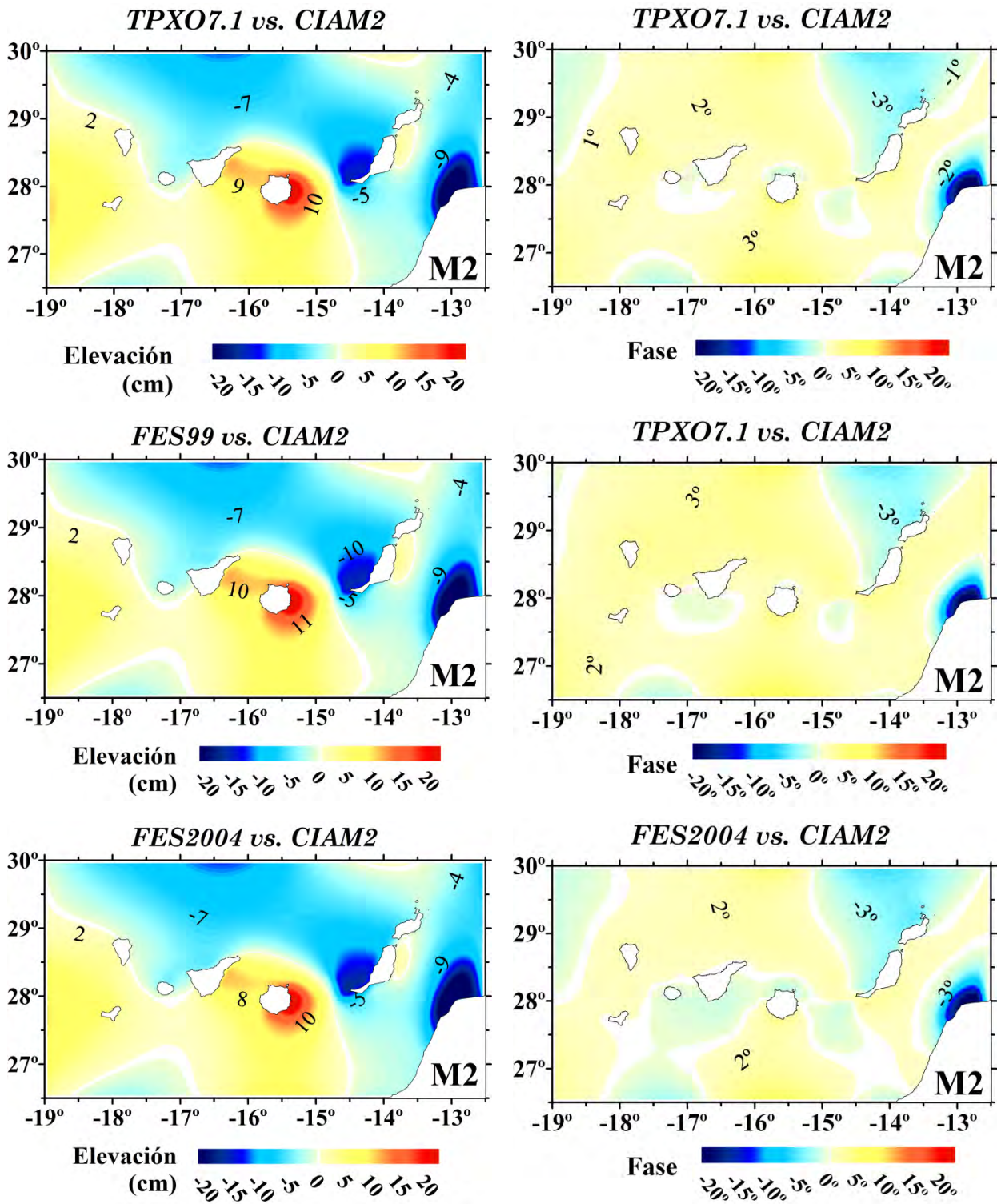
**FIGURA 5.12:** Diferencias en la amplitud de la marea oceánica entre los modelos CIAM2 y GOT00.2, para los principales constituyentes de marea. Obsérvese que la escala para  $M_2$  difiere de las restantes.



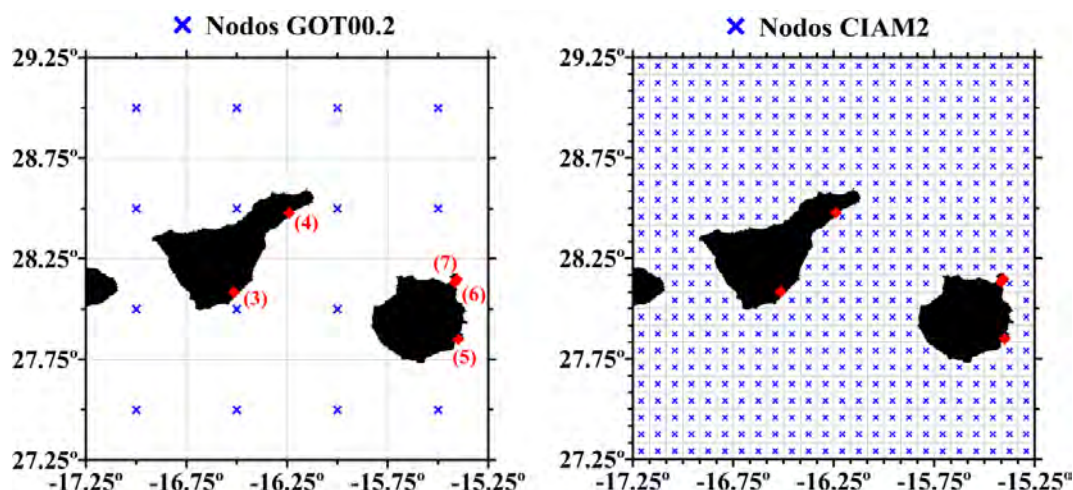


**FIGURA 5.13:** Diferencias en la fase de la marea oceánica entre los modelos CIAM2 y GOT00.2 para los principales constituyentes de marea. Obsérvese que las escalas para  $M_2$  y  $Q_1$  difieren de las restantes.

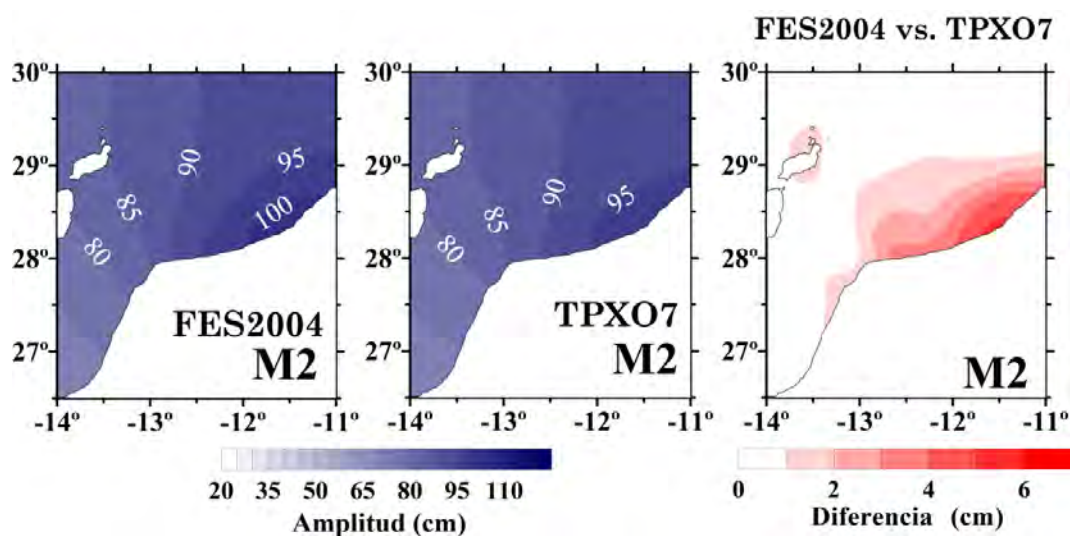




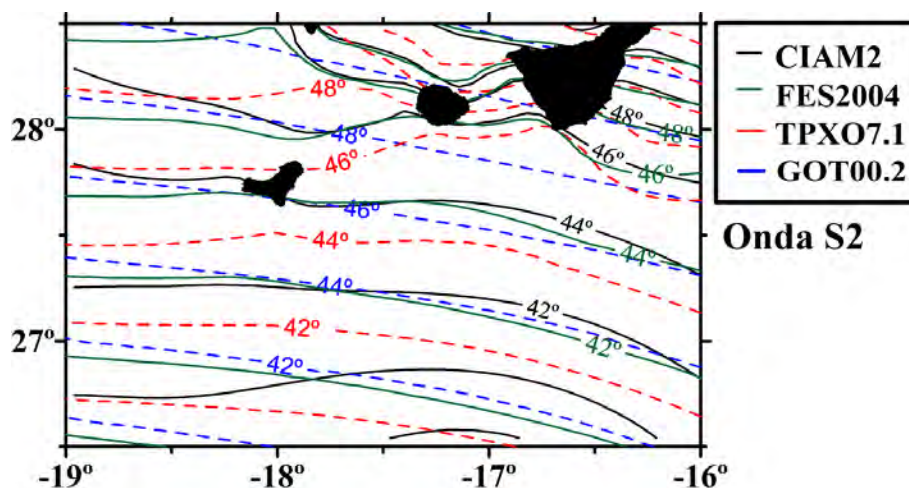
**FIGURA 5.14:** Diferencias en la amplitud (izda.) y la fase (dcha.) de la marea oceánica entre CIAM2 y los modelos globales TPXO7.1, FES2004 y FES99, para el constituyente de marea  $M_2$ .



**FIGURA 5.15:** Nodos oceánicos de las cuadrículas para los modelos de marea oceánica GOT00.2 (izda.) y CIAM2 (dcha.) en las proximidades de Tenerife y Gran Canaria. Los rombos rojos indican las observaciones mareográficas disponibles en el área representada.

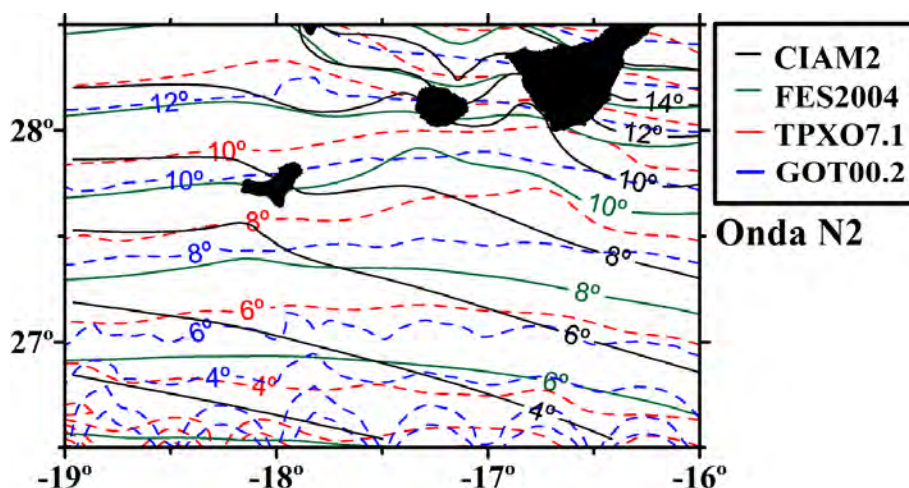


**FIGURA 5.16:** Amplitud (en cm) de la marea oceánica obtenida por los modelos de marea globales FES2004 y TPX07.1, para el constituyente de marea  $M_2$ , en las proximidades a la costa africana. Se representa, además, la diferencia obtenida entre ambos modelos.



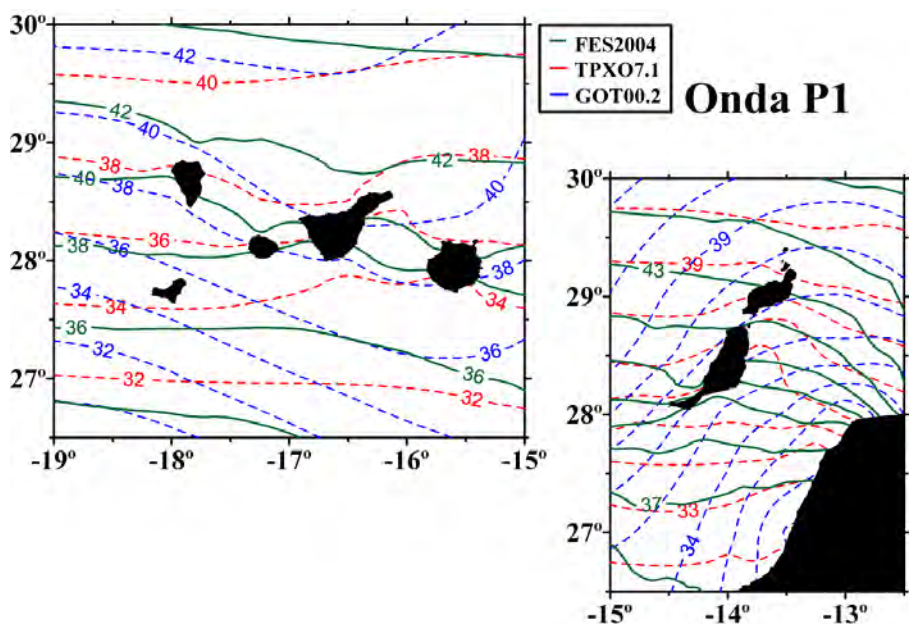
**FIGURA 5.17:** Líneas de co-fase de los modelos CIAM2 (línea negra), FES2004 (línea verde), TPX07.1 (línea punteada roja) y GOT00.2 (línea punteada azul), para  $S_2$ , al sur de la isla de Tenerife. Las fases, en grados, respecto de Greenwich.





**FIGURA 5.18:**

Líneas de co-fase de los modelos CIAM2 (línea negra), FES2004 (línea verde), TPXO7.1 (línea punteada roja) y GOT00.2 (línea punteada azul), para  $N_2$ , al sur de la isla de El Hierro. Las fases, en grados, respecto de Greenwich.



**FIGURA 5.19:**

Líneas de co-fase de los modelos FES2004 (línea verde), TPXO7.1 (línea punteada roja) y GOT00.2 (línea punteada azul), para el constituyente de marea  $P_1$ , al oeste del meridiano 15° O (izda.) y al este del mismo (dcha.). Las fases, en grados, respecto de Greenwich.

Los resultados obtenidos hasta el momento hacen necesario un estudio de los parámetros de marea en diversas estaciones mareográficas consideradas:

### Estación número 3, GRANADILLA (Tenerife)

En la estación de GRANADILLA<sup>11</sup>, las constates armónicas consideradas, facilitadas por PE, provienen del análisis armónico de una serie de datos de un año de longitud, correspondientes a 2004. Esta serie temporal presenta tres gaps de importancia (REDMAR, 2004), dos de los cuales se debieron a accidentes que ocasionaron que tanto el sensor como el resto de la instalación tuvieran que ser reemplazados. Puesto que actualmente, además de los informes anuales proporcionados por REDMAR, disponemos de una serie temporal (registrada en 2009 sin gaps significativos), es interesante contrastar los resultados obtenidos en el análisis armónico de esta serie con los facilitados en 2004 por PE. Los resultados de esta comparación, que se presentan en la Tabla 5.6, muestran que para cada constituyente armónico (exceptuando la fase de  $P_1$ ) las diferencias encontradas son,

<sup>11</sup> La ubicación geográfica de este mareógrafo se encuentra representada en la Fig. 5 (Apéndice 2) y sus coordenadas se listan en la Tabla 5.

aproximadamente, del orden del error obtenido en su determinación. En el caso de las fases para el constituyente  $P_1$ , sin embargo, las diferencias entre ambos análisis superan los  $10^\circ$ .

**TABLA 5.6:** Comparación entre las constantes armónicas proporcionadas por PE (serie temporal 2004) y las obtenidas mediante el programa VAV (serie temporal 2009), para la estación de GRANADILLA. Las amplitudes están expresadas en cm y las fases, respecto de Greenwich, en grados.

		2004	2009	Diferencia			2004	2009	Diferencia
$M_2$	Amp.	60.94	60.84 $\pm$ 0.08	0.10	$K_1$	Amp.	5.96	6.063 $\pm$ 0.06	0.10
	Fase	26.07	26.14 $\pm$ 0.08	0.07		Fase	40.17	41.93 $\pm$ 0.52	1.76
$S_2$	Amp.	24.45	24.73 $\pm$ 0.08	0.28	$O_1$	Amp.	4.69	4.724 $\pm$ 0.05	0.03
	Fase	47.09	47.47 $\pm$ 0.19	0.38		Fase	292.19	289.86 $\pm$ 0.63	2.33
$N_2$	Amp.	12.60	12.12 $\pm$ 0.08	0.48	$P_1$	Amp.	1.71	1.84 $\pm$ 0.06	0.13
	Fase	11.81	11.95 $\pm$ 0.37	0.14		Fase	35.08	24.12 $\pm$ 1.86	10.96
$K_2$	Amp.	6.95	7.02 $\pm$ 0.07	0.07	$Q_1$	Amp.	1.69	1.24 $\pm$ 0.05	0.45
	Fase	43.62	44.25 $\pm$ 0.57	0.63		Fase	232.84	235.05 $\pm$ 2.41	2.21

#### Estaciones números 2 (S. C. PALMA), 6 (LAS PALMAS-2) y 9 (ARRECIFE-IEO)

La red de mareógrafos de PE (REDMAR), constituida inicialmente por sensores acústicos, se ha ampliado paulatinamente con la incorporación de nuevas estaciones e instrumentación. En el caso de las Islas Canarias, a los dos primeros sensores acústicos instalados, S. C. TENERIFE y LAS PALMAS (estaciones números 4 y 6 en Tabla 5, Apéndice 2), se han incorporado entre los años 2001 y 2003 las estaciones de LA ESTACA, GRANADILLA, ARINAGA y ROSARIO, (números 1, 3, 5 y 8 en Tabla 5 en Apéndice 2, respectivamente), todas ellas equipadas con sensores de presión. A partir del año 2006, y después de exhaustivos experimentos de comparación entre diversos tipos de instrumentación, PE escogió para la ampliación de su red a partir de esta fecha la tecnología radar. Con esta nueva tecnología, entre los años 2007 y 2008, se instalaron en Canarias las estaciones LA PALMA, LAS PALMAS-2, ARRECIFE-PE y GOMERA (números 10, 11, 12 y 13 en Tabla 8 en Apéndice 2). Los datos observados en estas nuevas estaciones sólo están disponibles al público a través de la Web desde Febrero de 2009. Así, una vez que se ha dispuesto de un periodo de registro suficientemente largo ( $\sim 1$  año), los datos recopilados en estas estaciones durante 2009 se han utilizado para la validación del modelo CIAM2.

En particular, son de gran interés los resultados obtenidos en las estaciones LAS PALMAS-2 (nº 11), LA PALMA (nº 10) y ARRECIFE-PE (nº 12), puesto que se encuentran próximas a las estaciones LAS PALMAS (nº 6), S. C. PALMA (nº 2) y ARRECIFE-IEO (nº 9), respectivamente. En las tres nuevas estaciones, las constantes armónicas obtenidas mediante análisis armónico con el programa VAV se listan en las Tablas 9 y 10 (Apéndice 2). Asimismo, los resultados de la comparación entre las estaciones próximas se presentan como diagramas de barras en la Figura 6 (Apéndice 2). Las discrepancias más significativas en los parámetros de marea se observan en las estaciones próximas situadas en las islas de Lanzarote y La Palma (números 9 y 12, y 2 y 10,

respectivamente). En ambos casos, estas diferencias se atribuyen al emplazamiento de los mareógrafos:

- ARRECIFE-IEO y ARRECIFE-PE situadas al inicio y al final del muelle, respectivamente, en el puerto de Arrecife. Están separadas una distancia de unos 500 m (Fig. 2, Apéndice 2).
- S. C. PALMA, perteneciente al IEO, se localiza en el interior de la dársena deportiva del puerto de La Palma, mientras que LA PALMA se sitúa en el espigón de entrada a la misma, a unos 200 m de la anterior (Fig. 1, Apéndice 2).

Las observaciones de marea en las estaciones situadas en el interior del puerto (y que corresponden a las estaciones de mayor antigüedad), o en espacios semi-cerrados como las dársenas, están afectadas por efectos locales causados, entre otros, por la geometría del puerto o por su profundidad. Destaca, principalmente, la gran discrepancia existente entre las estaciones situadas en Arrecife. Se observa, en general, para la estación ARRECIFE-IEO, situada en el interior del puerto, una disminución en la amplitud de la marea oceánica (con respecto a la estación situada en el exterior, ARRECIFE-PE), que alcanza hasta varios centímetros en el caso de las principales ondas semi-diurnas ( $5,4\text{ cm}$  para  $M_2$ ). En esta misma estación se observa un retardo en las fases, para todas las ondas estudiadas, de unos  $27^m$  para  $M_2$  y  $30^m$  para  $K_1$ ).

Una vez presentadas las consideraciones anteriores, es posible extraer algunas conclusiones en relación con las fases de las ondas diurnas  $P_1$  y  $Q_1$ .

#### **Comparación de fases entre CIAM2, FES2004 y observaciones in-situ para las ondas $P_1$ y $Q_1$**

Anteriormente se comprobó que, aunque el patrón de propagación de las fases para el constituyente armónico  $P_1$  de los modelos globales (FES204, TPXO7.1 y GOT00.2) y CIAM2 presentaba una buena concordancia, éstas diferían en cuanto a su magnitud. Una vez que se han investigado diversas singularidades en los datos observados y que se han seleccionado las estaciones más adecuadas, se han comparado las fases en estos emplazamientos con las obtenidas por CIAM2 y FES2004. Puesto que, en general, los modelos globales presentan un desfase con respecto a CIAM2 de similar magnitud que FES2004, será suficiente presentar los resultados para este último.

La Tabla 5.7 lista las fases observadas para el constituyente  $P_1$  y las modeladas por CIAM2 y FES2004 en 10 emplazamientos distintos, distribuidos en las siete Islas Canarias. Debe observarse, en primer lugar, que el error en la fase estimada por observación para este constituyente, en todas las estaciones consideradas, es de unos  $2^\circ$ . Por tanto, la comparación entre los valores observados y modelados debe realizarse dentro de este margen de error. En general, se observa que CIAM2 presenta una mejor concordancia que FES2004 en todas las estaciones. Así, el valor medio de las diferencias entre FES2004 y las observaciones, exceptuando las dos islas orientales (Fuerteventura y Lanzarote) es de unos  $13^\circ$  (esto es, FES2004 presenta un retardo en fase para el constituyente  $P_1$  con respecto a las observaciones de, aproximadamente,  $52^m$ ). Para estas mismas estaciones, el valor medio de las diferencias entre CIAM2 y las observaciones se reduce a  $3^\circ$  (valor muy próximo al margen de error de las propias observaciones para este constituyente). En el caso de la estación de

ARRECIFE-PE, el valor observado de la fase es ligeramente inferior a los modelados, tanto por CIAM2 como por FES2004.

**TABLA 5.7:** Comparación de las fases observadas en las estaciones señaladas (Tablas 5 y 8 en Apéndice 2) con las modeladas por CIAM2 y FES2004, para la onda  $P_1$ .

Estación <sup>12</sup>	CIAM2	FES2004	Observado
1 LA ESTACA	25°	37°	19°
10 LA PALMA	32°	41°	32°
13 GOMERA	25°	38°	26°
3 GRANADILLA	26°	37°	24°
4 S.C. TENERIFE	29°	40°	23°
5 ARINAGA	28°	37°	25°
7 PTO. LUZ	29°	41°	30°
11 LAS PALMAS-2	29°	41°	25°
8 ROSARIO	35°	41°	35°
12 ARRECIFE-PE	40°	42°	28°

Análogamente, la Tabla 5.8 presenta las fases observadas para el constituyente  $Q_1$  y las modeladas por CIAM2 y FES2004. En este caso, el error en la determinación de la fase en el procedimiento de análisis de las series temporales es del orden de 2°-3°. Los resultados de la comparación muestran que, para la onda  $Q_1$ , las fases obtenidas por FES2004 se ajustan más a las observadas que las obtenidas por CIAM2, aunque hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Exceptuando las estaciones en Tenerife, Gran Canaria y Arrecife, el valor medio de la discrepancia con CIAM2 es de unos 6°. En el caso de FES2004 se reduce a 4°.
- En las estaciones en Tenerife y Gran Canaria, las discrepancias con CIAM2 se incrementan significativamente. Nuevamente, hay que tener presente la gran variabilidad espacial de las fases que presenta CIAM2 para este constituyente en torno a estas islas. Lógicamente, la interpolación del valor de la fase en la estación considerada, a partir de las celdas oceánicas próximas del modelo CIAM2, en la localización de una estación pueda diferir del valor real en la misma. Este hecho no conlleva que no exista tal variabilidad, como parece indicar FES2004.
- En ARRECIFE-PE ambos modelos discrepan del valor observado (12° y 10°, respectivamente). En este caso, como se ha reseñado anteriormente, el valor de la fase estimada por observación es anormalmente pequeño.

De lo anterior se puede deducir para  $Q_1$ :

- CIAM2 presenta una variabilidad muy alta en las proximidades a las costas, no reproducida por los modelos globales. A priori, no es posible establecer qué modelo se ajusta más a la realidad.
- En las islas de Tenerife y Gran Canaria las discrepancias encontradas entre las fases modeladas y las observadas pueden indicar que la resolución del modelo aun no es suficiente para representar la variabilidad de fases de este constituyente, en caso de existir. Esto será cierto,

<sup>12</sup> Las fases observadas listadas en esta Tabla corresponden a los resultados presentados en la Tabla 5.6 para la estación 3, GRANADILLA. La Tabla 7 (Apéndice 2), para las estaciones 1, 4, 5, 7 y 8. La Tabla 10 para las estaciones 10, 13 y 11

aun en mayor medida, con los modelos globales, aunque en principio se ajusten más a las observaciones.

- En este caso, los parámetros de marea obtenidos a través del análisis de las series observadas deben ser tenidos en cuenta con precaución, puesto que una calidad dudosa de los datos puede inducir errores en su determinación.

Por todo ello, aun no es posible extraer conclusiones definitivas sobre la representación precisa de las fases del constituyente  $Q_1$  en el modelo CIAM2. Remitimos, nuevamente, a los métodos de simulación y de cálculo del EOI para un análisis detallado de esta cuestión.

**TABLA 5.8:** Comparación de las fases observadas en las estaciones señaladas (Tablas 5 y 8 en Apéndice 2) con las modeladas por CIAM2 y FES2004, para la onda  $Q_1$ .

Estación <sup>13</sup>	CIAM2	FES2004	Observado
1 LA ESTACA	243°	238°	236°
10 LA PALMA	246°	244°	239°
13 GOMERA	227°	237°	234°
3 GRANADILLA	239°	240°	235°
4 S.C. TENERIFE	261°	243°	235°
5 ARINAGA	252°	241°	234°
7 PTO. LUZ	251°	244°	239°
11 LAS PALMAS-2	251°	244°	236°
8 ROSARIO	240°	244°	236°
12 ARRECIFE-PE	226°	246°	242°

### Comparación de CIAM2 con modelos regionales/locales

En las Tablas 5.9 y 5.10 se presenta el EMC de las diferencias y el RSS, calculados según se describió en las ecuaciones [4.8] y [4.9] (Cap. 4, Secc. 4.6), para el modelo hidrodinámico desarrollado por Fanjul et al. (1997) y CIAM2, en un total de 4 estaciones mareográficas. Asimismo, para cada onda se estima el EMC basado en el resultado de las 4 estaciones consideradas, según la ecuación [4.10]. En general, se observa una mayor concordancia de CIAM2 con las observaciones para todos los constituyentes de marea listados, exceptuando:

- Para  $M_2$ , la estación LAS PALMAS-2. Aunque las diferencias en el EMC entre ambos modelos es pequeña (0,4 cm), el desajuste encontrado para Fanjul et al. (1997) con respecto a las observaciones se debe a un retardo de varios grados en las fases, mientras que para CIAM2 la discrepancia se debe a un incremento de éste último en las amplitudes modeladas.
- Para el constituyente  $O_1$ , la estación LA PALMA.
- Para el constituyente  $P_1$ , exceptuando LAS PALMAS-2, el EMC obtenido por Fanjul et al. (1997) en las restantes estaciones es inferior al obtenido con CIAM2 (0,2 cm en S. C. TENERIFE y LAS PALMAS-2, y 0,5 cm en ARRECIFE-PE). La discrepancia más significativa se produce en la estación situada en Arrecife, donde el valor observado para  $P_1$  presenta un adelanto de fase, no sólo con respecto a CIAM2, sino también con los modelos globales. Ello supone una alteración anómala en la propagación general de las fases, que se

produce de sur a norte. Esta anomalía puede deberse a una imprecisión en su determinación o incluso a un efecto local en la ubicación del mareógrafo.

Es importante destacar que el modelo desarrollado por Fanjul et al. (1997) no incluye la onda diurna  $Q_1$ . Cuando se estima el EMC a partir del resultado en las 4 estaciones se obtiene que CIAM2 se ajusta mejor a las observaciones que el modelo desarrollado por Fanjul et al. (1997), exceptuando las ondas  $O_1$  y  $P_1$ , para las que ambos modelos presentan resultados similares. Finalmente, calculando el RSS en cada una de las estaciones (de los 7 constituyentes listados en la Tabla 5.9), se encuentra que CIAM2 reduce significativamente el desajuste entre Fanjul et al. (1997) y las observaciones en un 76% en LA PALMA, un 52% en S. C. TENERIFE, un 5% en LAS PALMAS-2 y un 80% en ARRECIFE-PE.

**TABLA 5.9:** Amplitudes (cm) y fases modeladas por Fanjul et al. (1997) y CIAM2 en las estaciones S. C. TENERIFE (Tabla 7, Apéndice 2) y LA PALMA, LAS PALMAS-2 y ARRECIFE-PE (Tablas 9 y 10, Apéndice 2). Se indica el EMC (cm) de las diferencias entre las observaciones y los dos modelos. Se presenta el EMC calculado con las cuatro estaciones. Las fases están expresadas respecto de Greenwich, en grados.

Estación		M <sub>2</sub>						S <sub>2</sub>						
		Fanjul et al. (1997)			CIAM2			Fanjul et al. (1997)			CIAM2			
		Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	
10	PALMA	60.8	36.0	8.0	64.26	31.45	1.94	24.4	62.2	4.0	25.49	52.47	0.40	
4	TENERIFE	67.4	37.7	12.0	78.86	30.91	6.09	26.8	62.0	4.7	28.05	52.79	0.31	
11	PALMAS-2	68.1	35.3	12.1	88.36	28.62	12.49	27.2	62.0	4.9	28.76	53.23	0.48	
12	ARRECIF-PE	81.7	41.6	10.4	83.16	35.56	1.84	32.2	63.1	2.6	32.08	58.30	0.26	
EMC(N=4)				15.2			5.00			2.9			0.26	

Estación		N <sub>2</sub>						K <sub>2</sub>						
		Fanjul et al. (1997)			CIAM2			Fanjul et al. (1997)			CIAM2			
		Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	Amp	Fase	EMC	
10	PALMA	12.7	18.0	0.5	13.29	16.03	0.32	6.7	56.7	0.9	7.42	46.62	0.55	
4	TENERIFE	14.0	17.6	1.2	14.30	17.37	0.94	7.4	56.5	1.2	7.50	48.48	0.46	
11	PALMAS-2	14.1	17.0	1.2	15.08	17.12	0.93	7.5	56.5	1.2	7.75	49.54	0.50	
12	ARRECIF-PE	17.0	22.8	1.0	17.86	19.76	0.94	8.9	63.3	1.3	8.91	55.44	0.13	
EMC(N=4)				0.7			0.58			0.8			0.31	

Estación		K <sub>1</sub>						O <sub>1</sub>						
		Fanjul et al. (1997)			CIAM2			Fanjul et al. (1997)			CIAM2			
		Am	Fase	EMC	Am	Fase	EMC	Am	Fase	EMC	Am	Fase	EMC	
10	PALMA	5.3	36.1	0.7	5.64	41.71	0.20	4.5	290.8	0.2	4.27	295.32	0.40	
4	TENERIFE	5.7	35.2	1.0	6.15	45.10	0.54	4.9	290.3	0.3	4.61	294.15	0.11	
11	PALMAS2	5.8	34.6	0.7	6.20	45.29	0.70	5.0	290.3	0.2	4.64	292.72	0.27	
12	ARRE-PE	6.4	37.7	0.8	6.78	41.32	0.24	5.5	295.1	0.2	5.53	294.14	0.23	
EMC(N=4)				0.6			0.33			0.2			0.19	

Estación		P <sub>1</sub>					
		Fanjul et al. (1997)			CIAM2		
		Am	Fase	EMC	Am	Fase	EMC
10	PALMA	1.8	27.7	0.2	1.5199	25.7779	0.40
4	TENERIFE	1.9	26.8	0.4	1.692	29.0971	0.62
11	PALMAS2	2.0	26.3	0.3	1.7741	28.8088	0.12
12	ARRE-PE	2.2	29.5	0.1	1.6255	39.9361	0.67
EMC(N=4)				0.2			0.36



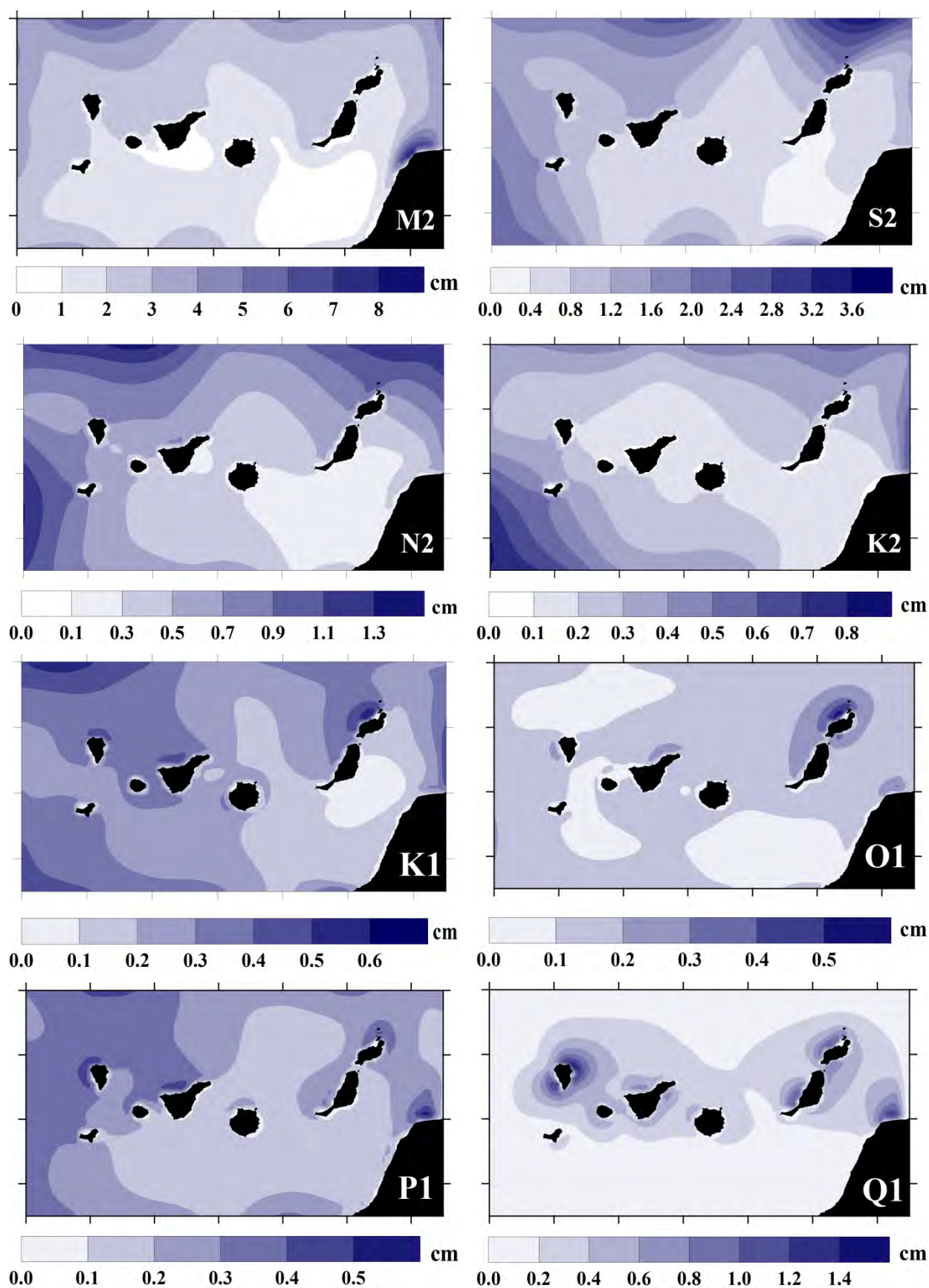
**TABLA 5.10:** Listado de los valores del RSS (obtenido de acuerdo con la ecuación [4.9]), para los siete constituyentes de marea ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$  y  $P_1$ ) en cada una de las estaciones indicadas, para los modelos de Fanjul et al. (1997) y CIAM2.

Estación	MODELO	
	Fanjul et al. (1997)	CIAM2
	RSS (cm)	RSS (cm)
LA PALMA	9.0	2.2
S.C. TENERIFE	13.0	6.2
LAS PALMAS-2	13.2	12.6
ARRECIFE-PE	10.9	2.2

### 5.6.3 Estadísticas de los Errores en el Modelo CIAM2

Con el fin de realizar un estudio estadístico de los errores en el modelo de carga oceánica CIAM2, se ha utilizado el método de simulación de Monte Carlo (Dushaw et al., 1997), siguiendo la técnica descrita en la Sección 4.6.3 (Cap. 4). La Figura 5.20 muestra las desviaciones estándar obtenidas en la elevación de la marea oceánica para cada onda del modelo CIAM2. Se tiene que:

- Para la onda  $M_2$ , el valor medio de la desviación estándar es de 2 cm. En general, los errores para esta onda son inferiores a 4 cm en el dominio del modelo, excepto en las proximidades de la costa Africana donde se alcanza un máximo de 8 cm.
- Para  $S_2$ ,  $N_2$  y  $K_2$  el valor medio de la desviación estándar es de, aproximadamente, 1 cm, 0,5 cm y 0,3 cm, respectivamente. En este caso, los valores máximos se encuentran en las proximidades de las fronteras abiertas del modelo.
- Para las ondas diurnas, los valores máximos obtenidos en las desviaciones estándar son inferiores a 0,6 cm, exceptuando  $Q_1$ , donde se alcanza un error máximo de 1,6 cm. Para esta onda, a diferencia de las anteriores, los errores se concentran en las proximidades a las costas.



**FIGURA 5.20:** *Desviaciones estándar obtenidas para los principales constituyentes de marea modelados por CIAM2 tras aplicar el método de simulación de Monte Carlo. Obsérvese que las escalas son diferentes para cada armónico.*

## 5.7 Conclusiones

En este Capítulo se ha elaborado un modelo de carga oceánica para el entorno del Archipiélago Canario, denominado CIAM2, con resolución  $5 \times 5'$  y que incluye los 8 constituyentes de marea principales ( $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ). Previamente a la construcción del modelo se ha realizado una descripción detallada de la zona objeto de estudio y de los trabajos previos en la región (Secciones 5.2 y 5.3). Asimismo, en la Secc. 5.4, se han recopilado y descrito las observaciones asimiladas en el modelo: medidas mareógrafos (un total de nueve) y de altimetría por satélite (10 años de observación T/P). El desarrollo de CIAM2 (Figuras 5.10 y 5.11) se describe propiamente en la Secc. 5.5 e incluye la construcción del modelo hidrodinámico y de la técnica de asimilación de datos, basada en el *método de los representantes*. En la Sección 5.6 se han presentado los resultados obtenidos, esto es el modelo CIAM2. Destaca el notable gradiente en amplitud, para el constituyente dominante  $M_2$ , en las regiones del estrecho entre Tenerife y Gran Canaria, alrededor de esta última, al sur de Fuerteventura y frente a la costa africana, en las proximidades a cabo Jubi. El modelo CIAM2 se ha validado a partir de:

- La comparación con modelos globales, de la que se concluye que las mayores discrepancias (del orden de 10 a 20 cm) se producen en el estrecho entre Tenerife y Gran Canaria y al sur de Fuerteventura y se atribuyen a que la resolución de los modelos globales no permite reproducir la variabilidad de marea que se produce en estas zonas.
- La comparación con modelos locales pre-existentes y con observaciones independientes pone de manifiesto la buena representación de la marea oceánica por parte CIAM2.
- Para las ondas  $P_1$  y  $Q_1$ , CIAM2 discrepa con respecto a los modelos globales, por lo que se realiza un estudio de detallado basado en la comparación con observaciones. Para la onda  $P_1$ , el modelo CIAM2 presenta una mejor concordancia en todas las estaciones mareográficas que los modelos globales (en particular que FES2004). En el caso de  $Q_1$ , se observa que las discrepancias (en las fases) de CIAM2 incrementan con respecto a las obtenidas para FES2004 en las estaciones situadas en las islas de Tenerife y Gran Canaria. Este hecho puede indicar que la resolución de CIAM2 aun no es suficiente para representar la alta variabilidad de fases que se produce para este constituyente. Esto será cierto, aun en mayor medida, con los modelos globales, aunque en principio se ajusten más a las observaciones.
- Un estudio estadístico de los errores en CIAM2 basado en el método de simulación de Monte Carlo (Fig. 5.20). Para  $M_2$ , el valor medio de las desviaciones estándar en el dominio del modelo es de 1,2 cm. Excepcionalmente, y de forma puntual, se produce una desviación estándar más alta cerca de la costa Africana (de un 11% de la amplitud de la marea en la zona).

Para los trabajos llevados a cabo en este Capítulo (además, de los referenciados a lo largo del Capítulo) se han utilizado los programas propios descritos en el Cap. 4 (Secc. 4.7).

## Capítulo 6

# Cálculo del EOI en la Península Ibérica y Canarias. Validación de los Modelos de Carga Oceánica IBER01 y CIAM2

*El principal objetivo de este Capítulo es el cálculo de las variaciones de gravedad y los desplazamientos de la superficie terrestre provocados por el Efecto Oceánico Indirecto en la Península Ibérica, norte de África y el Archipiélago Canario, sobre la base de las metodologías, modelos de carga oceánica y programas de cálculo desarrollados en los Capítulos precedentes. Tras la determinación experimental de los parámetros de marea gravimétrica en diversas estaciones situadas en las zonas de estudio de esta memoria, se ha comparado el EOI observado, utilizando el modelo Terrestre DDW (Dehant et al., 1999), con el calculado empleando modelos oceánicos de carga, teniendo en cuenta que estas observaciones gravimétricas constituyen una herramienta de validación independiente para dichos modelos oceánicos, en particular para IBER01 y CIAM2.*

*En la Sección 6.2 se presentan los antecedentes en relación con el EOI y las observaciones de marea gravimétrica en la Península Ibérica y las Islas Canarias. Las Secciones 6.3 y 6.4 contienen el propio cálculo del EOI, realizado con el programa ECOM para ocho constituyentes de marea principales:  $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_2$ . La Sección 6.5 describe la metodología empleada para la comparación del EOI calculado con el observado en medidas de marea gravimétrica. En las Secciones 6.6 y 6.7 se presentan los resultados obtenidos de esta comparación, se calculan las correspondientes correcciones por carga de los factores gravimétricos y desfases, así como los residuos finales obtenidos en diferentes lugares de observación. A su vez, el análisis y discusión de estos resultados posibilita la validación de los modelos oceánicos IBER01 y CIAM2. En la última Sección se recopilan las conclusiones de este Capítulo.*

## 6.1 Introducción

Como se ha tratado a lo largo de esta memoria, el efecto de carga causado por la marea oceánica es una de las principales perturbaciones presentes en observaciones geodésicas y gravimétricas de alta precisión. Dicho efecto debe calcularse con gran exactitud para corregir las medidas de gravedad, desplazamientos, etc., antes de que éstas puedan utilizarse para investigaciones geodésicas y geofísicas que abarquen escalas de tiempo que transcurren desde varias horas hasta años (p. ej., Neumeyer et al., 2005). La exactitud en el cálculo del EOI depende, principalmente, de la metodología de cálculo, de las funciones de Green de carga consideradas, de la determinación de las

líneas costeras y de los modelos de marea oceánica utilizados. En particular, éstos últimos son la principal fuente de error, especialmente en zonas donde la amplitud de la marea oceánica es alta o tiene patrones de propagación complejos (p. ej., Sato et al., 2008; Neumeyer et al., 2005; Baker y Bos, 2003). Este es el caso de las áreas circundantes a la Península Ibérica y el Archipiélago Canario.

Por otra parte, la interpretación del análisis de las medidas de marea terrestre es una herramienta eficaz para mejorar los modelos de marea oceánica. Cuando se construyen nuevos modelos se deben validar a partir de observaciones independientes. Habitualmente, tanto para su validación como para la determinación de su exactitud, o bien se compara el modelo con otros preexistentes, o bien se utilizan medidas procedentes de mareógrafos situados en estaciones pelágicas, insulares y costeras (p. ej., Andersen et al., 1995; Shum et al., 1997). En este último caso, cuando los datos mareográficos están asimilados en el propio modelo, como es el caso de los modelos IBER01 y CIAM2, su validación puede resultar sesgada (p. ej., Llubes y Mazzega, 1997). Además, hay que tener en cuenta que, por lo general, la concordancia entre modelos o con observaciones in-situ no implica necesariamente exactitud ya que (p. ej., King et al., 2005):

- Con frecuencia, no se puede establecer el origen de las discrepancias existentes entre los modelos.
- Las observaciones in-situ, que generalmente están muy espaciadas, permiten extraer sólo conclusiones locales. Además, dichas conclusiones deben analizarse con detalle, puesto que las propias observaciones pueden estar sujetas a errores o no ser representativas para la resolución del modelo debido a efectos locales singulares.

Un método alternativo para la validación del modelo oceánico se basa en la comparación de la carga oceánica calculada, empleando dicho modelo, con observaciones de marea gravimétrica. En los últimos años son numerosas las investigaciones llevadas a cabo que ponen de manifiesto la utilidad de las medidas de marea gravimétrica como herramienta de validación de los modelos de marea (p. ej., Timofeev et al., 2006; Jentzsch et al., 2000; Baker y Bos, 2003). Las observaciones de la gravedad, después de diversas correcciones (como son la marea de la tierra sólida y otros efectos atmosféricos y ambientales), son estimaciones empíricas de la señal de carga oceánica (p. ej., Neumeyer et al., 2005; Llubes y Mazzega, 1997). Por tanto, las observaciones de marea gravimétrica son una fuente de datos independientes del modelo oceánico, lo que permite extraer conclusiones interesantes, siempre que las medidas y la calibración del instrumento de medida sean lo suficientemente exactas y precisas. Como se indicó en el Capítulo 2, las medidas realizadas con gravímetros relativos superconductores (GS) pueden alcanzar una precisión de 0,001  $\mu\text{Gal}$  tras dos o tres años de observación continua (Crossley et al. 1999). Pero, puesto que la calibración de los GS es del orden del 0,1%, y su resolución de 0,01  $\mu\text{Gal}$ , la exactitud de las medidas es de 0,1  $\mu\text{Gal}$ . En el caso de las medidas realizadas con gravímetros relativos de muelles, la resolución es del orden de 1  $\mu\text{Gal}$ , lo que permite alcanzar precisiones en registro continuo del orden de 0,1  $\mu\text{Gal}$  (Baker y Bos, 2003). Estas precisiones hacen posible que este tipo de medidas puedan utilizarse en el estudio de las

variaciones de gravedad originadas por el potencial luni-solar de marea (Baker et al. 1996<sup>1</sup>; Baker y Bos 2003). Más aun, la comparación de la marea gravimétrica observada con el EOI calculado utilizando diversos modelos de marea oceánica, permite estudiar la adecuación de éstos a la zona de interés (Sato et al., 2008; Neumeyer et al., 2005).

En los Capítulos precedentes, se realizaron diversas validaciones de los modelos de marea oceánica contruidos para la región de la Penínsulas Ibérica (IBER01) y el Archipiélago Canario (CIAM2), que permitieron extraer conclusiones de interés. Más concretamente, se compararon estos modelos con observaciones mareográficas y con otros modelos globales y regionales (contruidos a partir de diferentes metodologías, conjuntos de datos y validados, a su vez, con observaciones independientes). En este Capítulo se lleva a cabo la validación de ambos modelos a partir de la comparación con observaciones precisas de marea terrestre gravimétrica disponibles.

Con estas consideraciones, los principales objetivos de este Capítulo son dos:

- El cálculo preciso del efecto de carga oceánica (en desplazamiento y gravedad) en las regiones de la Península Ibérica y del Archipiélago Canario, sobre la base de las metodologías y técnicas discutidas previamente. Todo esto, haciendo uso de los programas de cálculo desarrollos y de los modelos de carga oceánica elaborados para tal fin.
- La validación de los modelos oceánicos de marea desarrollados en esta memoria, IBER01 y CIAM2.

En ambos casos, se realiza un análisis detallado de los resultados obtenidos. Las conclusiones obtenidas darán pie, a su vez, al establecimiento de los trabajos y líneas de investigación futuras a que da lugar la investigación llevada a cabo en esta memoria.

En la Sección 6.2 se revisan brevemente los trabajos existentes en la literatura en relación con el EOI calculado y el observado en la Península Ibérica y en el Archipiélago Canario. Las Secciones 6.3 y 6.4 se dedican íntegramente al estudio del EOI, para gravedad y desplazamientos de la superficie terrestre, en ambas regiones. El cálculo del EOI se lleva a cabo utilizando el programa ECOM (desarrollado en el Cap. 2) y los modelos oceánicos IBER01 y CIAM2 (desarrollados en los Cap. 4 y 5, respectivamente). Además, se evalúa la influencia de los diferentes parámetros y modelos involucrados y, posteriormente, se comparan los resultados obtenidos con trabajos previos. En la Sección 6.5 se describe la metodología seguida para la contrastación del EOI calculado con el observado a partir de series temporales de variaciones de la gravedad. En las Secciones 6.6 y 6.7 se aplica a dicha metodología particularizando para los modelos IBER01 y CIAM2. Con este fin se describen, en primer lugar, las observaciones de marea gravimétrica disponibles en ambas zonas, el tipo de gravímetros utilizados y su calibración, las series de datos utilizadas y los resultados de los correspondientes análisis de marea gravimétrica realizados. Posteriormente, se compara el EOI

---

<sup>1</sup> Según Baker et al. (1996) las medidas de marea gravimétrica deben alcanzar una precisión de al menos el 0,2% en amplitud y 0,1° en fases, para que éstas puedan utilizarse para contrastar modelos de tierra teóricos, así como para discriminar entre modelos de marea oceánica.

calculado con el residual observado en las diferentes estaciones gravimétricas y se exponen los resultados. Finalmente, las conclusiones extraídas en este Capítulo se presentan en la Sección 6.8.

## 6.2 Antecedentes

Los primeros trabajos llevados a cabo en la Península Ibérica, en relación con el cálculo del EOI y con la observación de la marea terrestre gravimétrica, corresponden a Vieira et al. (1983, 1986, 1986b, 1986c), Vieira y Camacho (1988) y Camacho et al. (1991). En estos trabajos, los autores realizan diversos estudios comparativos entre el EOI observado y el calculado, a partir de los modelos globales pioneros (p. ej., SCH80). Cabe señalar que, en estos trabajos, las observaciones de marea gravimétrica disponibles en la Península Ibérica fueron iniciadas, ampliadas y, en ocasiones, corregidas por los autores en el transcurso de sus investigaciones. En los trabajos anteriormente señalados destacan los resultados obtenidos para los constituyentes  $M_2$  y  $S_2$  con el modelo SCH80, complementado con el primer modelo regional desarrollado para el entorno de la Península Ibérica (Vieira et al. 1986; 1986b) descrito en el Capítulo 4. En esta línea, también deben ser mencionados los trabajos de Vieira (1981) y Vieira y Torroja (1983) para el área del Sistema Central, donde los autores tratan de poner luz a las discrepancias obtenidas al Norte y al Sur de este Sistema. Con posterioridad a los trabajos de Vieira y sus coautores, Francis y Melchior (1996) llevan a cabo un estudio del efecto oceánico indirecto en la Península Ibérica obtenido a partir de los primeros modelos de altimetría por satélite, CSR3.0 y FES95.2, además del modelo SCH80. Sus resultados, únicamente disponibles para el constituyente de marea  $M_2$ , muestran grandes discrepancias entre los modelos considerados, que alcanzan hasta varios microgales en estaciones próximas a la costa. Estos resultados ponen de manifiesto, como explican los propios autores, la necesidad de desarrollar modelos de marea de alta resolución para esta región concreta. Análogamente, Baker et al. (1991) comparan las variaciones de la gravedad causadas por el EOI observadas mediante gravímetros relativos (para las ondas  $M_2$  y  $O_1$ ), con las calculadas a partir de diversos modelos de marea oceánica en Europa. En la Península Ibérica se tienen en cuenta las observaciones realizadas en la estación fundamental 0401-Valle de los Caídos (Tabla 6.1). Asimismo, estos autores investigan la influencia de los modelos de Tierra en el cálculo del EOI y encuentran discrepancias en los resultados utilizando un modelo de Tierra elástica PREM y el anelástico de Zschau (Cap. 2, Secc. 2.5.1.3) en un rango del 1 al 4%. Más recientemente, Fernández et al. (2008) tratan, nuevamente, con la interpretación de los residuos de marea gravimétrica para las ondas  $M_2$  y  $O_1$ , usando los valores de carga obtenidos en la pasada década de los años 80 por Vieira y sus coautores.

En el Archipiélago Canario las investigaciones relacionadas con la marea terrestre y el EOI se iniciaron en 1987, cuando se establecieron en la isla de Lanzarote las primeras estaciones destinadas, entre otros, a este fin (Vieira et al., 1991). Posteriormente, se realizaron observaciones de marea gravimétrica en otras islas del archipiélago: en Tenerife en 1999 (Arnoso et al., 2000) y en El Hierro

en 2008<sup>2</sup> (Arnosó et al., 2009). A lo largo de los años, se han presentado los resultados obtenidos a partir de dichas observaciones y haciendo uso de los modelos de marea oceánica disponibles en cada momento, incluidos los primeros modelos de marea desarrollados específicamente para la región Canaria (Cap. 5). Entre estos trabajos se encuentran los llevados a cabo por Arnosó et al. (2001a; 2001b; 1999) en la isla de Lanzarote. En ellos, los autores comparan el EOI observado (en diferentes localizaciones de la isla y con diversa instrumentación) con el calculado, a partir de los modelos SCH80, TPX02, FES95.2, CSR3.0 y los modelos para la región Canaria INSP3W y CLM (Cap. 5). Un estudio similar realizan Arnosó et al. (2000) en Tenerife. En general, los resultados obtenidos en los trabajos anteriores estaban limitados por las imprecisiones existentes en los modelos. Por ejemplo, los cálculos del EOI realizados a partir de diversos modelos globales, suplementados o no con otros regionales, muestran grandes discrepancias que superan 1  $\mu\text{Gal}$  para la onda de marea  $M_2$  y 0,6  $\mu\text{Gal}$  para  $O_1$ .

### 6.3 Variaciones de Gravedad y Desplazamientos Originados por el Efecto Oceánico Indirecto en la Península Ibérica y el Norte de África

La marea oceánica en el entorno de la Península Ibérica se caracteriza por una complicada propagación espacial, así como por elevadas amplitudes en la región Atlántica (Cap. 4). Estas características propician que la amplitud del EOI originado sea elevada. Por ejemplo, en la zona del Golfo de Vizcaya las variaciones de la gravedad causadas por el EOI alcanzan valores de hasta 9  $\mu\text{Gal}$  para la onda  $M_2$ . Incluso a grandes distancias de la costa (200-300 km) se tienen valores que sobrepasan los 4 ó 5  $\mu\text{Gal}$  de amplitud. Por otra parte, los desplazamientos radiales de la corteza terrestre que origina el EOI son de, aproximadamente, 30 mm en el norte peninsular y de 10 mm en las proximidades de la costa mediterránea, para esta misma onda.

Para determinar el EOI en la Península Ibérica y en la región norte del continente africano que incluye Ceuta y Melilla, se ha utilizado el software ECOM (Secc. 2.6, Cap. 2). Se ha calculado el EOI para los ocho constituyentes de marea principales, en un total de 24 localizaciones en el interior de la Península más uno en el continente africano, la estación MEL<sup>3</sup> (Fig. 6.1). Estas localizaciones corresponden a las estaciones de marea gravimétrica disponibles en la región. En la Península, las estaciones se encuentran situadas a diversas distancias de los océanos circundantes, con una distribución de una estación cada 250 km, aproximadamente, aunque con mayor densificación en algunas áreas (Tabla 6.1). El procedimiento de cálculo y los parámetros y modelos utilizados son:

<sup>2</sup> Los resultados obtenidos han sido aceptados para su publicación en la revista *Journal of Geodynamics*. “Verifying the body tide at the Canary Islands, using tidal gravimetry observation”. J. Arnosó, M. Benavent, M. Bos y F.G. Montesinos.

<sup>3</sup> Para el cálculo de los mapas de carga en la región africana, en el interior del dominio del modelo, se han considerado una serie de puntos (~100) distribuidos de manera uniforme. Las elevaciones del terreno, para el cálculo de la componente de atracción Newtoniana en el caso de las variaciones de la gravedad, se han obtenido a partir del Atlas Digital del Terreno GEBCO-30s (Secc. 3.4.1.2, Cap. 3).



- El cálculo se basa en la convolución de las funciones de Green de carga con un modelo de marea oceánica (Secc. 2.5.1, Cap. 2). El efecto de la atracción directa de las masas de agua oceánica tiene en cuenta la altura del punto de cálculo.
- Las funciones de Green de carga utilizadas son las calculadas por Farrell (1972) para el modelo de Tierra elástico Gutenberg-Bullen con corteza continental. Sus valores se obtienen mediante una interpolación spline cúbica de los valores tabulados. Cuando se requieran los valores asintóticos de los números de Love de carga para distancias angulares inferiores a las tabuladas, se utilizan los calculados por Farrell (1972) para el modelo de Tierra considerado.
- Se ha utilizado el modelo global FES2004, suplementado en el entorno de la Península Ibérica con el modelo regional IBER01. Si las celdas oceánicas del modelo global solapan los límites del dominio del modelo regional se considera, únicamente, la fracción de agua contenida en el exterior del dominio. Esto es, se hace la coincidencia exacta de ambos modelos.
- El ajuste riguroso del modelo oceánico a las líneas de costa se ha llevado a cabo refinando la cuadrícula oceánica en las proximidades a las mismas, utilizando ficheros de máscaras tierra/agua de alta resolución del Atlas Digital GEBCO-1min (IOC, 2003). Para cada punto de cálculo, el programa ECOM realiza el refinamiento de forma automática, subdividiendo recursivamente cada celda oceánica, dentro del área de refinamiento seleccionado, en cuatro sub-celdas más pequeñas, hasta que la distancia desde éstas hasta el punto de cálculo sea mayor que 20 veces el radio de la celda<sup>4</sup>. La elección del radio de refinamiento se realiza en función de la distancia del punto de cálculo al océano. Así, para puntos a distancias: de 0 – 50 km, se considera un radio de refinamiento de 2° (estaciones MEL, 0403, 0404, 0406, 0411, 0427, 0434 y 0480), de 50 – 150 km, el radio de refinamiento es de 3° (estaciones ALG, 0405, 0420 y 0424) y de 150 – 200 km, el radio de refinamiento de 4° (estaciones 0417 y 0433). Para los restantes puntos, la resolución de la cuadrícula oceánica es la propia del modelo IBER01, de 1/12°×1/12°. Además, cuando el área de refinamiento abarca una extensión que comprende celdas del modelo regional y del global, dicho refinamiento se realiza sin que se produzca solapamiento entre ambos modelos. En cada sub-celda resultante del refinamiento, el valor de la marea se obtiene mediante interpolación FES2004 o IBER01, según corresponda.
- Los valores de los parámetros involucrados en el cálculo del EOI son: la densidad del agua del mar 1.027 kg/m<sup>3</sup>, el radio terrestre 6.371.008,7714 m y la constante de gravitación universal  $6,67259 \times 10^{-11}$  m/(kg·s<sup>2</sup>).

---

<sup>4</sup> Con esta condición se garantiza que la respuesta terrestre a la carga producida por la celda oceánica sea equivalente a la respuesta debida a la carga de una masa puntual unitaria que actúa en el centro de dicha celda (Secc. 2.5.1.3.2).

**TABLA 6.1:** Coordenadas geográficas de las estaciones de marea gravimétrica en la Península Ibérica y Melilla. Se señalan las estaciones pertenecientes a la Red Española de Marea Gravimétrica (Instituto de Astronomía y Geodesia, CSIC-UCM) (con observaciones realizadas antes del año 2005) y las observaciones realizadas con posterioridad a 2005.

Código	Nombre	Descripción	Latitud (°N)	Longitud (°E)	Altitud (m)	Dist. Mar (km)
<b>OBSERVACIONES REALIZADAS CON POSTERIORIDAD A 2005<sup>5</sup></b>						
MEL	Melilla	Melilla, Acto. Millán Astray.	35.3056	-2.9570	114.6	1
ALG	Algodonales	Ayto. Algodonales, Cádiz.	36.8800	-5.4047	355.5	55
V-ABS	Valle-Absoluta	Chalet, Valle de los Caídos, Madrid.	40.6492	-4.1433	1212.4	350
P-IAG	Pilar-IAG	Facultad de Matemáticas (UCM), Madrid.	40.4507	-3.7240	638.8	310
<b>OBSERVACIONES REALIZADAS CON ANTERIORIDAD A 2005 (RED ESPAÑOLA DE MAREA GRAVIMÉTRICA)</b>						
0401	Valle-Caídos	Flanco Sur Sierra de Guadarrama, Madrid.	40.6420	-4.1550	1280.0	350
0402	Madrid-Facultad	Facultad de Ciencias (UCM), Madrid.	40.4520	-3.7240	630.0	310
0403	Granada	Observatorio Geofísico de la Cartuja.	37.1869	-3.5922	774.0	50
0404	Santander	Residencia profesores, Univ. Santander.	43.4661	-3.8068	25.0	0
0405	Burgos	Sótano Gobierno Civil de Burgos.	42.3406	-3.7046	850.0	120
0406	San Fernando	Instituto y Observatorio de la Marina.	36.4617	-6.2054	25.0	0
0407	Sepúlveda/Segovia	Sótanos de la prisión Sepúlveda.	41.2986	-3.7585	1040.0	240
0409	Cubillos/Zamora	Iglesia Cubillos del Pan, Zamora.	41.5742	-5.7404	667.0	220
0410	Toledo	Est. Sismológica del Tajo, Cuenca del Tajo.	39.8578	-4.0420	512.0	320
0411	Barcelona	Fac. Ciencias, Univ. Autónoma de Barcelona.	41.5028	2.0885	200.0	20
0412	Carbonero/Segovia	Bodega de D. Antonio García Rubio.	41.1222	-4.2665	920.0	315
0413	Ciudad Real	Sótanos del edificio múltiple de Ministerios.	38.9864	-3.9312	600.0	250
0414	La Granja/Segovia	Flanco norte de la sierra de Guadarrama.	40.8990	-4.0040	1191.0	280
0417	Arcas/Cuenca	Iglesia románica de Arcas, Cuenca.	39.9881	-2.1154	990.0	170
0419	Plasencia	Sótanos de la Casa de la Cultura.	40.0500	-6.0800	657.0	236
0420	Pamplona	Universidad de Navarra.	42.8056	-1.6693	450.0	50
0424	Túnel de Cadi	Sierra del Cadi.	42.2830	1.8500	1170.0	110
0427	Santiago	Obs. Geofísico de Santiago de Compostela.	42.8805	-8.5446	250.0	40
0433	Calatayud		41.3760	-1.6435	500.0	205
0434	F. Ciencias/Oviedo	Facultad de Ciencias de Oviedo.	43.3500	-5.8500	246.0	20
0480	Porto <sup>6</sup>	Porto-Villa Nova de Gaia	41.0830	-8.6670	0.0	0

<sup>5</sup> Las investigaciones en MEL, ALG, V-ABS y P-IAG han sido financiadas por los proyectos PIE-2007301029 (CSIC), GR74/07-CCG07-UCM/AMB-2783 y GR58/08-A (CAM-UCM).

<sup>6</sup> La estación 0480-Porto (perteneciente al Institut Fuer Astronomische Geodaesie th Darmstadt Germany) no pertenece a la Red Española de Marea Gravimétrica del IAG.



**FIGURA 6.1:** Estaciones de marea gravimétrica disponibles en la Península Ibérica y Melilla. Las cruces señalan las observaciones realizadas con posterioridad al año 2005 (V-ABS y P-IAG en Madrid, ALG en Cádiz y MEL en Melilla). Los rombos señalan las estaciones que conforman la Red Española de Marea Gravimétrica (IAG, CSIC-UCM), con observaciones realizadas antes de 2005 (Vieira et al., 1983).

Siguiendo el procedimiento descrito, se han obtenido los mapas de las variaciones de gravedad (Fig. 6.3 y 6.4) y del desplazamiento radial (Fig. 6.8) debidos al EOI en la Península Ibérica y la región norte del continente africano, para los armónicos de marea  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $K_1$ . Estos resultados se presentan y discuten en las Secciones siguientes. La elección de los modelos y parámetros anteriores se ha llevado a cabo atendiendo a su adecuación a la zona de estudio, después de la comparación con los resultados obtenidos introduciendo modificaciones a los mismos. Se han analizado exhaustivamente los siguientes aspectos involucrados en el cálculo del EOI:

- **La adecuación de los modelos globales a la zona de estudio.** Los modelos deben ser analizados en detalle en cada área específica de interés. Algunos autores (p. ej., Fernández et al., 2007) han considerado a priori que con la primera generación de modelos oceánicos precedentes de datos altimétricos T/P, como FES95.2, CSR3.0 u ORI.96 (Secc. 3.3.3, Cap. 3) se obtienen mejores resultados que con el modelo SCH80. Este hecho no siempre es cierto ya que, por ejemplo, los modelos altimétricos CSR3.0 y CSR4.0 contienen celdas establecidas como agua en zonas de tierra (Fig. 6.2), lo que conlleva que este modelo no proporcione resultados satisfactorios en regiones como el Golfo de Vizcaya (Bos y Baker, 2005; Melchior y Francis, 1996)<sup>7</sup>. Asimismo, el modelo ORI.96 presenta una diferencia en las fases con respecto a otros modelos en el océano Atlántico y ha sido demostrado que, como consecuencia de este desfase, los factores gravimétricos se incrementan por un factor de 0,14% (Bos, 2000). Por todas estas razones, se ha realizado un estudio comparativo en la zona de interés entre los modelos globales más recientes y de mayor resolución, hasta un total de seis. Asimismo, se ha estudiado si existen diferencias significativas en los resultados entre los modelos anteriores, aun cuando se suplementan con modelos regiones de mayor resolución.
- **La influencia del modelo regional/local.** Se ha puesto de manifiesto en numerosas ocasiones que el uso exclusivo de modelos globales, incluso los más recientes, no proporciona la

<sup>7</sup> Véase Secc. 4.6.1 (Cap. 4), donde se comparan los modelos CSR4.0 y IBER01 en la costa norte de la Península Ibérica.

exactitud suficiente en el EOI calculado en zonas singulares (p. ej., Neumeyer et al., 2005; Boy et al., 2003). Cuando se suplementan los modelos globales con modelos regionales/locales de mayor resolución, conviene estudiar la contribución al EOI total del área oceánica delimitada por el modelo regional. Con esto se consigue, además de evaluar la mejora introducida con el modelo regional, investigar las áreas de mayor influencia en el cálculo del EOI que sean susceptibles de ser mejoradas con modelos locales<sup>8</sup>.

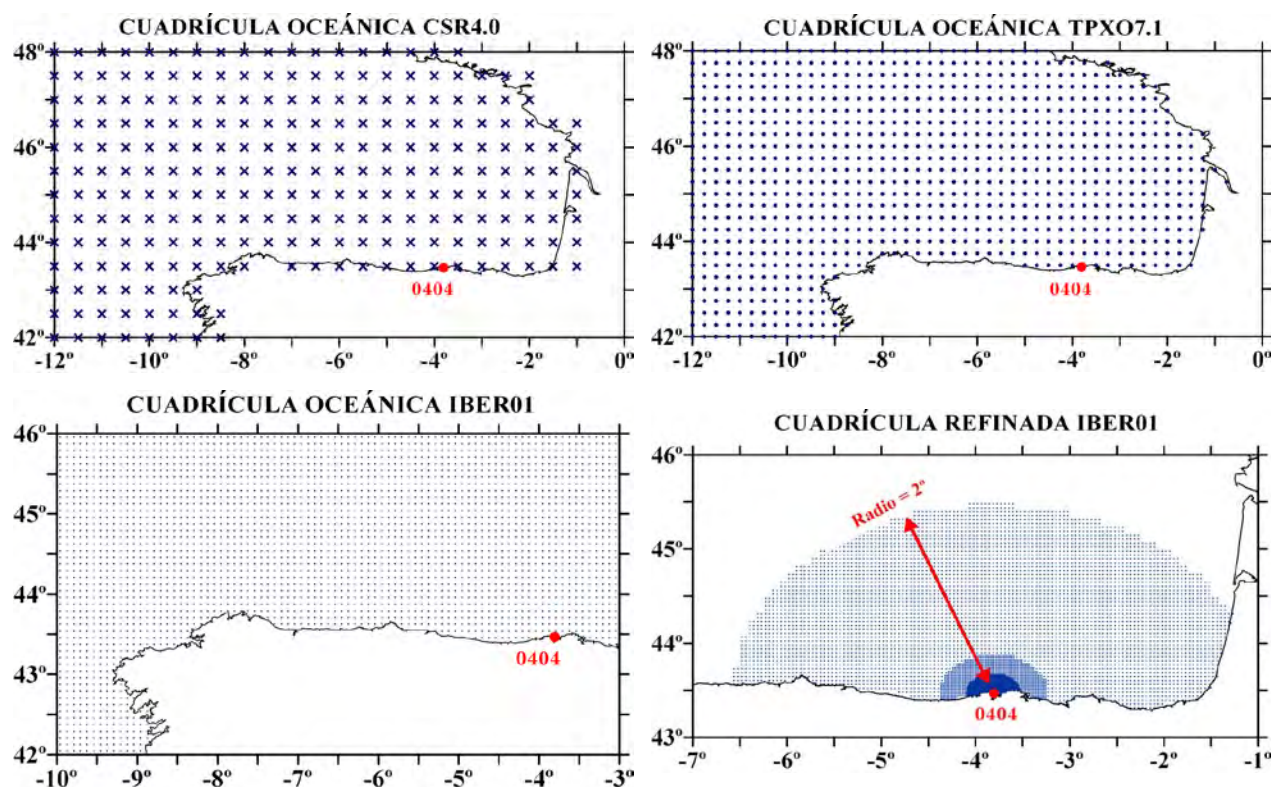
- **La influencia del refinamiento de la cuadrícula oceánica.** Habitualmente se ha considerado que para estaciones lejos de la costa (más de 150-200km) la resolución de los modelos globales de marea oceánica, en lo que respecta a la geometría costera, es suficiente (p. ej., Scherneck, 2000; Jentzsch et al., 2000). Por el contrario, todas las investigaciones realizadas concuerdan en que, para estaciones próximas a la costa, es fundamental la utilización de modelos locales y/o el refinamiento de la cuadrícula oceánica global para delimitar con exactitud la geometría costera adyacente y, en consecuencia, la distribución de la carga en la región. Pero además, se pondrá de manifiesto que incluso para cálculos a grandes distancias de la costa, algunos modelos globales (p. ej. la serie de modelos CSR) deben siempre suplementarse con modelos regionales o, en su defecto, refinarse en las proximidades de las costas.
- **La influencia del modelo de Tierra.** Generalmente, las diferentes estructuras de la corteza y la litosfera terrestre determinadas por los modelos SNREI clásicos (como GB, 1066A y PREM) no pueden detectarse a distancias angulares del océano superiores a unos 100 km ya que, en ese caso, las funciones de Green de carga no presentan diferencias significativas (Cap. 2, Secc. 2.4.5). Además, en el caso de las variaciones de gravedad, la componente Newtoniana domina sobre la componente elástica a grandes distancias del océano. Por el contrario, en las proximidades a la costa existen diferencias significativas entre las funciones de Green de carga elásticas calculadas a partir de modelos diferentes de la estructura de la corteza y, por tanto, es interesante estudiar su influencia en el EOI calculado. Se analiza, también, la influencia de la anelasticidad de la Tierra a través de su inclusión en las funciones de Green de carga.
- **La influencia de la altitud de la estación.** En el caso de las variaciones de la gravedad, principalmente a pequeñas distancias de la costa, debe tenerse en cuenta la altitud de la estación, ya que aumenta o disminuye la contribución de la componente Newtoniana al EOI (Secc. 2.4.4.1).
- **La influencia de la técnica de interpolación de la funciones de Green de carga y del valor asignado a la densidad del agua del mar.** Se investigan otros aspectos involucrados en el cálculo del EOI, como pueden ser la influencia de la técnica de interpolación utilizada (spline cúbica, cuadrática y Lagrange) para obtener el valor de la función de Green de carga a distancias angulares requeridas a partir de los valores tabulados. Asimismo, se estudia la influencia sobre los resultados del valor asignado a la densidad del agua del mar.

---

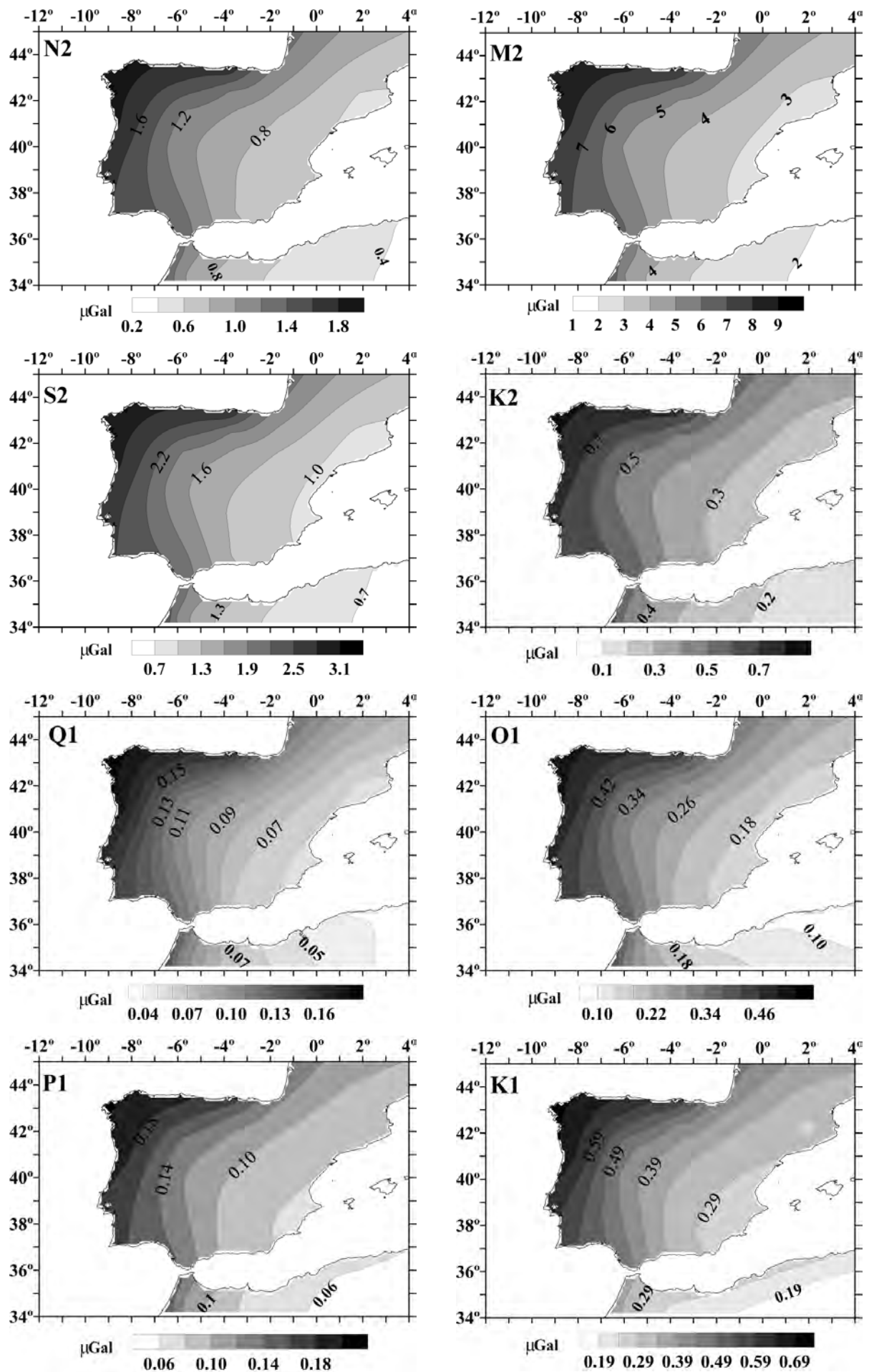
<sup>8</sup> Previamente a la construcción de los modelos oceánicos IBER01 y CIAM2 se estudió el área de mayor influencia del entorno oceánico próximo a las zonas de interés, con el fin de que el dominio de los modelos abarcara la extensión necesaria (Secc. 4.5.1, Cap. 4, y 6.5.1, Cap. 6).

### 6.3.1 Cálculo de las Variaciones de la Gravedad Originadas por el EOI en la Península Ibérica

Las Figuras 6.3 y 6.4 presentan las variaciones de gravedad (amplitud y fase, respectivamente) causados por el EOI en la Península Ibérica y norte de África. Los cálculos se han llevado a cabo con el modelo oceánico FES2004, suplementado con IBER01 en la región oceánica próxima a la Península Ibérica, para los principales constituyentes armónicos, según se describió en la Sección anterior. Los valores numéricos correspondientes se recogen en las Tablas 6.4 a 6.7 y en Tablas 11 y 15 (Apéndice 2).

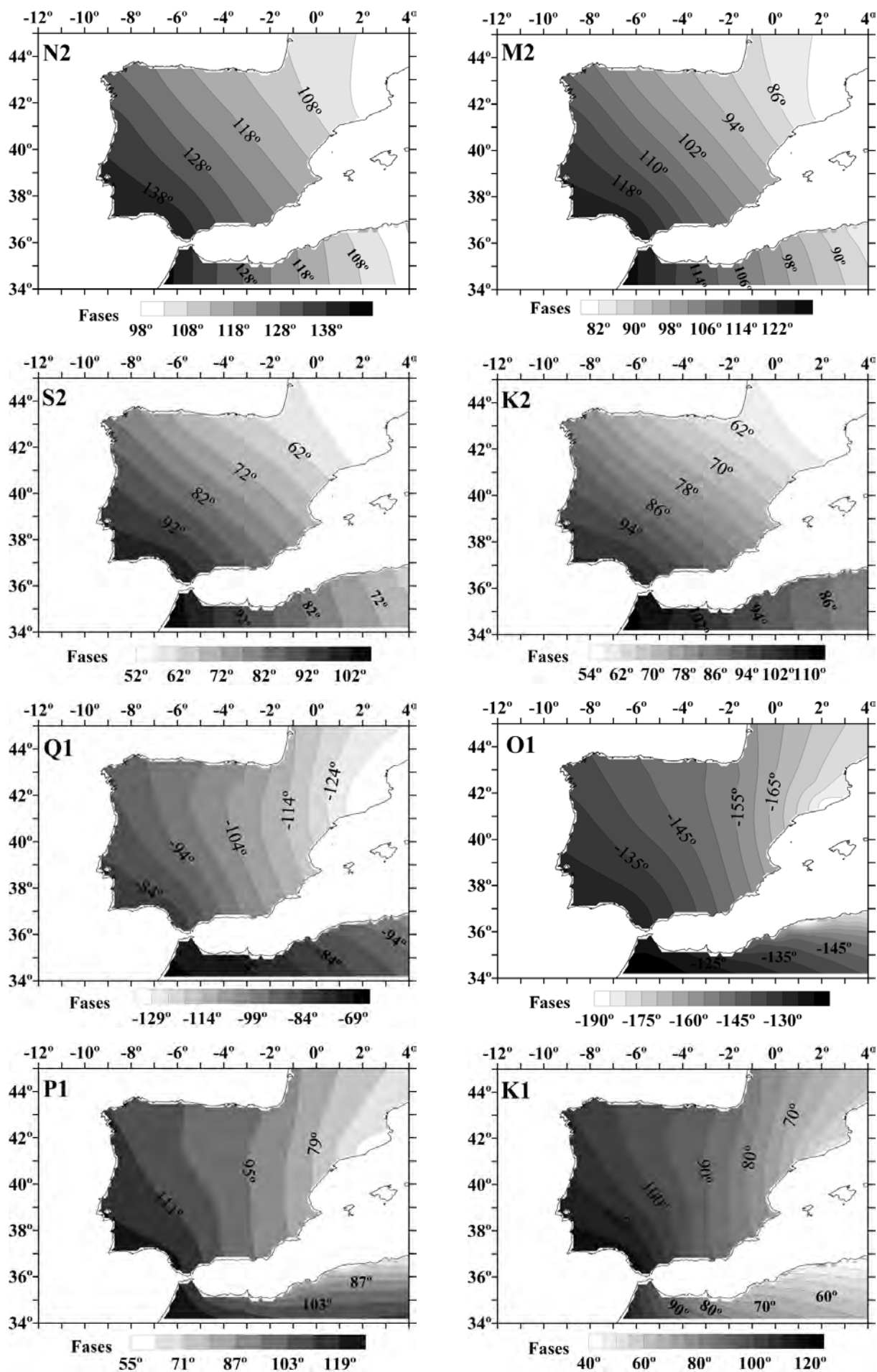


**FIGURA 6.2:** (Arriba) Centro de las celdas oceánicas de los modelos CSR4.0 y TPX07.1. (Abajo) Centro de las celdas oceánicas del modelo IBER01 (izda.) y esquema de refinamiento de dicha cuadrícula en las proximidades del punto de cálculo del EOI (dcha.).



**FIGURA 6.3:** Variaciones de gravedad (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$ ), calculadas utilizando el modelo FES2004 suplementado con IBER01, causadas en la Península Ibérica y norte de África por el EOI.





**FIGURA 6.4:** Variaciones de gravedad (fases locales, en grados), calculadas utilizando el modelo FES2004 suplementado con IBER01, causadas en la Península Ibérica y norte de África por el EOI.

En general, para todos los constituyentes de marea, el valor de las amplitudes del EOI se incrementan en dirección noroeste, mientras que las fases se propagan de NE a SO. En toda la región, el EOI está dominado por el constituyente semi-diurno  $M_2$ , cuyas amplitudes varían desde 2,4  $\mu\text{Gal}$  (en las proximidades de la costa Mediterránea) hasta 9,0  $\mu\text{Gal}$  (en la región Atlántica gallega). Debe señalarse que, para la onda  $M_2$ , la contribución de la región delimitada por el dominio del modelo IBER01 a la marea gravimétrica de carga alcanza hasta un 83% del efecto total en el extremo norte de la península, siendo de un 50% en el centro peninsular (Tabla 13 en Apéndice 2). Para los restantes constituyentes semi-diurnos, las amplitudes máximas se reducen a 0,8, 2,3 y 2,4  $\mu\text{Gal}$  para  $N_2$ ,  $S_2$  y  $K_2$ , respectivamente. Para todas las ondas en esta banda de marea la diferencia de fases entre los extremos NE y SO de la Península es de, aproximadamente,  $35^\circ$ - $40^\circ$ . En la banda diurna, las ondas predominantes son  $O_1$  y  $K_1$ , con amplitudes medias del orden de 0,3 y 0,4  $\mu\text{Gal}$ , respectivamente. La amplitud máxima alcanzada por  $O_1$  es de unos 0,5  $\mu\text{Gal}$  (0,6  $\mu\text{Gal}$  para  $K_1$ ). En el caso de  $P_1$  y  $Q_1$ , las amplitudes apenas exceden de 0,1  $\mu\text{Gal}$  en la mitad occidental de la Península. La diferencia de fases para las ondas diurnas, entre el NE y el SO peninsular, se encuentra en torno a  $30^\circ$ - $50^\circ$ . En la región norteafricana en el interior del dominio del modelo, las variaciones de gravedad debidas al EOI, tanto en amplitud como en fase, incrementan su valor hacia el Oeste, en una dirección aproximadamente paralela a la costa atlántica en esta región. Además, para todas las ondas de marea, las isolíneas de amplitud y de fase tienden a enlazar coherentemente (en magnitud y en distribución espacial) con las isolíneas en la Península Ibérica.

### **Comparación con resultados previos**

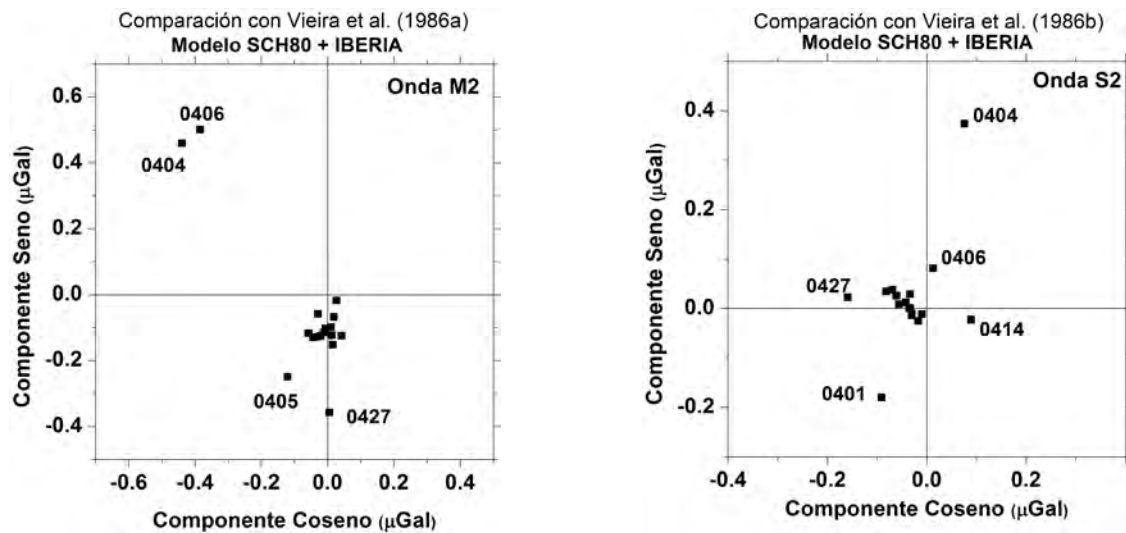
Los resultados obtenidos se han comparado con los presentados por otros autores, introducidos en la Sección 6.2. Así, Vieira et al. (1986, 1986b) publican los mapas de las variaciones de gravedad causadas por el EOI en la Península Ibérica para las ondas  $M_2$  y  $S_2$ , obtenidos a partir del modelo SCH80 suplementado con la cartas de marea IBERIA (Secc. 4.3, Cap. 4). En general, los patrones de propagación y los rangos de amplitud concuerdan con los obtenidos en este estudio para las ondas correspondientes. Con el fin de realizar un análisis más exhaustivo, se han comparado los valores proporcionados por los autores en las estaciones pertenecientes a la Red Española de Marea Gravimétrica<sup>9</sup> (con observaciones realizadas antes del año 2005, listadas en la Tabla 6.1) con los obtenidos en este estudio. En la Figura 6.5 se ha representado un diagrama de Argand con las diferencias en los valores de amplitud y fase en dichas estaciones de marea, entre los valores proporcionados por estos autores (Tabla 1 en Viera et al. 1986 para  $M_2$ , Tabla 1 en Vieira et al. 1986b para  $S_2$ ) y los listados en la Tabla 15 (Apéndice 2). Para la onda  $M_2$  destacan las diferencias en la componente en cuadratura (o componente seno) que, en la mayor parte de las estaciones, superan los 0,1  $\mu\text{Gal}$  pero sin exceder los 0,2  $\mu\text{Gal}$ , exceptuando las estaciones 0404, 0405 y 0427 situadas en las proximidades de la costa Cantábrica y 0406 en Cádiz (con diferencias en el rango de 0,2 a 0,6  $\mu\text{Gal}$ ).

<sup>9</sup> El establecimiento y observación de la Red Española de Marea Gravimétrica se inició en el año 1974 (Vieira, 1978; Vieira y Camacho, 1988; Camacho y Vieira, 1990).

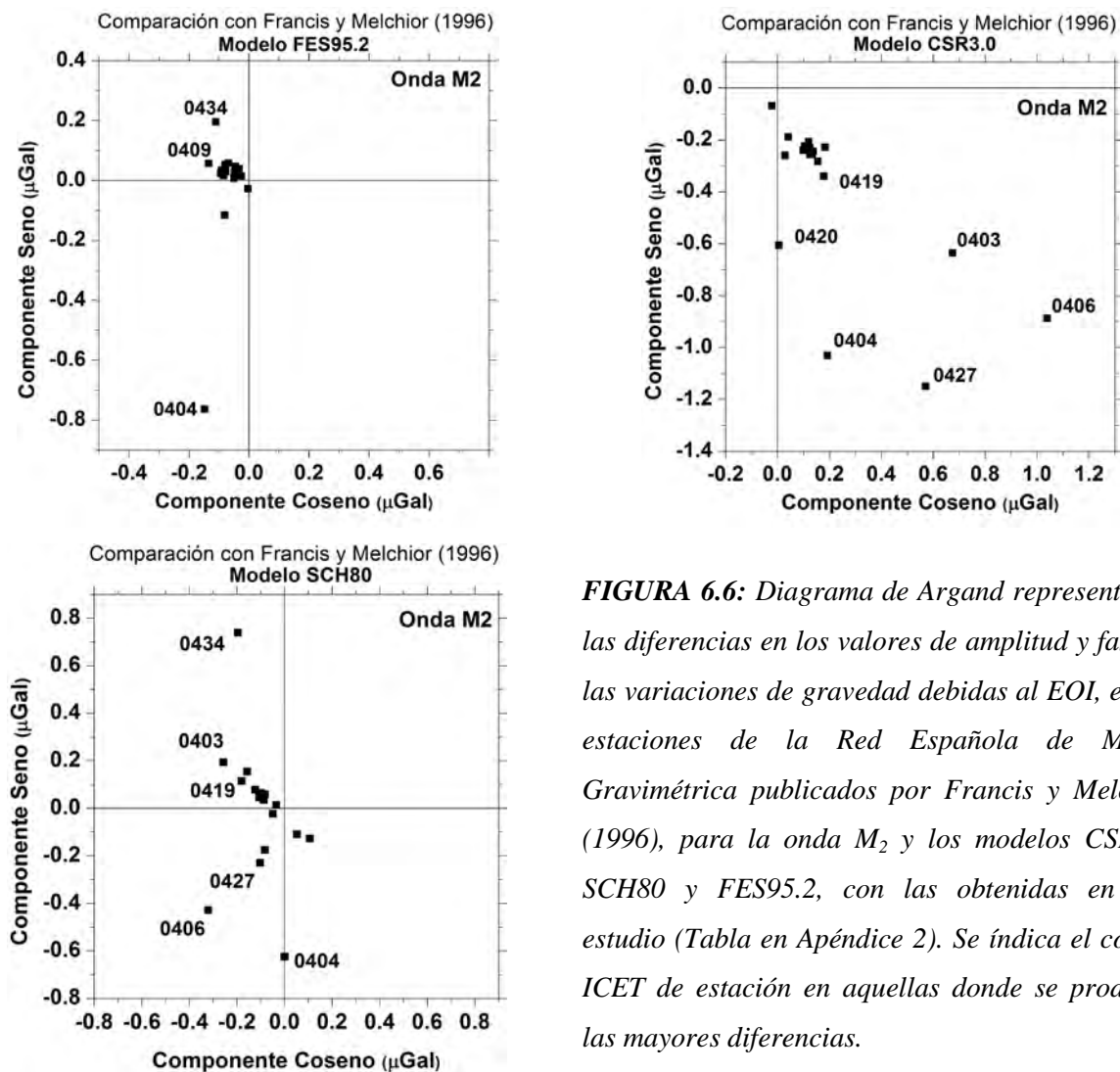


Estas diferencias son significativas ya que son mayores, por una parte, que la precisión alcanzada en el cálculo del EOI (que es del orden del 1 al 2%, véase Cap. 2) y, por otra parte, que la precisión que se obtiene en la medida con gravímetros relativos (Secc. 6.1). Además, destacan las grandes diferencias existentes en las componentes en fase (o componente coseno) en las estaciones 0404 y 0406, donde se superan los 0,3  $\mu\text{Gal}$  (esto es hasta un 5% del valor total de la amplitud de la carga). En el caso de  $S_2$ , las diferencias en ambas componentes, en fase y en cuadratura, son inferiores a 0,1  $\mu\text{Gal}$  (exceptuando las estaciones 0401, 0427 y 0404, en esta última estación las diferencias en la componente seno alcanzan un valor de 0,4  $\mu\text{Gal}$ ), lo cual representa del 1 al 3% del valor total de la amplitud de la carga.

Análogamente, se han comparado los resultados obtenidos aquí con los presentados por Francis y Melchior (1996). En este caso, los autores publican el mapa de marea gravimétrica de carga en la Península Ibérica para el constituyente  $M_2$ , calculado a partir del modelo de marea oceánica global FES95.2. Se observa que, aunque el patrón de propagación de las líneas de amplitud del mapa presentado por los autores es similar al obtenido aquí (Fig. 6.3), sus magnitudes difieren, siendo considerablemente más altas (incluso el doble) las presentadas por Francis y Melchior (1996). Asimismo, estos autores publican los valores del EOI obtenidos en las estaciones pertenecientes a la red de marea gravimétrica, calculados a partir de los modelos globales FES95.2, SCH80 y CSR3.0. De manera similar, en la Figura 6.6 se han representado las diferencias en los valores de amplitud y fase en dichas estaciones de marea, entre los valores proporcionados por estos autores y los listados en la Tabla 15 (Apéndice 2). Cabe destacar que se observan discrepancias muy significativas con respecto a los resultados obtenidos a partir del modelo CSR3.0, lo que pone de manifiesto su inadecuación para el cálculo del EOI en la región (a menos que se complemente con modelo regionales o se ajuste la cuadrícula oceánica, sobre la que se distribuye el modelo, a las líneas de costa mediante alguna técnica de refinamiento e interpolación). Cuando se usa el modelo SCH80, las discrepancias siguen siendo significativas. Aproximadamente, en la mitad de las estaciones comparadas se encuentran diferencias superiores a 0,1  $\mu\text{Gal}$  (hasta un valor máximo de unos 0,8  $\mu\text{Gal}$ ) en la componente en cuadratura. También se observan diferencias importantes en la componente en fase en diversas estaciones aunque, en este caso, no superan los 0,4  $\mu\text{Gal}$ . Los resultados obtenidos a partir del modelo FES95.2 concuerdan mejor con los presentados aquí en la mayor parte de las estaciones (a pesar de que, como se indicó anteriormente, se encontraron diferencias importantes en la magnitud del EOI). Finalmente, hay que destacar nuevamente las discrepancias existentes en las estaciones localizadas en las proximidades a las costas, principalmente en la cornisa cantábrica.



**FIGURA 6.5:** Diagrama de Argand representando las diferencias en los valores de amplitud y fase de las variaciones de gravedad debidas al EOI, en las estaciones de la Red Española de Marea Gravimétrica publicados por Vieira et al. (1986, 1986b), para las ondas  $M_2$  (izda.) y  $S_2$  (dcha.), con las obtenidas en este estudio (Tabla 15 en Apéndice 2). Se indica el código ICET de estación en aquellas donde se producen las mayores diferencias.



**FIGURA 6.6:** Diagrama de Argand representando las diferencias en los valores de amplitud y fase de las variaciones de gravedad debidas al EOI, en las estaciones de la Red Española de Marea Gravimétrica publicados por Francis y Melchior (1996), para la onda  $M_2$  y los modelos CSR3.0, SCH80 y FES95.2, con las obtenidas en este estudio (Tabla en Apéndice 2). Se indica el código ICET de estación en aquellas donde se producen las mayores diferencias.

## **Estudio de la influencia de los modelos, parámetros y constantes involucrados en el cálculo del EOI**

Con el fin de estudiar la influencia sobre el resultado, se ha calculado el EOI introduciendo modificaciones en los modelos y parámetros implicados (modelos oceánicos, refinamiento de la cuadrícula oceánica, funciones de Green de carga, etc.). Las conclusiones extraídas se detallan en cuatro emplazamientos diferentes en la zona de estudio: Dos situados en el centro de la Península Ibérica, las estaciones V-ABS y P-IAG (véase Tabla 6.1 para su localización), el tercero situado al sur de la misma, la estación ALG y, finalmente, la estación MEL localizada en Melilla. Estos emplazamientos corresponden a las estaciones de marea gravimétrica, cuyas observaciones se han llevado a cabo con posterioridad al año 2005, de las que se dispone de series de datos observados que permitirán testear y validar los resultados presentados (Secc. 6.6). Las conclusiones se extenderán al resto de la Península en función de los resultados obtenidos en las restantes 21 estaciones.

### **a) Comparación entre modelos oceánicos e influencia del modelo IBER01**

Cuando el cálculo del EOI se realiza únicamente a partir de modelos globales y sin refinamiento de la cuadrícula oceánica se producen grandes diferencias en los resultados. Así, para la onda  $M_2$ , estas diferencias alcanzan una amplitud de hasta  $0,6 \mu\text{Gal}$  en la estación MEL,  $1,1 \mu\text{Gal}$  en ALG y del orden de  $0,4 \mu\text{Gal}$  en V-ABS y P-IAG. Para esta misma onda y en dichas estaciones, las diferencias en las fases se encuentran en el rango de  $2^\circ$  a  $4^\circ$ . Para el resto de ondas consideradas, las diferencias en amplitud también son significativas, aunque disminuyen de acuerdo a la propia amplitud de la onda de marea. Por el contrario, la diferencia en fases aumenta, alcanzando hasta  $10^\circ$ - $15^\circ$  para la onda  $K_2$  y un rango comprendido entre  $3^\circ$  y  $9^\circ$  en la banda de marea diurna para todas las estaciones exceptuando MEL, donde se obtienen diferencias muy superiores (p. ej., hasta  $40^\circ$  para  $K_1$ ). Generalmente, los valores más altos (en amplitud y en fase) son los obtenidos a partir del modelo CSR4.0, excepto en el caso de las fases para los constituyentes diurnos donde los resultados alcanzados utilizando AG2006 son considerablemente más altos que con los restantes modelos. Para este último, las discrepancias se atribuyen a que no cubre la región del Mar Mediterráneo, que se caracteriza por una alta variación en las fases de la marea oceánica (Cap. 4). Por otra parte, destaca que el modelo GOT00.2 presenta el comportamiento más regular de entre todos los modelos estudiados (esto es, resultados menos discrepantes con respecto a todos los demás modelos). Extendiendo los resultados a toda la Península, se observa que las diferencias en amplitud aumentan, generalmente, en dirección a la costa Atlántica con valores máximos de  $1,3 \mu\text{Gal}$  para la onda  $M_2$  (lo que representa un 16% de la carga). Por el contrario, las diferencias en las fases aumentan en las proximidades al Mar Mediterráneo. Teniendo en cuenta que la exactitud en el cálculo de la carga es del orden del 1-2%, estas diferencias son significativamente más grandes que los errores en cálculo (incluso para estaciones alejadas de la costa). Cuando los modelos globales se suplementan con IBER01 (y se refina la cuadrícula oceánica en las proximidades de la costa) las diferencias se reducen considerablemente (resultados en Tabla 6.4 a 6.7):

- En MEL,  $0,04 \mu\text{Gal}$  para la onda  $N_2$ ,  $0,02 \mu\text{Gal}$  para  $M_2$ ,  $0,02 \mu\text{Gal}$  para  $S_2$ ,  $0,01 \mu\text{Gal}$  para  $K_2$ ,  $0,04 \mu\text{Gal}$  para  $Q_1$ ,  $0,02 \mu\text{Gal}$  para  $O_1$ ,  $0,02 \mu\text{Gal}$  para  $P_1$  y  $0,01 \mu\text{Gal}$  para  $K_1$ .

- En ALG, 0,03  $\mu\text{Gal}$  para la onda  $N_2$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $S_2$ , 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $K_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $Q_1$ , 0,03  $\mu\text{Gal}$  para  $O_1$ , 0,03  $\mu\text{Gal}$  para  $P_1$  y 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $K_1$ .
- En V-ABS, 0,02  $\mu\text{Gal}$  para la onda  $N_2$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ , 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $S_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $K_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $Q_1$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $O_1$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $P_1$  y 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $K_1$ .
- En P-IAG, 0,03  $\mu\text{Gal}$  para la onda  $N_2$ , 0,03  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ , 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $S_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $K_2$ , 0,03  $\mu\text{Gal}$  para  $Q_1$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $O_1$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $P_1$  y 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $K_1$ .
- En el dominio de la Península Ibérica las diferencias medias son del orden de 0,01  $\mu\text{Gal}$  para la onda  $N_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ , 0,03  $\mu\text{Gal}$  para  $S_2$ , 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $K_2$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $Q_1$ , 0,02  $\mu\text{Gal}$  para  $O_1$ , 0,01  $\mu\text{Gal}$  para  $P_1$  y 0,04  $\mu\text{Gal}$  para  $K_1$ .

Por otra parte, las diferencias en fase también disminuyen cuando los modelos globales se suplementan con IBER01. Por ejemplo, las diferencias para  $N_2$ ,  $M_2$ , y  $S_2$  no superan los  $3,5^\circ$  y para  $K_2$  se reducen a unos  $4^\circ$ - $6^\circ$ . En la banda de marea diurna, las diferencias aunque aun son considerables, se reducen aproximadamente a la mitad.

En la Tabla 13 (Apéndice 2) se indica, para cada estación y onda de marea, la contribución al EOI total del área delimitada por el modelo IBER01. Para la onda  $M_2$  la contribución es, aproximadamente, del 69% en la estación MEL y del 71% en ALG, V-ABS y P-IAG. Para  $O_1$  la contribución al EOI se reduce al 47% en MEL, al 56% en ALG y al 60% en V-ABS y P-IAG.

#### **b) Estudio de la Influencia del Refinamiento de la Cuadrícula Oceánica**

En el punto anterior, se ha puesto de manifiesto las grandes discrepancias obtenidas en el EOI calculado a partir de modelos globales diferentes, que se reducen cuando éstos se suplementan con el modelo IBER01. En ausencia de un modelo específico para la región de estudio, la cuadrícula oceánica sobre la que se presentan los modelos globales debe refinarse con el fin de obtener cálculos más exactos. Aun utilizando un modelo regional como IBER01, para estaciones próximas al océano, la cuadrícula oceánica puede refinarse en torno a la estación para delimitar con mayor exactitud la línea de costa. En este caso, el área que debe cubrir el refinamiento, que se reduce considerablemente con respecto al requerido por los modelos globales, depende esencialmente de la distancia de la estación al océano. De forma similar, el factor de refinamiento (que proporciona el ajuste a la costa) viene determinado por la resolución del fichero de máscaras tierra/agua. En función de estos criterios, se seleccionaron el área y el factor para los diferentes puntos de cálculo considerados. Como ejemplo, para la estación MEL, la diferencia máxima en el EOI calculado para la onda  $M_2$ , utilizando factores de refinamiento en el rango de 0,1 a 0,05, es de 0,02  $\mu\text{Gal}$  en amplitud y  $0,11^\circ$  en fase (con factores inferiores a 0,05 los cálculos se estabilizan). Asimismo, en la estación ALG los cálculos se estabilizan a partir de un factor de refinamiento de 0,1. En esta misma estación la diferencia en el EOI calculado, para la onda  $M_2$ , utilizando el modelo IBER01 con y sin refinamiento adicional de la cuadrícula oceánica es de 0,08  $\mu\text{Gal}$  en amplitud (un 1,7% del EOI) y  $0,3^\circ$  en fase.

### c) Estudio de la influencia del Modelo de Tierra

Con este fin, se han utilizado diversas funciones de Green de carga: Las obtenidas por Farrell (1972) para los modelos de Tierra elástica de Gutenberg-Bullen (denotadas por GB<sup>10</sup>) y una variante de éste último en la que se considera una estructura de corteza continental (GB-CC). Las funciones de Green de carga calculadas a partir del modelo terrestre PREM por Matsumoto et al. (2001) (PREM-MAT) y por Guo et al. (2004) (PREM-GUO). Las funciones de Green calculadas por Jentzsch (1997) para el modelo de Tierra PREM con una estructura de corteza continental (PREM-CC). Las funciones de Green de carga calculadas por Matsumoto (comunicación personal) para el modelo de Tierra Gutenberg Bullen, con la incorporación de una componente anelástica (GB-AN). Todas estas funciones de Green están descritas en la Secc. 2.4.5 (Cap. 2).

Como ejemplo, en la Fig. 6.7 se han representado los resultados del cálculo del EOI con las diferentes funciones de Green de carga consideradas en las estaciones ALG, MEL y V-ABS para el constituyente armónico  $M_2$ . En todos los casos, las diferencias en la componente en cuadratura no superan los 0,1  $\mu\text{Gal}$ , mientras que en la componente en fase las diferencias no exceden los 0,05  $\mu\text{Gal}$ . Destaca que, por una parte, las funciones de Green de carga PREM-CC y GB-AN son las que proporcionan los resultados más discrepantes y, por otra parte, que las diferencias en los resultados obtenidos con los diferentes modelos de Tierra son similares e independientes de la distancia de la estación al océano. En particular, para la onda  $M_2$ , las diferencias ocasionadas en el cálculo del EOI por la estructura de la corteza terrestre, introducidas a través de las funciones de Green GB y GB-CC, son de 0,03  $\mu\text{Gal}$  en la amplitud del EOI en la estación ALG, 0,01  $\mu\text{Gal}$  en MEL, 0,04  $\mu\text{Gal}$  (esto es, un 0,6% del valor total de la amplitud) en V-ABS (la diferencia en fases en las tres estaciones es de 0,1°). Asimismo, analizando los resultados obtenidos utilizando los modelos de Tierra de Gutenberg-Bullen y PREM, ambos con una estructura de corteza continental, se encuentran diferencias en la amplitud del EOI de 0,03  $\mu\text{Gal}$  y 0,7 en fases en la estación MEL, y diferencias de 0,1  $\mu\text{Gal}$  en amplitud y 0,2° en fase en las estaciones ALG y V-ABS. Por tanto, las discrepancias encontradas son inferiores al 1% en la amplitud del EOI y a un 1° en las fases, lo que concuerda con los resultados obtenidos por otros autores (Secc. 2.5.1.2, Cap. 2). En el caso de la onda  $O_1$ , las diferencias obtenidas son insignificantes. En este caso destaca, además, que la introducción de una componente anelástica en el modelo de Tierra no afecta a los resultados.

### d) Estudio de la Influencia de la Técnica de Interpolación de las Funciones de Green de Carga

Se han comparado los resultados obtenidos en el cálculo del EOI utilizando diferentes técnicas de interpolación de las funciones de Green de carga (spline cúbica, cuadrática y Lagrange). Las diferencias encontradas en todos los casos pueden considerarse despreciables. Así, por ejemplo, para las cuatro

---

<sup>10</sup> Los resultados obtenidos con las funciones de Green de carga calculadas por Okubo y Saito (1983) y Endo y Okubo (1984) para el modelo de Tierra 1966A no presentan diferencias con respecto a las proporcionadas por Farrell (1972) para el modelo de Tierra Gutenberg-Bullen.

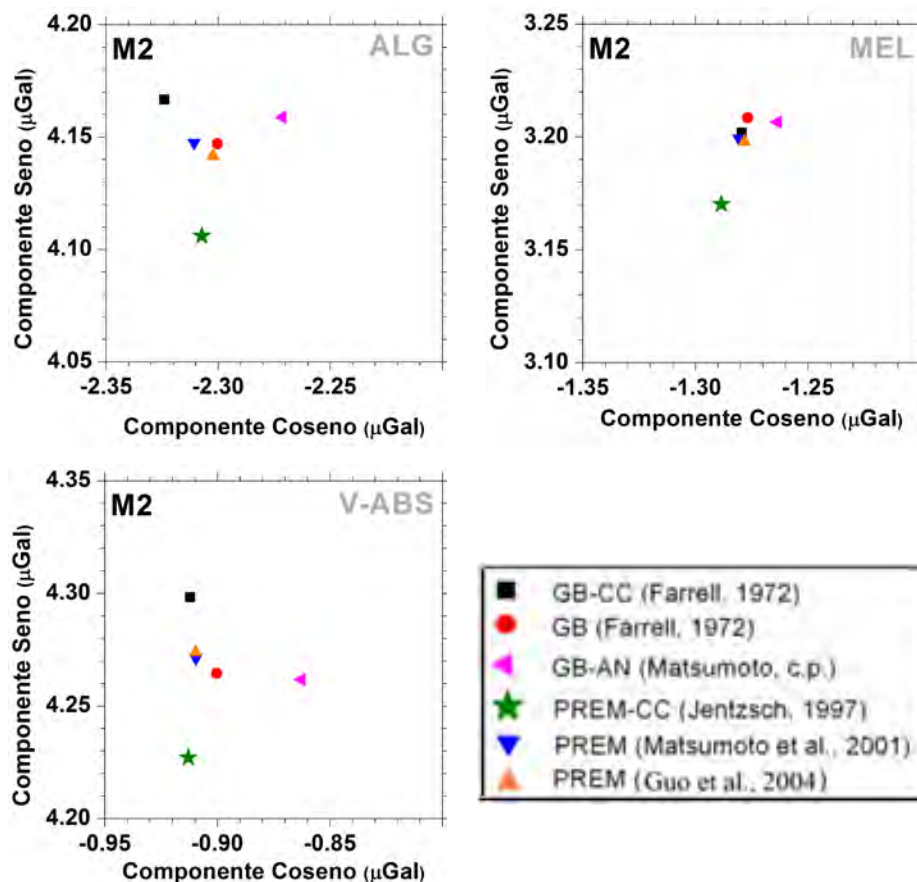
estaciones ALG, MEL, V-ABS y P-IAG la desviación estándar en las amplitudes es de tan sólo 0,003  $\mu\text{Gal}$  y 0,006° en las fases, para el constituyente armónico principal  $M_2$ .

#### e) Estudio de la Influencia de la Densidad del Agua del Mar

Se ha estudiado la influencia del valor constante asignado a la densidad del agua del mar en el cálculo del EOI. Para ello, se han realizado los cálculos variando el valor de  $\rho_w = 1.027 \text{ kg/m}^3$  a  $\rho_w = 1.030 \text{ kg/m}^3$ . En todas las estaciones (MEL, ALG, V-ABS y P-IAG) y para todas las ondas de marea, excepto  $M_2$ , las diferencias obtenidas en la amplitud de la carga son despreciables (recuérdese que el valor de la densidad no afecta a las fases). Únicamente se tiene una diferencia que alcanza 0,01  $\mu\text{Gal}$  (~0,3% del valor de la amplitud de la carga) para la onda  $M_2$ .

#### f) Estudio de la Influencia de la Altitud de la Estación

En la Tabla 13 (Apéndice 2) se presenta, para cada una de las estaciones y ondas de marea, la contribución de la componente de la atracción Newtoniana al EOI total. Para la onda  $M_2$ , la contribución de la atracción Newtoniana es de un 35% en la estación MEL, un 30% en ALG y un 33% en V-ABS y P-IAG. Cuando la altitud de la estación se iguala a cero en el cálculo del EOI, la componente Newtoniana se reduce en un 2-3% en las estaciones ALG, V-ABS y P-IAG y un 11% en MEL (que dista menos de 1 km de la costa y se encuentra a una altitud sobre el nivel del mar de unos 115 m).

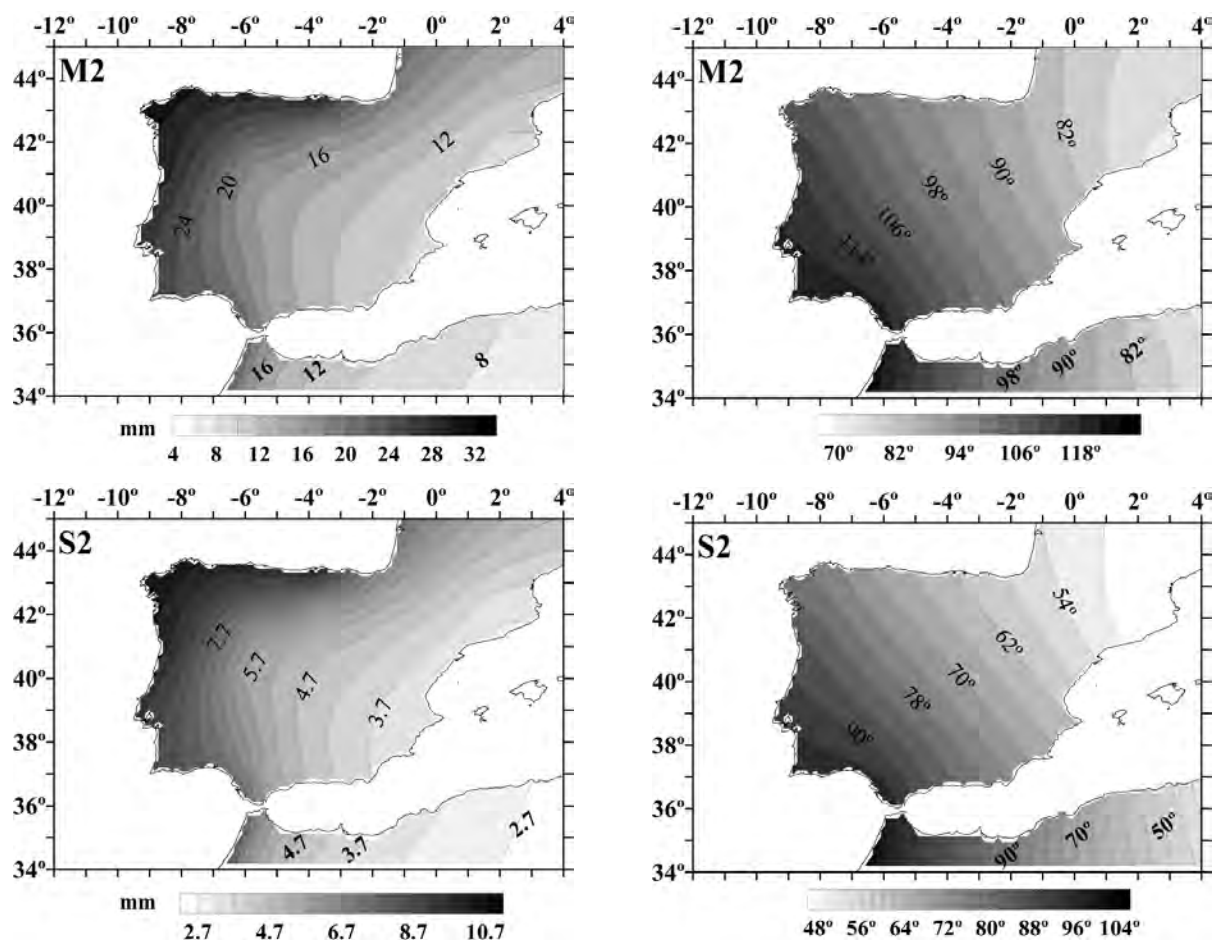


**FIGURA 6.7:** EOI calculado (utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con IBER01) para la onda  $M_2$ , utilizando 6 funciones de Green de carga, en las estaciones ALG, MEL y V-ABS.

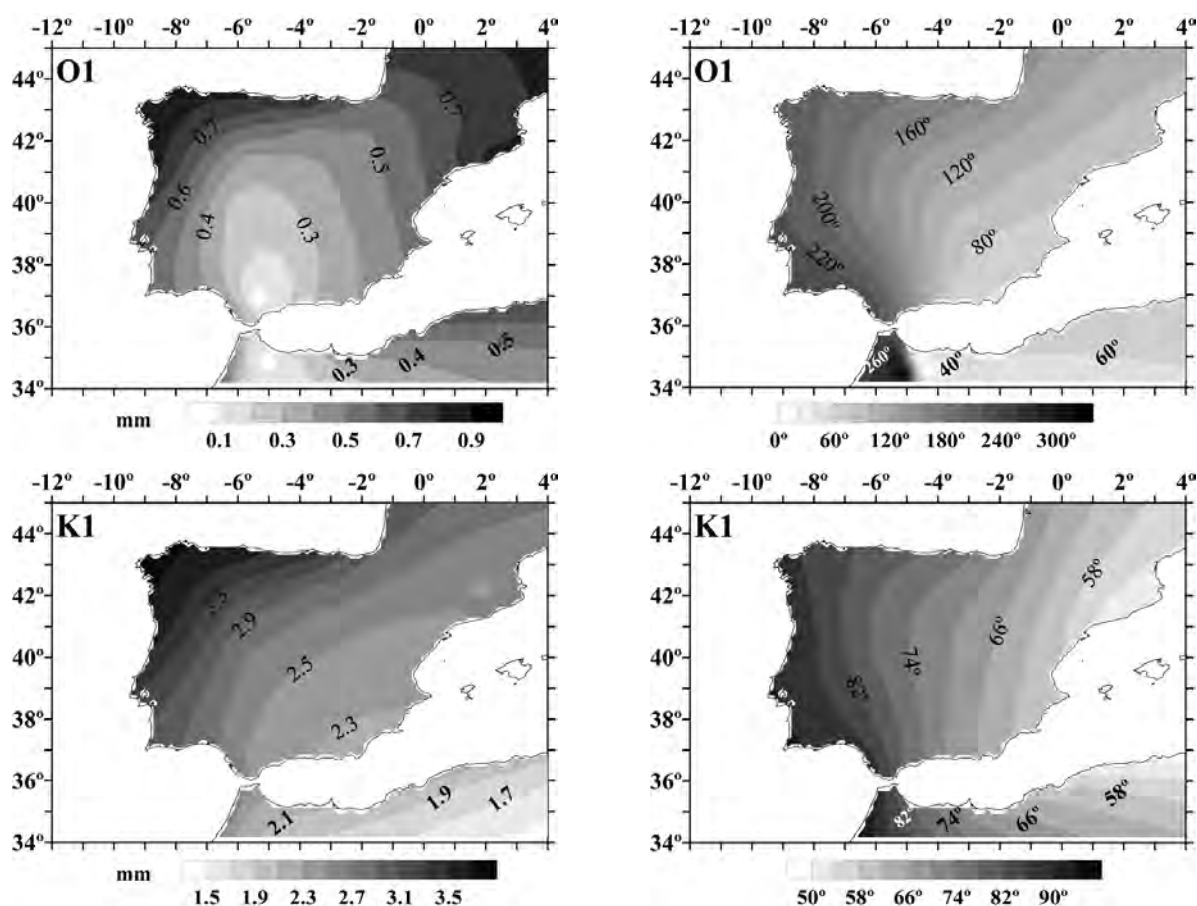
### 6.3.2 Cálculos del Desplazamiento Radial Originado por el EOI en la Península Ibérica

La Fig. 6.8 presenta los mapas de amplitudes y fases para el desplazamiento radial originado por el EOI en la Península Ibérica y norte de África, para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ . En general, el valor de las amplitudes del EOI incrementa en dirección noroeste y las fases se propagan de NE a SO, para los constituyentes en la banda de marea semi-diurna. En toda la región el EOI está dominado por el constituyente semi-diurno  $M_2$ , cuyas amplitudes varían desde 10 mm (en las proximidades de la costa Mediterránea) hasta 30 mm (en la región Atlántica, frente a las costas gallegas). Para  $S_2$  las amplitudes máximas se reducen a unos 10 mm. La diferencia de fases en esta banda de marea entre los extremos NE y SO de la Península es de, aproximadamente,  $35^\circ$ - $40^\circ$ . En la banda diurna, las ondas predominantes son  $O_1$  y  $K_1$ , con amplitudes medias del orden de unos 0,4 y 2,5 mm, respectivamente. La amplitud máxima alcanzada por  $K_1$  es de unos 3,9 mm.

De los resultados anteriores, únicamente puede compararse el mapa de amplitudes de los desplazamientos radiales debidos al EOI en la Península Ibérica con el publicado por Francis y Melchior (1996) para la onda de marea  $M_2$ . Las amplitudes obtenidas por estos autores son, generalmente, el doble de las obtenidas en este estudio en toda la extensión peninsular, de lo que se deduce la inadecuación de los cálculos realizados por estos autores en el caso de los desplazamientos radiales.



**FIGURA 6.8:** Desplazamiento radial por el EOI (amplitudes en mm y fases, locales, en grados) en la Península Ibérica y norte de África, calculado utilizando el modelo FES2004 suplementado con IBER01, para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$ ,  $K_1$ .



**FIGURA 6.8:** *Continuación.*

## 6.4 Variaciones de Gravedad y Desplazamientos Originados por el Efecto Oceánico Indirecto en el Archipiélago Canario

El cálculo del EOI en el Archipiélago Canario se ha llevado a cabo con el software ECOM, siguiendo la misma metodología descrita en la Sección 6.3. Los mapas que aquí se presentan, para los principales constituyentes semi-diurnos y diurnos, se han obtenido calculando el EOI, para las variaciones de gravedad y los desplazamientos, en un número considerable de puntos situados en tres islas del Archipiélago: Lanzarote, Tenerife y El Hierro. En particular, los resultados del cálculo se presentan y analizan en detalle en tres localizaciones situadas en cada una de las islas. Dichas localizaciones corresponden a estaciones de marea gravimétrica en las que se dispone de series de datos observados y son: CV en Lanzarote, TP en Tenerife y AU en El Hierro (Fig. 6.9). En este caso, las consideraciones tenidas en cuenta en el cálculo del EOI han sido las siguientes:

- Las funciones de Green de carga utilizadas son las calculadas por Farrell (1972) para el modelo de Tierra elástico Gutenberg-Bullen con corteza oceánica (Secc. 2.4.5, Cap. 2). Sus valores se obtienen mediante una interpolación spline cúbica de los valores tabulados. En el caso de que se requieran los valores asintóticos de los números de Love de carga a distancias angulares inferiores a las tabuladas, se utilizan los valores determinados por Farrell (1972) y que corresponden a las funciones consideradas.

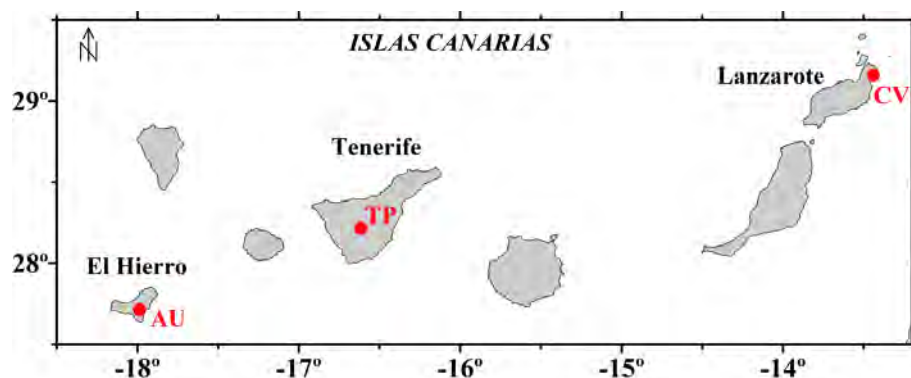


- El efecto de la atracción directa de las masas de agua oceánica se calcula teniendo en cuenta la altura del punto de cálculo.
- Se ha utilizado el modelo global GOT00.2, suplementado con el modelo regional CIAM2 en el entorno del archipiélago.
- El ajuste riguroso del modelo oceánico a las líneas de costa se ha llevado a cabo refinando la cuadrícula oceánica en las proximidades a las mismas, utilizando ficheros de máscaras tierra/agua de alta resolución elaboradas a partir del modelo digital de la topografía del fondo oceánico GEBCO-30s y de los modelos digitales del terreno, proporcionados por el IGN de España, de escalas 1:25.000. El radio de refinamiento seleccionado en torno a los puntos de cálculo ha sido de 0.75° para CV, 1.5° para TP y 0.75° para AU.
- Los valores asignados a la densidad del agua del mar, el radio terrestre y la constante de gravitación universal son las indicadas en la Sección 6.3

La elección de los modelos y parámetros indicados se ha llevado a cabo atendiendo a su adecuación a la zona de estudio, después de la comparación con los resultados obtenidos introduciendo modificaciones a los mismos.

**TABLA 6.2:** *Coordenadas geográficas de las estaciones de marea gravimétrica en Canarias.*

Nombre y Descripción	Latitud (°N)	Longitud (°E)	Altitud (m)	Dist. Mar (km)
CV Cueva de los Verdes (LGL), Lanzarote	29,160	13,441	37,0	1,3
TP Teide-Parador, Tenerife	28,217	16,617	2.150,0	18,5
AU Aula de la Naturaleza, El Hierro	27,714	17,988	950,5	3,0



**FIGURA 6.9:** *Estaciones de marea gravimétrica en el Archipiélago Canario (CV-Lanzarote, TP-Tenerife y AU-El Hierro).*

#### 6.4.1. Cálculo de las Variaciones de Gravedad Originadas por el EOI en las Islas de El Hierro, Tenerife y Lanzarote

En las Figuras 6.13 a 6.15 se presentan los mapas de las variaciones de gravedad debidas al EOI en las islas de El Hierro, Tenerife y Lanzarote, respectivamente, para los armónicos de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ . Los valores de estos cálculos en las estaciones CV, TP y AU están listados en las Tablas

6.10 a 6.13<sup>11</sup>. Para la onda de marea dominante  $M_2$ , la amplitud del EOI en las tres islas estudiadas se encuentra en el rango de 8 a 12  $\mu\text{Gal}$  y la variación de fases en el interior de las mismas no excede los  $4^\circ$ . El resto de constituyentes armónicos presentan características similares, aunque sus magnitudes disminuyen considerablemente. En general, para las tres islas y todos los armónicos de marea considerados, las variaciones de gravedad obtenidas están muy influenciadas por la componente correspondiente a la atracción Newtoniana de las masas de agua. La contribución de esta componente al EOI total está condicionada, a su vez, por la distancia al océano y por la altitud sobre el nivel del mar del punto de cálculo.

#### Contribución de la componente Newtoniana al EOI

Como ejemplo, y para analizar este efecto en la isla de El Hierro, se ha señalado en la Fig. 6.10 la localización de 5 puntos sobre el terreno en los que se ha calculado el EOI. Estos puntos se sitúan a diferentes distancias del océano y también a distintas altitudes sobre el nivel del mar: Los puntos (1) y (2) se localizan a una distancia de la costa más cercana, aproximadamente 800 m, y a una altitud sobre el nivel del mar de unos 500 m. En ambos puntos, la amplitud de la atracción Newtoniana es de 6,6  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$  y comprende el 57% de la amplitud del EOI total. En el punto (4), que se sitúa a poco más de 700 m de la costa pero a una altitud de 220 m, la contribución Newtoniana se reduce a 4,8  $\mu\text{Gal}$  (esto es, un 48% de la amplitud del EOI para  $M_2$ ), mientras que en el punto (5), situado al nivel del mar y a menos de 300 m, la atracción Newtoniana se reduce hasta 1,4  $\mu\text{Gal}$  (un 22% del EOI total). Finalmente, en el punto (3), que se encuentra a más de 4 km de la costa más cercana y a una altitud sobre el nivel del mar de 1.113 m, la amplitud de la componente Newtoniana tiene un valor de 5,7  $\mu\text{Gal}$  (~ 53% del valor de la amplitud de la onda  $M_2$ ). En general, el valor medio de la amplitud de la componente elástica del EOI es de 5,6  $\mu\text{Gal}$  sobre la isla de tal forma que, la suma de las contribuciones elástica y Newtoniana ocasiona que las amplitudes máximas del EOI se produzcan en la región conocida como El Golfo (al noroeste de la isla) y, por el contrario, las amplitudes mínimas se localicen en dos áreas: la primera, en el extremo sur de la isla (en la zona de El Julán) y, la segunda, al noreste (al norte de La Playas).

En la isla de Tenerife, la influencia de la atracción Newtoniana sobre el EOI calculado es clara. En la Fig. 6.11 se muestra la distribución de todos los puntos donde se ha calculado el EOI y las contribuciones al EOI de las componentes Newtoniana y elástica. Se observa que, en los puntos situados en las zonas de mayor cota topográfica se produce la mayor contribución de la atracción Newtoniana al EOI (hasta 5  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ ), así como en el extremo norte de la isla (en Santa Cruz de Tenerife). A su vez, la contribución al EOI proveniente de su componente elástica (que varían entre 5 y 5,7  $\mu\text{Gal}$  para  $M_2$ ) alcanza sus mayores valores en el extremo norte de la isla, disminuyendo progresivamente en las proximidades de las costas y centro insular. Las aportaciones al EOI de las diferentes componentes dan lugar a los mapas de amplitud que se presentan en la Fig. 6.14: amplitudes máximas en el noreste y centro insular y mínimas al sur.

<sup>11</sup> Para las ondas de marea  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$  y  $P_1$  los resultados están listados en la Tabla 17 (Apéndice 2).

En el caso de Lanzarote, al tener una orografía con escasas elevaciones, los mapas del EOI (Fig. 6.15) aparecen menos afectados por la influencia de la atracción gravitatoria de las masas de agua (que presenta un valor medio de  $3 \mu\text{Gal}$  en toda la isla para la onda  $M_2$ ). En este caso, la mayor contribución al EOI proviene de la componente elástica (hasta  $6 \mu\text{Gal}$  para la onda principal  $M_2$ ) y ésta es, además, superior en magnitud a las otras dos islas estudiadas. Las amplitudes máximas del EOI se producen en los extremos noreste y suroeste de la isla, coincidiendo con las zonas de mayor elevación topográfica y en los que se produce un leve aumento de la contribución Newtoniana al EOI, de entre  $4$  y  $4,5 \mu\text{Gal}$  para  $M_2$ . En el primer caso, además, el incremento en la amplitud del EOI se atribuye, por una parte, al aumento en la amplitud de la marea oceánica en esta zona (Cap. 5, Fig. 5.10) y, además, a la porosidad que presenta la corteza terrestre en la zona.

#### El refinamiento de la cuadrícula oceánica

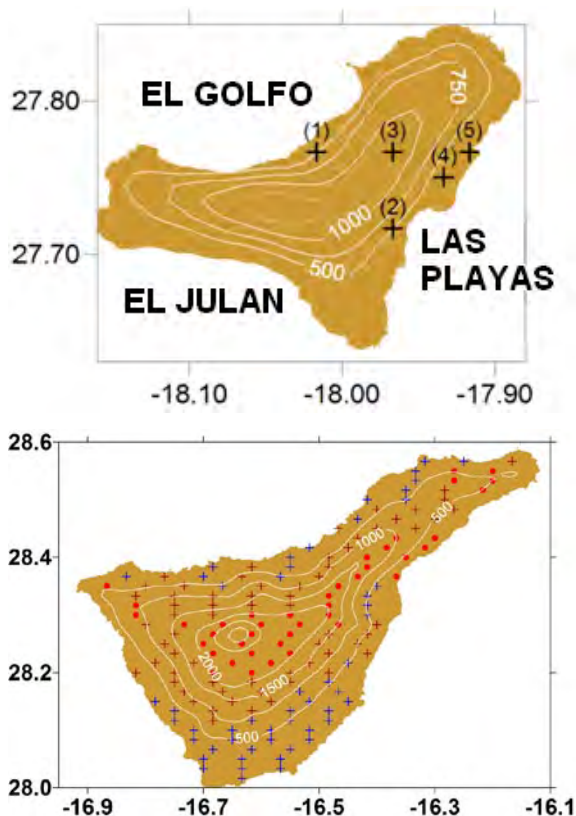
Hay que destacar, en el caso de las islas de El Hierro, La Palma, La Gomera y Gran Canaria se ha encontrado, a partir de la comparación con modelos digitales del terreno, un desplazamiento significativo de los contornos costeros proporcionados por la base de datos *World Vector Shoreline Data* de unos  $5'$  hacia el Este y un desplazamiento más leve hacia el Sur (Fig. 6.12). En particular, en la isla del Hierro, este desplazamiento de la línea de costa origina un incremento en la componente en fase de la marea gravimétrica de carga de un  $50\%$ , para el constituyente armónico  $M_2$ . Por esta razón, para refinar la cuadrícula oceánica en las proximidades de las costas Canarias se ha utilizado un fichero de máscaras tierra/agua obtenido a partir de modelos digitales del terreno de alta resolución.

Por otra parte, debe señalarse que la estación CV se ubica sobre un terreno, el malpaís de La Corona, caracterizado por una elevada porosidad. Esta zona porosa está delimitada por la antigua línea de costa, previa a la erupción del volcán de La Corona (1730-1736) (Arnoso, 1996). Para simular el efecto de carga causado por el agua que se filtra en esta zona de tierra, se ha desplazado la línea de costa real hasta hacerla coincidir con la de su antigua demarcación. El valor de la marea en las cuadrículas oceánicas que cubren esta zona se ha obtenido por interpolación del modelo CIAM, considerando el porcentaje de agua en su interior del  $8\%$ . Esta asignación se ha realizado después de diversas comparaciones entre el efecto de carga calculado y el observado en CV, según se presenta en los resultados finales en este Capítulo (Fig. 6.38). Debe señalarse que, este porcentaje es muy inferior al estimado inicialmente por Arnoso (1996) y Arnoso et al. (2001), que era de un  $50\%$ .

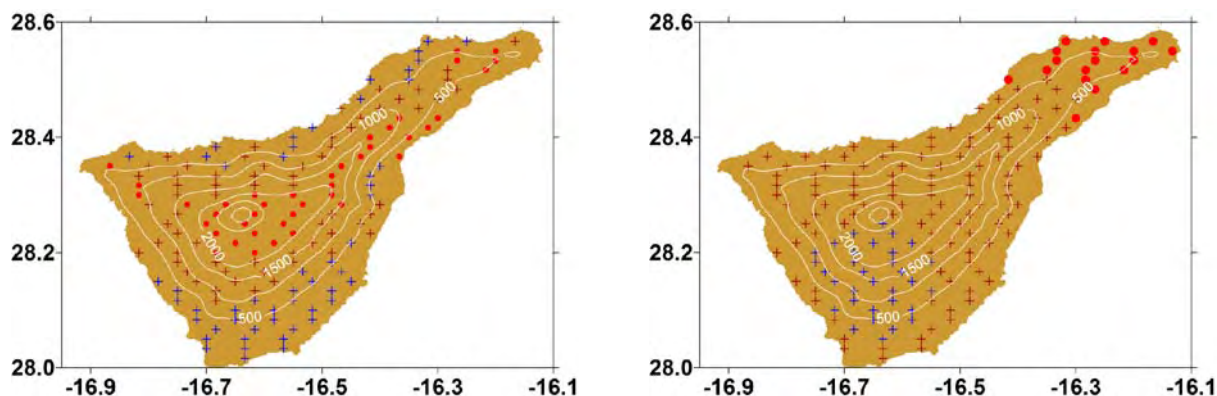
#### La Influencia del Modelo de Tierra:

En la Fig. 6.7 se han representado los resultados del cálculo del EOI con diferentes funciones de Green de carga en las estaciones CV, TP y AU para los constituyentes armónicos  $O_1$  y  $M_2$ . Se han considerado las obtenidas por Farrell (1972) para los modelos de Tierra elástica de Gutenberg-Bullen (GB) y una variante de éste último en la que se considera una estructura de corteza oceánica (GB-CO). Las calculadas a partir del modelo terrestre PREM por Matsumoto et al. (2001) (PREM-MAT), por Guo et al. (2004) (PREM-GUO) y por Jentzsch (1997) (PREM-CO), éstas últimas con una estructura de corteza oceánica. Las funciones de Green de carga calculadas por Matsumoto (comunicación

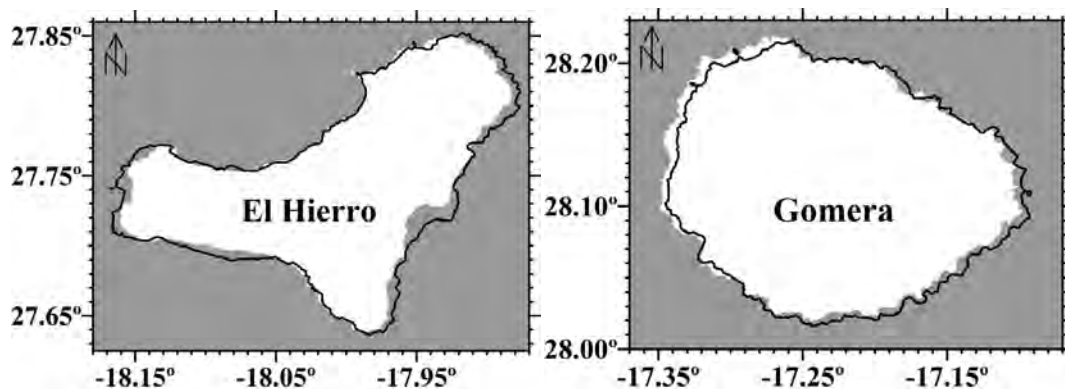
personal) para el modelo de Tierra Gutenberg Bullen, con la incorporación de una componente anelástica (GB-AN). Para la onda  $M_2$ , las mayores discrepancias en los resultados son los obtenidos con las funciones PREM-CO (en la componente coseno) y GB-AN (en la componente seno). Para las restantes funciones de Green, las diferencias en las tres estaciones son inferiores a  $0,2 \mu\text{Gal}$  y  $0,1 \mu\text{Gal}$  en las componentes coseno y seno, respectivamente. Para el armónico diurno  $O_1$ , no se encuentran diferencias significativas en ninguna estación para ninguna de las funciones de Green consideradas.



**FIGURA 6.10:** Mapa de El Hierro. Junto con las líneas de contorno de 500, 750, 1.000 y 1.200 m se señala la localización de 5 puntos sobre el terreno en los que se ha calculado el EOI.

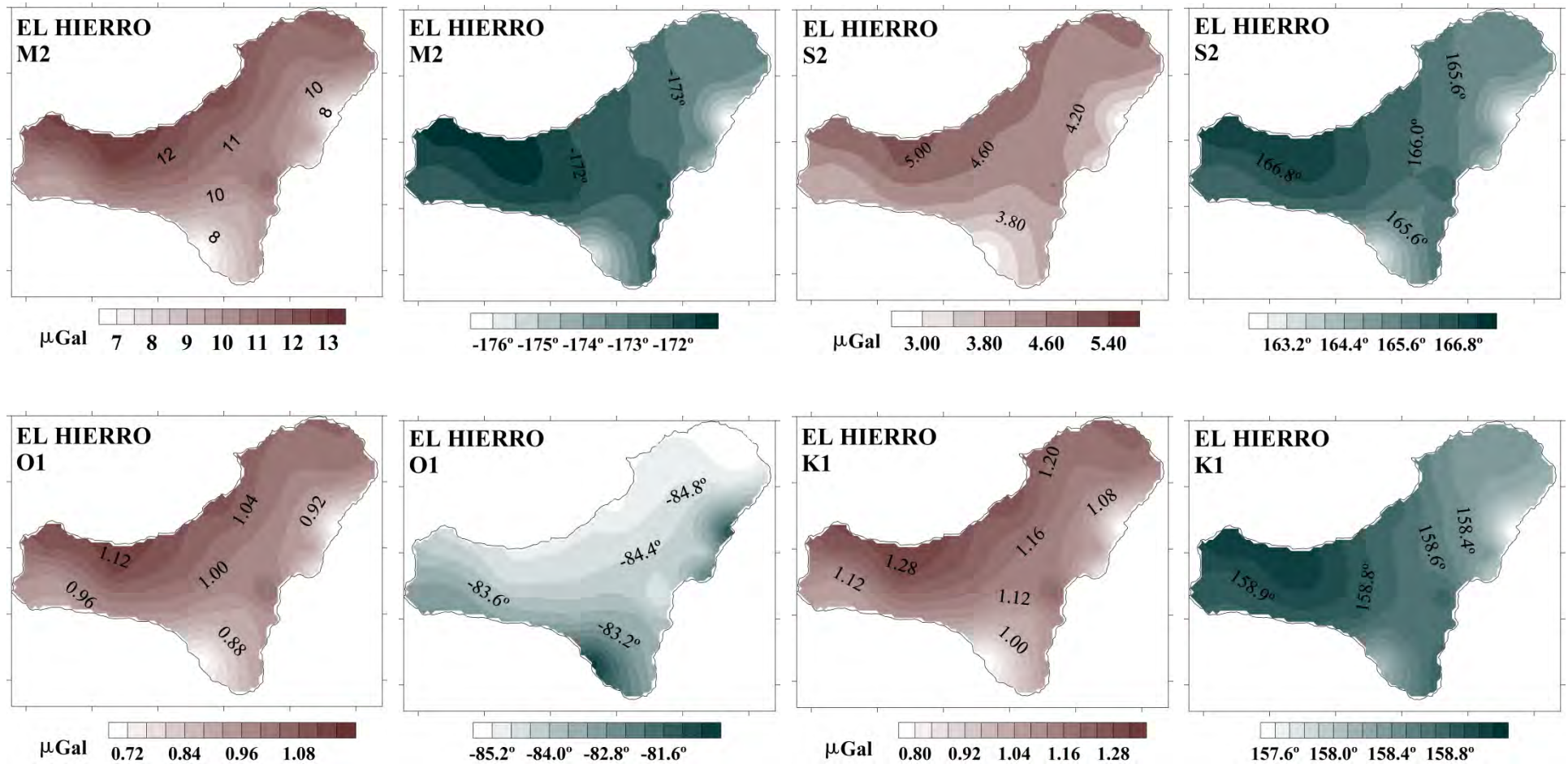


**FIGURA 6.11:** Líneas de contorno (a intervalos de 500 m) y localización de los puntos sobre el terreno en los que se ha calculado el EOI en Tenerife. (Izda.) Los círculos rojos, cruces marrones y azules indican los puntos en los que la contribución Newtoniana al EOI se encuentra en el rango de  $4$  a  $5 \mu\text{Gal}$ ,  $3$  a  $4 \mu\text{Gal}$  y  $1$  a  $3 \mu\text{Gal}$ , respectivamente. (Dcha.) Los círculos rojos, cruces marrones y azules indican los puntos en los que la contribución elástica al EOI se encuentra en el rango de  $5$  a  $5,25 \mu\text{Gal}$ ,  $5,25$  a  $5,5 \mu\text{Gal}$  y  $5,5$  a  $5,7 \mu\text{Gal}$ , respectivamente.



**FIGURA 6.12:** Comparación de las líneas de costa proporcionadas por la base de datos World Vector Shoreline Data (línea negra) con los modelos digitales del terreno (escala 1:25.000, proporcionados por el IGN de España), para las islas de El Hierro y La Gomera.

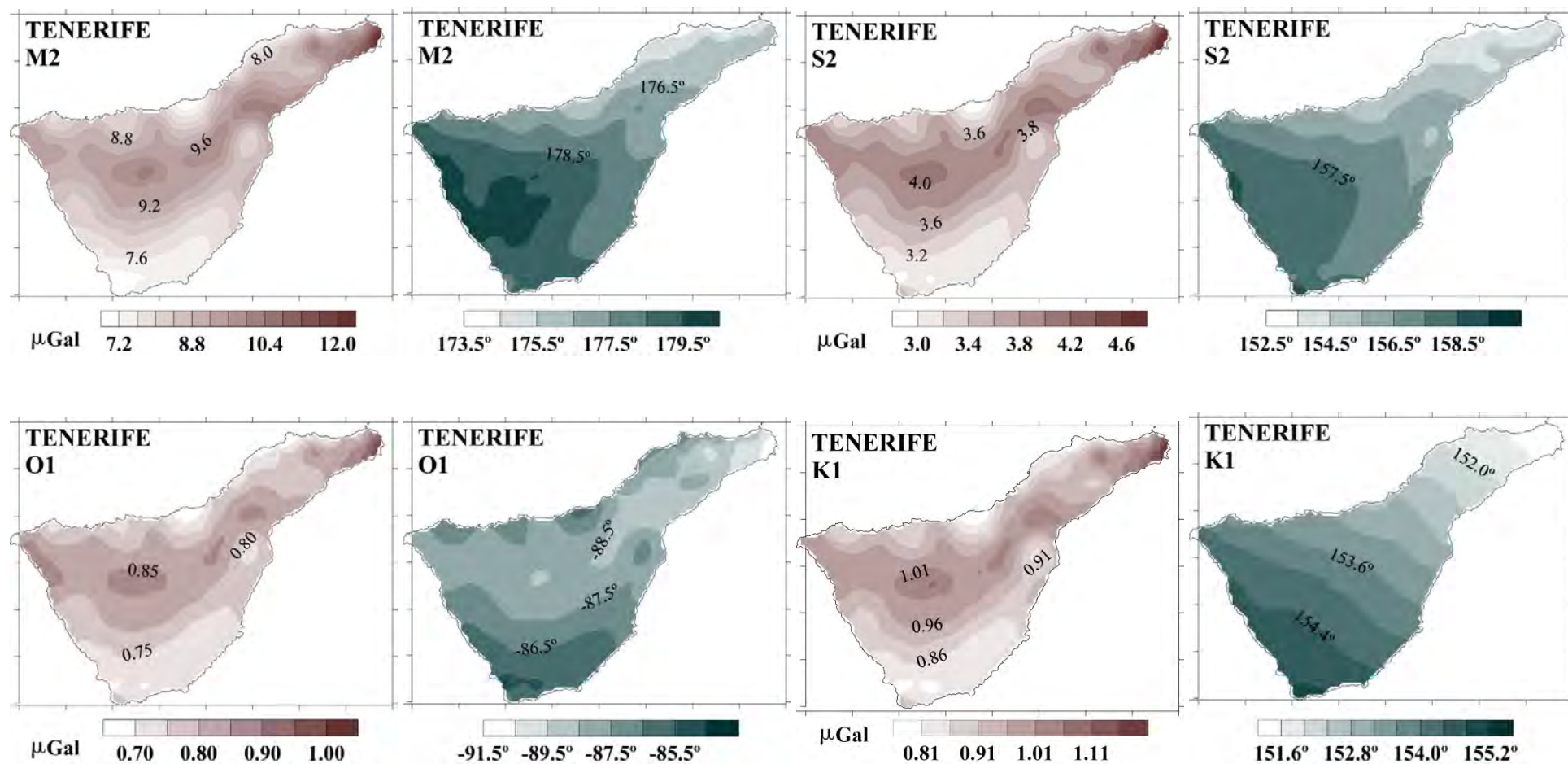
### VARIACIONES DE GRAVEDAD



**FIGURA 6.13:** Variaciones de gravedad (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases locales en grados), calculadas utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2, causadas en la isla de El Hierro por el EOI, para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ .

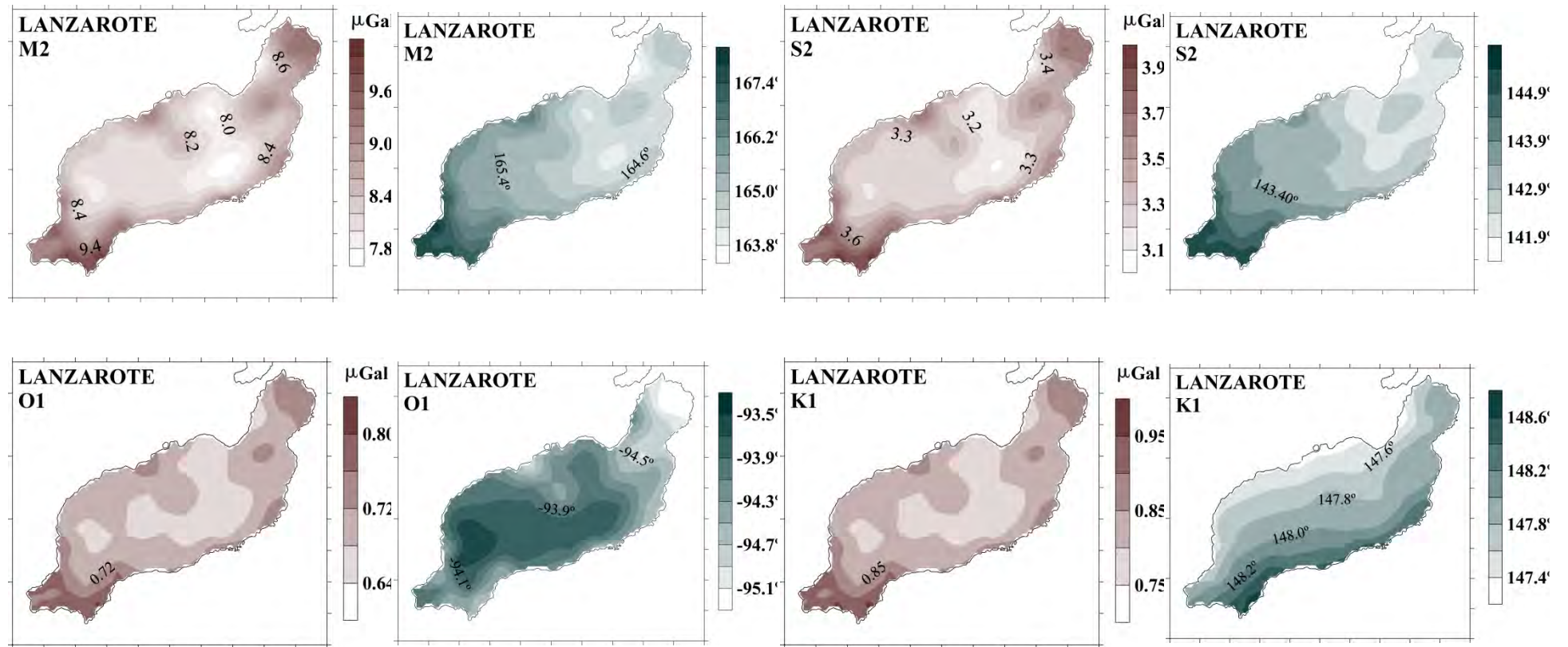


## VARIACIONES DE GRAVEDAD

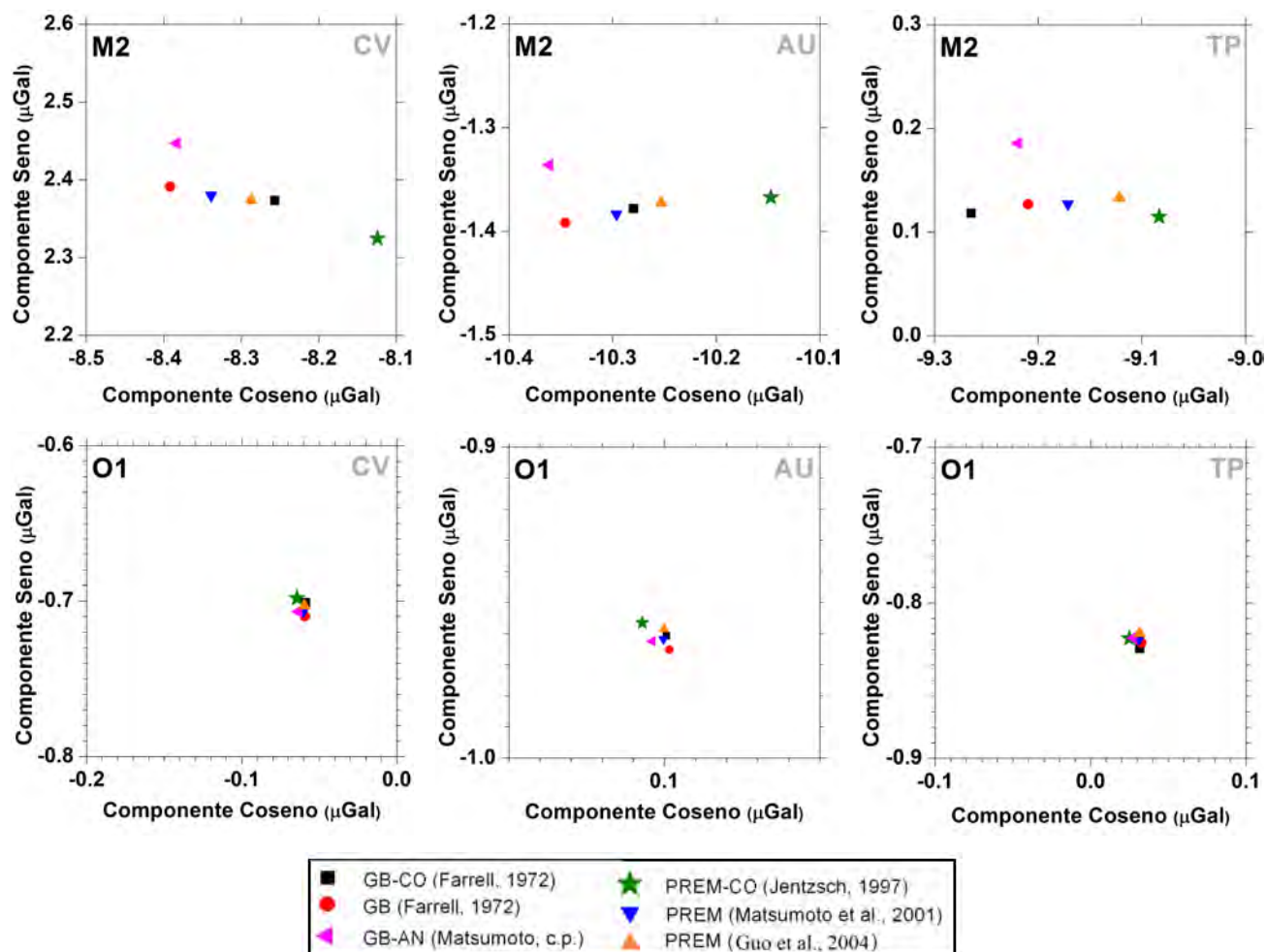


**FIGURA 6.14:** Variaciones de gravedad (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases locales en grados), calculadas utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2, causadas en la isla de Tenerife por el EOI, para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ .

### VARIACIONES DE GRAVEDAD



**FIGURA 6.15:** Variaciones de gravedad (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases locales en grados), calculadas utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2, causadas en la isla de Lanzarote por el EOI, para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ .



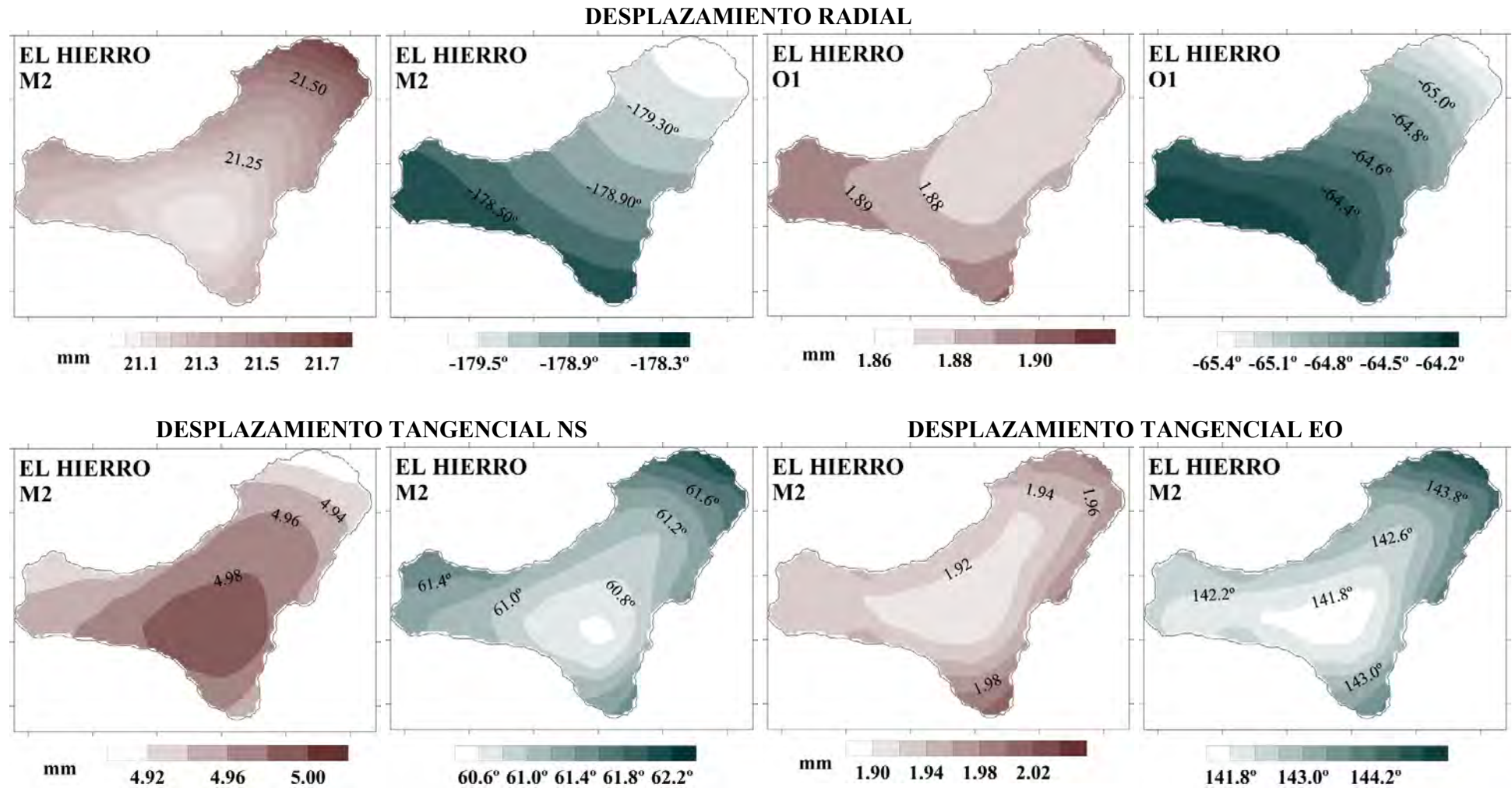
**FIGURA 6.16:** EOI calculado (utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2) para las ondas  $M_2$  y  $O_1$ , a partir de 6 funciones de Green de carga, en las estaciones CV, TP y AU.

#### 6.4.2 Cálculos de los Desplazamientos Originados por el EOI en las Islas de El Hierro, Tenerife y Lanzarote

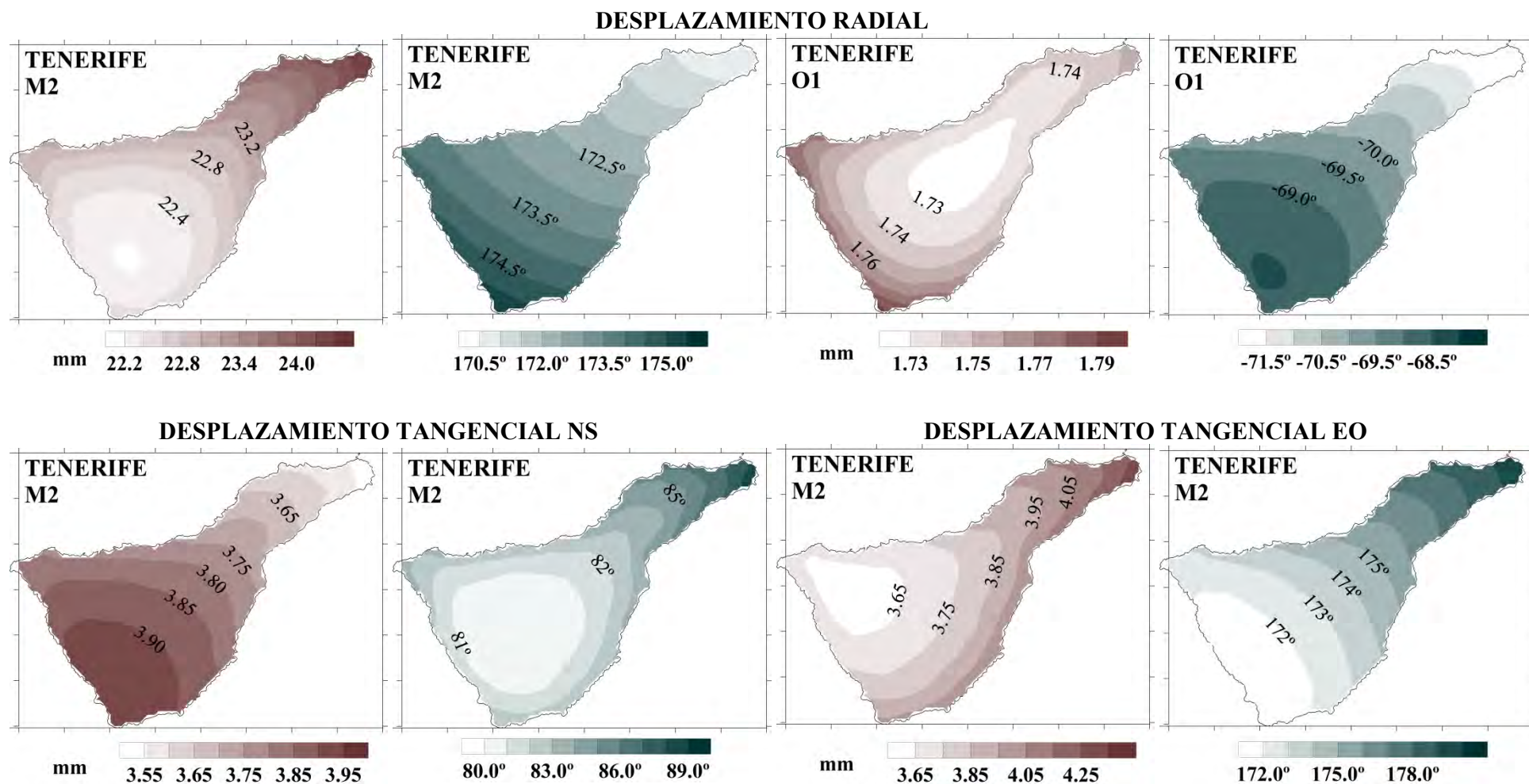
Se presenta en las Figuras 6.17 a 6.19 los mapas correspondientes a los desplazamientos radial y tangencial causados por el efecto de carga para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ .

Para la onda  $M_2$ , el valor de las amplitudes del desplazamiento radial originado por el EOI es del orden de 21.4 mm, 23.2 mm y 25.3 mm en El Hierro, Tenerife y Lanzarote, respectivamente. Las fases, para este mismo constituyente, se propagan de NE a SO. Para el constituyente diurno  $O_1$ , el valor medio de las amplitudes se reduce a 1.88 mm en El Hierro, 1.76 mm en Tenerife y 1.59 mm en Lanzarote. En el caso de los desplazamientos tangenciales originado por el EOI el valor de las amplitudes decrece considerablemente. Por ejemplo, para  $M_2$ , entre 3 y 5 mm para el desplazamiento en la dirección NS y entre 2 y 4 mm en la dirección EO.

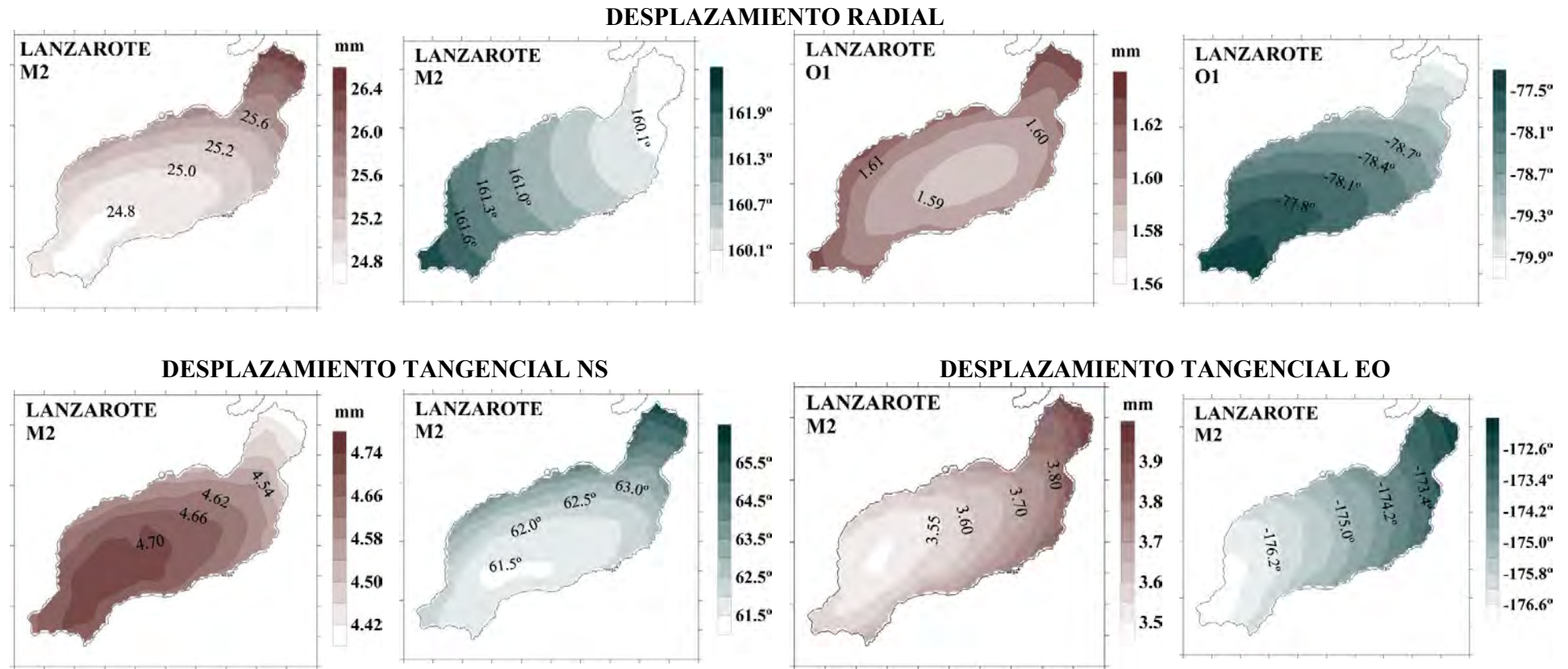




**FIGURA 6.17:** (Arriba) Desplazamiento radial originado por el EOI en la isla de El Hierro para las ondas de marea  $M_2$  y  $O_1$ . (Abajo) Desplazamientos tangenciales NS y EO causados por el EOI para la onda de marea  $M_2$ . Los cálculos se han realizado utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2. Las amplitudes dadas en mm y las fases, locales, en grados.



**FIGURA 6.18:** (Arriba) Desplazamiento radial originado por el EOI en la isla de Tenerife para las ondas de marea  $M_2$  y  $O_1$ . (Abajo) Desplazamientos tangenciales NS y EO causados por el EOI para la onda de marea  $M_2$ . Los cálculos se han realizado utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2. Las amplitudes están en mm y las fases, locales, en grados.

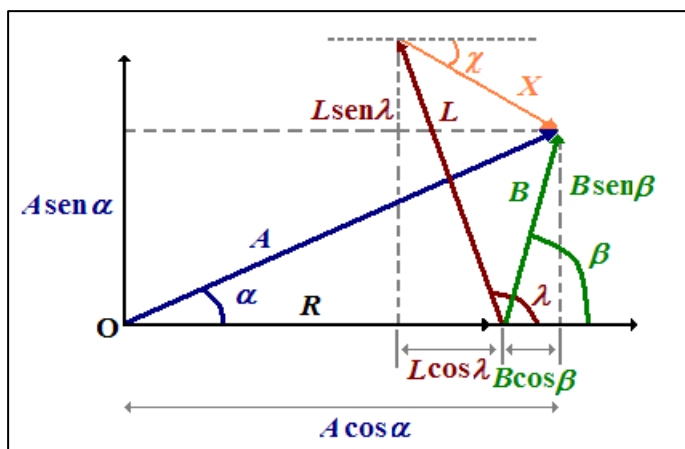


**FIGURA 6.19:** (Arriba) Desplazamiento radial originado por el EOI en la isla de Lanzarote para las ondas de marea  $M_2$  y  $O_1$ . (Abajo) Desplazamientos tangenciales NS y EO causados por el EOI para la onda de marea  $M_2$ . Los cálculos se han realizado utilizando el modelo GOT00.2 suplementado con CIAM2. Las amplitudes están en mm y las fases, locales, en grados.



## 6.5 Comparación entre la Marea Gravimétrica de Carga Observada y la Calculada

Como se detalló en la Sección 2.2 (Cap. 2), un registro de marea gravimétrica contiene, además de la propia señal de marea terrestre, el efecto de carga y atracción ejercido por la marea oceánica. Puesto que ambos fenómenos tienen el mismo espectro de frecuencias, su separación se realiza sustrayendo de las observaciones gravimétricas la respuesta terrestre a las fuerzas generadoras de marea, calculadas a partir de un modelo de Tierra determinado. Esta diferencia entre teoría y observación se denomina **residual de marea** y contendrá, además de otros efectos adicionales, el efecto de carga y atracción ejercido por la marea oceánica. Puesto que la marea gravimétrica, tanto teórica como observada, se expresa en forma compleja a partir de su amplitud y fase<sup>12</sup>, el vector residual de marea resultante también se expresa de esta manera (Fig. 6.20). Una vez calculado el residual de marea, éste se compara con el efecto de carga oceánica calculado a partir de un modelo oceánico de marea, según se describió en el Capítulo 2 y se realizó en las Secciones precedentes. Dicha comparación se lleva a cabo sobre las componentes real e imaginaria de ambos vectores (también denotadas por **componente en fase o coseno** y **componente en cuadratura o seno**). Antes de efectuar esta comparación es necesario definir algunos conceptos:



**FIGURA 6.20:** Relación entre los vectores de marea gravimétrica observada ( $A$ ), marea teórica ( $R, 0$ ), residual de marea ( $B, \beta$ ) y carga oceánica ( $L, \lambda$ ). El vector ( $X, \chi$ ) representa el residuo final (modificado de Melchior y De Becker, 1983).

### El vector de marea observado

Se determina a partir del análisis de las series temporales de observaciones gravimétricas, tal como se describió en el Capítulo 1. Este vector se denota por  $\mathbf{A}(A_i^{\text{OBS}}, \alpha_i^{\text{OBS}})$  siendo  $A_i^{\text{OBS}}$  y  $\alpha_i^{\text{OBS}}$  la amplitud y la fase, respectivamente. El subíndice  $i$  hace referencia al constituyente de marea. Obsérvese que

$$A_i^{\text{OBS}} = \delta_i^{\text{OBS}} A_i^{\text{TEO}} \quad [6.1]$$

donde  $\delta_i^{\text{OBS}}$  es el **factor de amplitud observado** y  $A_i^{\text{TEO}}$  la **amplitud teórica** de la fuerza generadora de marea, es decir, la amplitud de marea teórica calculada para un modelo de Tierra rígida a partir de

<sup>12</sup> En este Capítulo, siguiendo la convención de marea terrestre, un valor negativo de fase representa un retardo o desfase. Asimismo, en marea terrestre se consideran las fases referidas al meridiano local del punto estación.

un catálogo del potencial generador de marea. El error del vector  $\mathbf{A}$  viene dado por el error medio cuadrático (EMC) estimado en el proceso de ajuste de las observaciones, es decir

$$\text{Err}(A_i^{\text{OBS}}) = \text{EMC}(A_i^{\text{OBS}}), \text{Err}(\alpha_i^{\text{OBS}}) = \text{EMC}(\alpha_i^{\text{OBS}}) \quad [6.2]$$

Denotando por  $X_1 = A_i^{\text{OBS}} \cos(\alpha_i^{\text{OBS}})$  y  $X_2 = A_i^{\text{OBS}} \sin(\alpha_i^{\text{OBS}})$  las componentes coseno y seno del vector  $\mathbf{A}$ , su correspondiente error será

$$\text{Err}_{\cos}(\mathbf{A}) = \text{Err}(X_1) = \text{Err}A_i^{\text{OBS}} \cos(\text{Err}\alpha_i^{\text{OBS}}), \text{Err}_{\sin}(\mathbf{A}) = \text{Err}(X_2) = \text{Err}A_i^{\text{OBS}} \sin(\text{Err}\alpha_i^{\text{OBS}}) \quad [6.3]$$

### El vector de marea teórico

Se denota por  $\mathbf{R}(R_i^{\text{DDW}}, \alpha_i^{\text{DDW}} = 0)$  y se calcula para un modelo de Tierra sólida dado, tal como el modelo DDW, bien para el caso elástico o bien para el anelástico no hidrostático (Cap. 1). Este vector representa la respuesta del modelo de Tierra sólida considerado al potencial generador de marea. La correspondiente amplitud teórica se calcula mediante

$$R_i^{\text{DDW}} = \delta_i^{\text{DDW}} A_i^{\text{TEO}} = \delta_i^{\text{DDW}} (A_i^{\text{OBS}} / \delta_i^{\text{OBS}}) \quad [6.4]$$

Las discrepancias entre los factores observado y teórico,  $\delta_i^{\text{OBS}}$  y  $\delta_i^{\text{DDW}}$ , están asociadas, con la no rigidez de la Tierra y, también, con el efecto oceánico indirecto. En la Tabla 1.1 se encuentran listados los valores de  $\delta_i^{\text{DDW}}$  para los principales constituyentes de marea, en función de la latitud y de la frecuencia. Al ser el error en el modelo de Tierra del orden del 0,1%, el error en la amplitud teórica puede determinarse mediante (Arnoso et al., 2006)

$$\text{Err}(R_i^{\text{DDW}}) = 0,001 R_i^{\text{DDW}} \quad [6.5]$$

Como  $\alpha_i^{\text{DDW}} = 0$ , se tiene que  $X_1 = R_i^{\text{DDW}}$  y  $X_2 = 0$  son las componentes coseno y seno del vector  $\mathbf{R}$ , cuyo error será

$$\text{Err}_{\cos}(\mathbf{R}) = \text{Err}(X_1) = \text{Err}(R_i^{\text{DDW}}) \quad \text{Err}_{\sin}(\mathbf{R}) = \text{Err}(X_2) = 0 \quad [6.6]$$

### El vector de marea modelado

Se define como la suma del vector de marea teórico y el vector de carga,  $\mathbf{L}(L_i, \lambda_i)$ , y se denota por  $\mathbf{A}_M$ . Esto es,  $\mathbf{A}_M = \mathbf{R} + \mathbf{L}$ , con la amplitud ( $A_i^M$ ) y la fase ( $\alpha_i^M$ ) dadas por

$$A_i^M = \left[ \left( R_i^{\text{DDW}} \cos \alpha_i^{\text{DDW}} + L_i \cos \lambda_i \right)^2 + \left( R_i^{\text{DDW}} \sin \alpha_i^{\text{DDW}} + L_i \sin \lambda_i \right)^2 \right]^{1/2} \quad [6.7]$$

$$\alpha_i^M = \arctan \left[ \left( R_i^{\text{DDW}} \sin \alpha_i^{\text{DDW}} + L_i \sin \lambda_i \right) / \left( R_i^{\text{DDW}} \cos \alpha_i^{\text{DDW}} + L_i \cos \lambda_i \right) \right]$$

El *factor gravimétrico modelado* está definido por

$$\delta_i^M = A_i^M / A_i^{\text{TEO}} \quad [6.8]$$

Comparando  $A_i^M$  y  $A_i^{\text{OBS}}$  se podrá estudiar la adecuación de un modelo de marea oceánica a una determinada zona de estudio (Timofeev et al., 2006).

## El vector residual de marea

Para cada componente de marea  $i$ , el **vector residual de marea**, denotado por  $\mathbf{B}(B_i, \beta_i)$ , es la diferencia entre el vector de marea observado  $\mathbf{A}$  y el calculado a partir de un modelo teórico,  $\mathbf{R}$ , (Melchior et al., 1984)

$$\mathbf{B}(B_i, \beta_i) = \mathbf{A}(A_i^{\text{OBS}}, \alpha_i^{\text{OBS}}) - \mathbf{R}(R_i^{\text{DDW}}, 0) = \mathbf{A}(\delta_i^{\text{OBS}} A_i^{\text{TEO}}, \alpha_i^{\text{OBS}}) - \mathbf{R}(\delta_i^{\text{DDW}} A_i^{\text{TEO}}, 0) \quad [6.9]$$

Así, su amplitud y fase se obtienen mediante

$$B_i = \left[ \left( A_i^{\text{OBS}} \cos \alpha_i^{\text{OBS}} - R_i^{\text{DDW}} \right)^2 + \left( A_i^{\text{OBS}} \sin \alpha_i^{\text{OBS}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad [6.10]$$

$$\beta_i = \arctan \left[ \left( A_i^{\text{OBS}} \sin \alpha_i^{\text{OBS}} \right) / \left( A_i^{\text{OBS}} \cos \alpha_i^{\text{OBS}} - R_i^{\text{DDW}} \right) \right]$$

Expresando el vector  $\mathbf{B}$  en sus componentes coseno y seno, dadas respectivamente por  $X_i = B_i \cos(\beta_i)$  y  $X_2 = B_i \sin(\beta_i)$ , los correspondientes errores se pueden calcular a partir de

$$\begin{aligned} \text{Err}_{\cos}(\mathbf{B}) &= \left[ \text{Err}^2(A_i^{\text{OBS}}) + \text{Err}^2(R_i^{\text{DDW}}) \right]^{1/2} & \text{Err}_{\sin}(\mathbf{B}) &= \text{Err}(A_i^{\text{OBS}}) \\ \text{Err}(\mathbf{B}) &= \left[ \text{Err}_{\cos}^2(\mathbf{B}) + \text{Err}_{\sin}^2(\mathbf{B}) \right]^{1/2} & \text{Err}(\beta_i) &= \text{Err}(\alpha_i^{\text{OBS}}) \end{aligned} \quad [6.11]$$

El vector residual de marea  $\mathbf{B}$  contiene información, principalmente, relativa al EOI, a efectos perturbadores meteorológicos e hidrológicos y a otros efectos causados por la estructura terrestre local (p. ej., Zürn, 1997). Por tanto, la diferencia entre los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{L}$  estará determinado por estas causas. En un punto de observación, ambos vectores pueden compararse a través de sus respectivas componentes coseno y seno, para cada una de las principales ondas de marea. Asimismo, dicha comparación puede estudiarse considerando diversos modelos de Tierra, atendiendo a la dependencia de la latitud del factor gravimétrico, como consecuencia del aplanamiento de la Tierra y de las fuerzas de Coriolis y centrífuga, según se describió en el Capítulo 1.

## El vector residuo final

Este vector, denotado por  $\mathbf{X}(X, \chi)$ , se define como la diferencia entre el vector de marea observado y el vector de marea modelado. Equivalentemente, el vector residuo final expresa la diferencia entre el vector residual de marea observado,  $\mathbf{B}$ , y el vector de carga oceánica,  $\mathbf{L}$  (Melchior et al., 1984), es decir

$$\mathbf{X}(X_i, \chi_i) = \mathbf{B}(B_i, \beta_i) - \mathbf{L}(L_i, \lambda_i) = \mathbf{A}(A_i^{\text{OBS}}, \alpha_i^{\text{OBS}}) - \mathbf{R}(R_i^{\text{DDW}}, 0) - \mathbf{L}(L_i, \lambda_i) = \mathbf{A} - \mathbf{A}_M \quad [6.12]$$

Así, el vector corregido  $\mathbf{A}^{\text{COR}} = \mathbf{A} - \mathbf{L} = (\mathbf{B} + \mathbf{R}) - \mathbf{L} = \mathbf{X} + \mathbf{R}$  representa la marea observada corregida por el efecto oceánico calculado. Su amplitud y fase se calculan mediante

$$A_i^{\text{COR}} = \left[ \left( A_i^{\text{OBS}} \cos \alpha_i^{\text{OBS}} - L_i \cos \lambda_i \right)^2 + \left( A_i^{\text{OBS}} \sin \alpha_i^{\text{OBS}} - L_i \sin \lambda_i \right)^2 \right]^{1/2} \quad [6.13]$$

$$\alpha_i^{\text{COR}} = \arctan \left[ \left( A_i^{\text{OBS}} \sin \alpha_i^{\text{OBS}} - L_i \sin \lambda_i \right) / \left( A_i^{\text{OBS}} \cos \alpha_i^{\text{OBS}} - L_i \cos \lambda_i \right) \right]$$

De esta forma, se tiene el **factor gravimétrico corregido**

$$\delta_i^{\text{COR}} = A_i^{\text{COR}} / A_i^{\text{TEO}} \quad [6.14]$$

A partir de éste se puede calcular la **discrepancia** con el modelo terrestre considerado, mediante

$$\text{Discrepancia} = 100 \cdot \left[ \left( \delta_i^{\text{DDW}} - \delta_i^{\text{COR}} \right) / \delta_i^{\text{DDW}} \right] \quad [6.15]$$

El vector **X**, definido por [6.12], contiene la parte no explicada del vector residual observado **B**. Esto es, contendrá efectos provenientes de:

- Errores instrumentales sistemáticos como, por ejemplo, de calibración, deriva instrumental o influencias meteorológicas.
- Efectos geofísicos como, por ejemplo, los debidos a las heterogeneidades laterales de la litosfera y del manto superior o a imprecisiones en los modelos de marea oceánica.
- Errores de cálculo.

La componente en fase del vector residuo final ( $X \cos \chi$ ) depende, principalmente del modelo de Tierra considerado y, por tanto, contendrá información relativa a la estructura local de la corteza terrestre superior y a heterogeneidades laterales en la litosfera (p. ej., Shum et al., 1997). La componente en cuadratura estará afectada, en su mayor parte, por los errores instrumentales y por las incertidumbres en el modelo de marea oceánica considerado. Así, la comparación del EOI observado y el calculado, empleando diferentes modelos de Tierra y/o diferentes modelos oceánicos de marea, permite testear éstos últimos, así como evaluar las estructuras locales de la corteza y manto superior terrestre (p. ej., Baker, 1978; 1980). Estas comparaciones permiten, a su vez, seleccionar los modelos oceánicos que proporcionan un mejor ajuste con las observaciones con el fin de obtener una corrección más precisa de dicho efecto sobre éstas (p. ej., Jentzsch et al., 2000).

## 6.6 Comparación entre la Marea Gravimétrica de Carga Observada y la Calculada en Estaciones Situadas en la Península Ibérica y Melilla

### 6.6.1. Descripción General de la Marea Gravimétrica en la Península Ibérica

Las amplitudes típicas de la marea terrestre gravimétrica observada para la onda semi-diurna  $M_2$  en la Península Ibérica oscilan entre 45 y 55  $\mu\text{Gal}$ , estando las fases comprendidas entre  $2^\circ$  y  $13^\circ$ . Para el constituyente diurno  $O_1$ , las amplitudes se encuentran en el rango de 33 a 37  $\mu\text{Gal}$ , con fases que varían entre  $-1^\circ$  y  $4^\circ$ . Teniendo en cuenta las amplitudes características del EOI en la Península (Secc. 6.3), la carga oceánica de marea no es sólo una pequeña fracción de la señal total, si no que su contribución puede alcanzar hasta un 19% del total en la costa Atlántica, aunque decrece hasta un 5% en la costa Mediterránea, para el constituyente principal  $M_2$ . En el centro de la Península, la amplitud de la carga alcanza el 10% de la señal de marea terrestre para este mismo constituyente.

### 6.6.2. Validación del Modelo Oceánico IBER01

Con el fin de validar el modelo de marea oceánica desarrollado para la región de la Península Ibérica e investigar la adecuación de los modelos oceánicos globales más recientes a dicha región, se

ha comparado el efecto de carga calculado en la Sección 6.3, basado en 6 modelos oceánicos globales suplementados con IBER01 con los resultados del análisis de marea terrestre gravimétrica, para los principales constituyentes de marea ( $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $K_1$ )<sup>13</sup>, en las estaciones MEL, ALG, V-ABS y P-IAG, en las que se han realizado observaciones recientemente. Para exponer con claridad en esta Sección el procedimiento seguido y los resultados obtenidos, en primer lugar se describen las observaciones de marea gravimétrica consideradas (en lo que respecta a las estaciones, las series de datos, su análisis de marea y los resultados obtenidos). Posteriormente, se realiza la comparación entre el EOI observado y el calculado según lo expuesto en la Sección 6.5 y se presentan los resultados obtenidos.

### 6.6.2.1. Las Observaciones de Marea Gravimétrica

#### Descripción de las estaciones

Dos de las estaciones, Valle-Absoluta (denotada por V-ABS) y Pilar-IAG (P-IAG), situadas ambas en Madrid (Arnos et al., 2008), conectan los extremos de una línea de calibración gravimétrica precisa, donde se han llevado a cabo medidas de gravedad absoluta de forma periódica (Vieira et al., 1992; 1994; 2002).

- La estación **V-ABS** se encuentra ubicada en el Laboratorio de Gravedad Absoluta del IAG en el Valle de los Caídos, a una altitud de 1.212 m sobre el nivel del mar y a una distancia de unos 350 km de la costa más cercana. En dicha estación, las medidas se realizan sobre un pilar construido sobre una base de granito.
- La estación **P-IAG** se localiza en el edificio de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (Vieira et al., 2002), donde las medidas se realizan sobre el pilar de gravimetría absoluta construido en el laboratorio que el IAG dispone en los sótanos de la facultad. P-IAG se encuentra a una altitud de 639 m sobre el nivel del mar, a una distancia de unos 310 km de la costa más cercana y a 40 km de la estación V-ABS. Ambas estaciones, V-ABS y P-IAG, se localizan geográficamente muy próximas a las también estaciones de la Red Española de Marea Terrestre Gravimétrica 0401 y 0402, respectivamente (Tabla 6.1).
- La estación Algodonales, **ALG** (Arnos et al., 2010), se encuentra ubicada en la provincia de Cádiz a una distancia de unos 55 km de la costa más cercana y una altitud de 356 m. Las observaciones se realizan sobre un pilar de la red de acelerómetros del IGN. Además, se encuentra muy próxima a otras dos estaciones de la Red de Marea Terrestre Gravimétrica del IAG, las estaciones Granada-0404 y San Fernando-0406 (Tabla 6.1).
- La estación Melilla, **MEL** (Arnos et al., 2010), se sitúa en el extremo norte del continente africano, a una altitud de 115 m sobre el nivel del mar y a una distancia ligeramente inferior a un kilómetro de la costa más próxima. Las observaciones se realizaron sobre un pilar de

<sup>13</sup> Los resultados para las ondas de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  se listan en las Tablas 6.4 a 6.7 y para las ondas  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$  y  $P_1$  en la Tabla 11 (Apéndice 2).



grandes dimensiones, situado en la planta semi-sótano de unas dependencias cedidas temporalmente por el Acto. Millán Astray de la Legión, perteneciente al Ejército de Tierra.

La Figura 6.21 muestra la localización de las estaciones cuyas coordenadas geográficas se listan en la Tabla 6.1. Asimismo, en la Fig. 6.22 se presentan diversas fotografías de las estaciones tomadas durante la época en la que los gravímetros estuvieron operativos en las mismas.



**FIGURA 6.21:** Localización de las estaciones de marea gravimétrica V-ABS, P-IAG, ALG y MEL utilizadas para la validación del modelo oceánico IBER01.



**FIGURA 6.22:**

Fotografías del gravímetro LCR-GRAVITON-EG1194 registrando en las estaciones V-ABS (octubre de 2007) y ALG (noviembre de 2008). La fotografía de la estación MEL corresponde al gravímetro en LCR-G933 (marzo de 2010).

(Fotografías: J. Arnoso)

### Descripción del equipamiento científico utilizado

Las observaciones realizadas en las estaciones V-ABS, P-IAG y ALG se han llevado a cabo con el gravímetro relativo LaCoste&Romberg Graviton-EG1194 (LCR-GRAVITON-EG1194), mientras que en la estación MEL el gravímetro empleado ha sido el LaCoste&Romberg modelo G número 933 (LCR-G933) (Fig. 6.23). Ambos gravímetros pertenecen al Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM). En cada estación, el almacenaje digital de los datos se realizó a través de diferentes sistemas de adquisición de datos. Además, otra instrumentación meteorológica adicional estuvo operativa simultáneamente con los gravímetros. A continuación se resume el equipamiento científico instalado en cada una de las estaciones:

- El sistema de registro digital en la estación MEL, utilizado para la toma de datos del LCR-G933, es un *datalogger Campbell serie CR850s*. Además, este sistema cuenta con una estación micro-

meteorológica, compuesta de un sensor de presión atmosférica *Vaisala PTB110* y una sonda de temperatura y humedad del aire *Vaisala HMP45AC*, s/n *D1710007*. El gravímetro se instaló sobre tejos en el pilar de la estación.

- En **ALG**, junto con el gravímetro LCR-GRAVITON-EG1194, se utilizó la misma estación micro-meteorológica y *datalogger* que en la estación MEL.
- En la estación **V-ABS**, junto con el LCR-GRAVITON-EG1194 se dispuso de un sistema de adquisición de datos *Campbell serie CR1000*, que incorporaba un sensor de presión atmosférica *SETRA-278* y una sonda de humedad y temperatura del aire *Vaisala HMP45AC*.
- En la estación **P-IAG**, se hicieron observaciones con el LCR-GRAVITON-EG1194. Los parámetros de la presión atmosférica y de la temperatura del aire se tomaron con los sensores internos del propio gravímetro. Estas observaciones fueron realizadas en el año 2005 por R. Vieira y E. Vélez (comunicación personal).

En todas las estaciones el periodo de muestro de las observaciones es de 1 dato por segundo y el periodo de almacenaje de 1 dato por minuto, con excepción de P-IAG, donde el de almacenaje fue de 20 segundos. En la Fig. 6.24 se muestran diversas fotografías de la instrumentación aquí señalada.



**FIGURA 6.23:**  
*Imagen frontal de los gravímetros LCR-G933 (izda.) y LCR-GRAVITON-EG1194 (dcha.).*



**FIGURA 6.24:** *Fotografías de diversos instrumentos de observación operativos en las estaciones MEL, ALG, V-ABS y P-IAG: (Arriba) Sistema de adquisición de datos Campbell CR850 (izda.), gravímetro LCR-933 y sonda de temperatura y humedad del aire Vaisala HMP45AC (dcha.). (Abajo) Sensores de presión atmosférica Vaisala PTB110 (izda.) y SETRA-278 (dcha.). (Fotografías: J. Arnoso)*

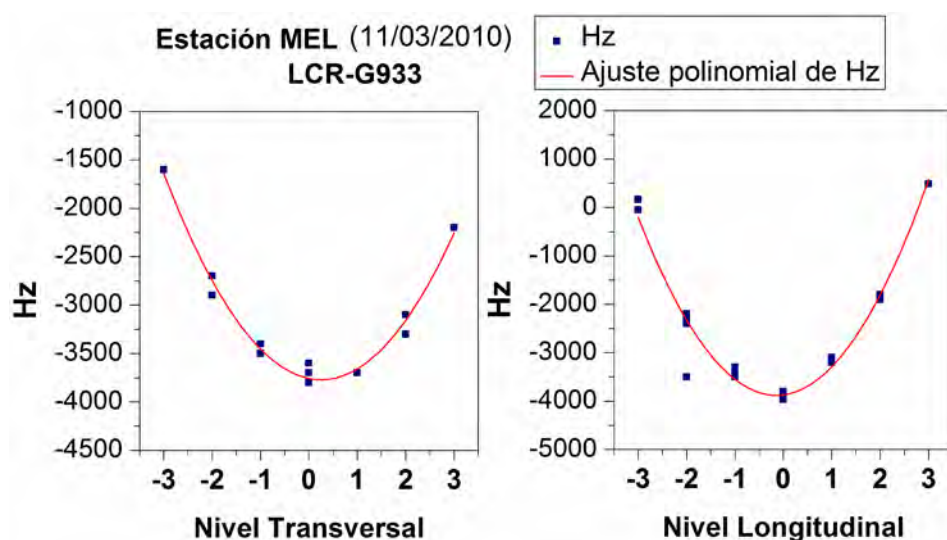
### Calibración de los gravímetros

La principal fuente de error en las observaciones de marea gravimétrica proviene de la calibración de los gravímetros, el desfase y la deriva instrumental (p. ej., Baker et al., 1991b; 1996; Rydelek et al., 1991; Melchior, 1995). Los dos gravímetros empleados en las observaciones

de marea gravimétrica en las estaciones consideradas, el LCR-GRAVITON-EG1194 y el LCR-G933, han sido testeados en diversas ocasiones utilizando **la línea de calibración Madrid-Valle de los Caídos del IAG** para comprobar su escala. Esta línea de calibración, que fue diseñada y observada por primera vez en 1978, está formada por 16 estaciones distribuidas a lo largo de 60 kilómetros, desde Madrid hasta la vertiente suroriental de la Sierra de Guadarrama, al noroeste de la Comunidad de Madrid. Ha sido re-observada en más de 30 ocasiones con diferentes gravímetros relativos, tiene un rango de 120 miligales y, además, incluye dos estaciones de gravedad absoluta en sus extremos, V-ABS y P-IAG (Vieira et al., 1994; Vieira et al., 2002). Por ejemplo, la calibración del LCR-GRAVITON-EG1194 en esta línea muestra variaciones del orden del 0,1 % en el factor de escala a lo largo del tiempo. Las dos estaciones anteriores han sido observadas repetidamente desde el año 1989 mediante gravímetros absolutos, lo que proporciona una escala absoluta de referencia (Vieira et al., 2002). En la estación V-ABS se han realizado observaciones con diversos gravímetros relativos y se encuentra situada muy próxima a la estación fundamental de marea terrestre 0401, con la que además está enlazada. Esta última es la referencia de la Red Española de Marea Gravimétrica (Vieira et al., 1986c, 2002) y en ella se han realizado observaciones con numerosos gravímetros de tipo LCR-G, LCR-ET y Askania. A su vez, 0401 se encuentra enlazada con la base de Bruselas, después de que en ella se realizaran diversas comparaciones con gravímetros del IAG y con el gravímetro más preciso LCR-ET (Baker et al., 1989). Por ello, se conocen los parámetros de marea con una exactitud del 0,1%. De esta forma, se han podido escalar los parámetros de marea tras analizar y comparar las observaciones realizadas en V-ABS y P-IAG con los gravímetros del IAG LCR-GRAVITON-EG1194, LCR-G933 y LCR-G665. El proceso de normalización para marea terrestre se ha realizado con una exactitud en la escala del 0,03% y 0,1° en el retardo de las fases. De esta forma, la calibración (que incluye la del sistema de retroalimentación más la normalización) es estable al nivel del 0,1% y 0,25% para los gravímetros LCR-GRAVITON-EG1194 y LCR-G933, respectivamente, instalados en las estaciones que se han descrito anteriormente.

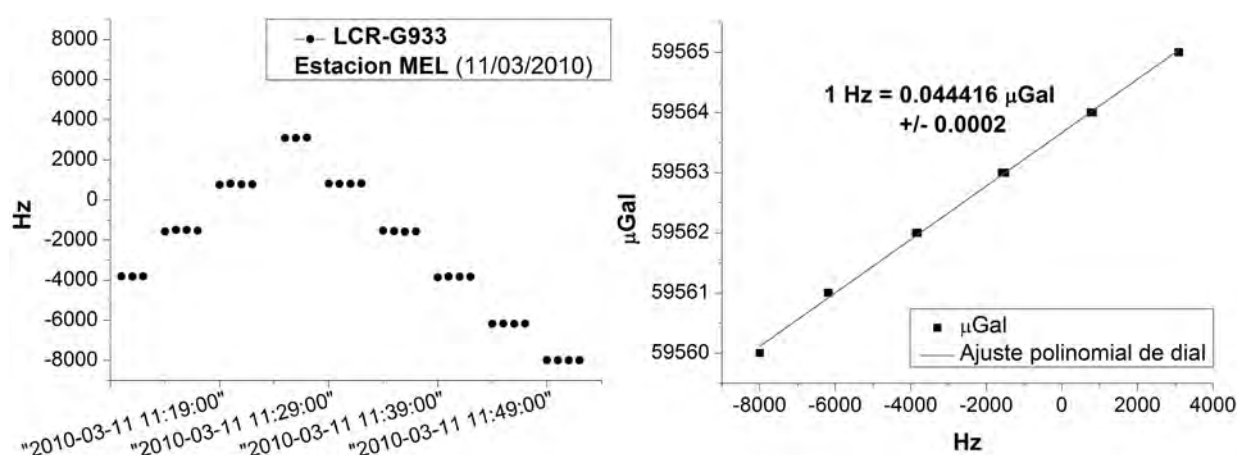
Además de lo anterior, el feedback del gravímetro LCR-G933 ha sido calibrado periódicamente, mediante el tornillo micrométrico, para verificar la funcionalidad de este sistema de retroalimentación a lo largo del tiempo. El proceso seguido consiste en realizar medidas de la salida del sistema tras desplazar la posición del tornillo micrométrico alrededor de su posición de equilibrio (p. ej., Riccardi et al., 2002). Después de repetir este proceso varias veces a lo largo de la observación, la discrepancia obtenida para el gravímetro LCR-G933 es del 0,25% (Arnosó et al., 2010). Como ejemplo, se ha representado en la Fig. 6.25 una calibración del feedback realizada a este gravímetro, siguiendo el procedimiento descrito, en la estación MEL. De forma complementaria a la calibración anterior, se puede comprobar el retardo en fase del feedback, mediante el uso del método respuesta (Richter y Wenzel, 1991) que permite estudiar la respuesta del filtro paso bajo de dicho sistema de retroalimentación.

Asimismo, se ha comprobado la posición de los niveles de burbuja en el caso del gravímetro LCR-G933, utilizando el método clásico de la parábola, que garantiza que el gravímetro se encuentre en la posición de mínima sensibilidad a la inclinación (p. ej., Nakagawa et al., 1985). En la Fig. 6.26 se presentan los resultados de la parábola realizada al LCR-G933 en la estación MEL, en el momento de su estacionamiento. En ella se observa la posición de centrado que presenta la parábola.



**FIGURA 6.25:**

Parábola realizada al gravímetro LCR-G933 en la estación de Melilla. La imagen de la izquierda corresponde al nivel longitudinal y la de la derecha al transversal.



**FIGURA 6.26:** Ejemplo típico de los saltos realizados en una calibración del feedback del gravímetro LCR-G933 en la estación de Melilla. A la derecha, el resultado del ajuste lineal realizado para calcular el valor de calibración.

### 6.6.2.2. Las Series Temporales Observadas y el Análisis de Marea Gravimétrica

En cada estación, los parámetros de marea terrestre se determinan a partir del análisis de las variaciones temporales de gravedad observadas. En tres de las estaciones, V-ABS, P-IAG y ALG, la duración de las observaciones es de unos seis meses (Arnosó et al., 2008; Arnoso et al., 2010). En el caso de la estación MEL, dado que el periodo de observación continua en el momento de elaborar esta memoria, la longitud de la serie observada se limita a tres meses y, por tanto, los resultados aquí expuestos deben considerarse como preliminares. La Tabla 6.3 resume la información relativa a las series temporales consideradas. La Figura 6.27 muestra ejemplos de las series de datos registradas en las diversas estaciones para un periodo de tiempo de, aproximadamente, un mes.

Previamente al análisis de marea terrestre, se realiza un procesado preliminar de los datos brutos, empleando el software TSOFT (Van Camp y Vauterin, 2005) con el fin de corregir saltos, picos u otras perturbaciones que pueden aparecer en los registros. El análisis de marea terrestre se ha realizado con el programa VAV (Cap. 1). En todos los casos se ha hecho uso de una opción especial incluida en él para la detección de errores groseros en los residuales durante el proceso de análisis. Esta opción permite detectar señales anómalas de corta duración, comparando los residuales observados con un umbral prefijado con un nivel de significación, para los intervalos de confianza de establecidos. Así, los datos cuyos residuales superan dicho umbral no se consideran en el análisis y se repite el proceso (Venedikov et al., 2003). Por otra parte, el efecto de la presión del aire sobre las observaciones de la gravedad se puede determinar empíricamente con el programa VAV, mediante un análisis de regresión entre las observaciones de la marea gravimétrica y de la presión del aire, que se realiza de manera simultánea al proceso de análisis de marea. De forma análoga a la presión del aire, se puede calcular el efecto de la temperatura del aire observada sobre las variaciones de gravedad.

El potencial de marea considerado en el análisis es el de Tamura (1987)<sup>14</sup>. Para determinar la respuesta de la Tierra sólida, el cálculo de los residuales observados se ha realizado considerando el modelo DDW, casos elástico y anelástico (Dehant et al., 1999). Finalmente, añadiendo las correcciones de marea terrestre, de presión atmosférica y de deriva instrumental a los valores de gravedad observada se tiene una señal residual que, en general, está dominado por la señal de carga oceánica (p. ej., Fig. 6.28).

**TABLA 6.3:** *Periodo de observación, número de días efectivos analizado y gravímetro utilizado en las estaciones MEL, ALG, V-ABS y P-IAG.*

Estación	Gravímetro	Periodo		Nº Días
		Desde	Hasta	
<b>MEL</b>	LCR-G933	2010/03/13	2010/06/22	102
<b>ALG</b>	LCR GRAVITON-EG1194	2008/10/09	2009/03/23	140
<b>V-ABS</b>	LCR GRAVITON-EG1194	2007/09/06	2008/03/14	157
<b>P-IAG</b>	LCR GRAVITON-EG1194	2005/01/11	2005/09/28	156

### Resultados del Análisis de Marea Terrestre

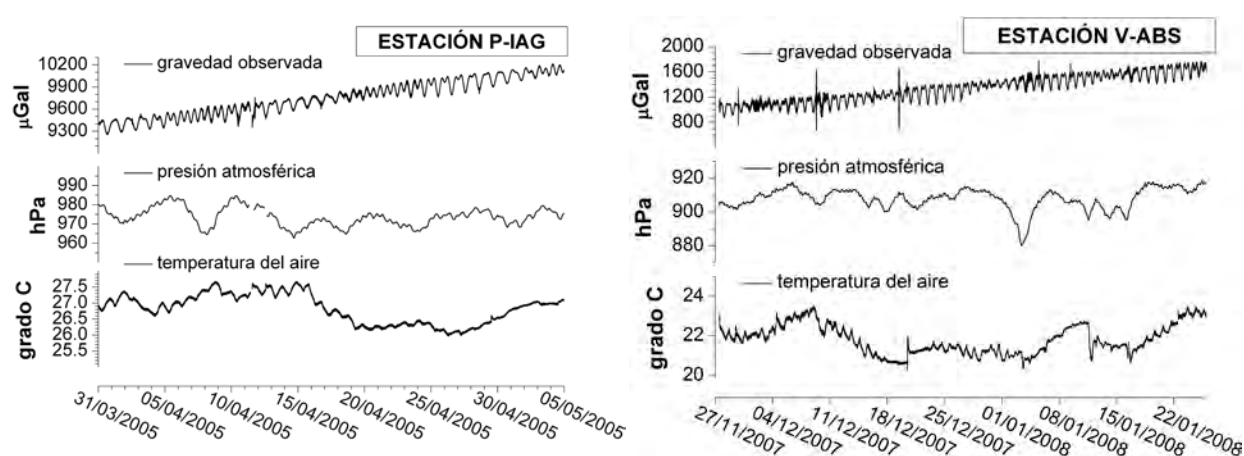
Los resultados de los análisis de marea terrestre (amplitudes observadas, factores gravimétricos y diferencias de fase) para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  se presentan en las Tablas 6.4 a 6.7. Debe señalarse que, en la estación MEL las desviaciones estándar obtenidas en el análisis son mayores que en las restantes estaciones, debido a la corta longitud de la serie temporal. En la Tabla 6.8 se listan los valores del vector residual de marea calculado a partir del modelo DDW, caso anelástico no hidrostático, para estas mismas ondas. De ellas se desprende que, para las ondas de marea  $M_2$  y  $S_2$  la magnitud de la carga oceánica es, aproximadamente, un 9% y un 7%, respectivamente, de la amplitud de marea observada en las estaciones V-ABS, P-IAG y ALG. Para las ondas  $O_1$  y  $K_1$ , también en estas

<sup>14</sup> El uso de catálogos del potencial de marea más recientes no influye en los resultados. P. ej., con el potencial de Hartman y Wenzel (1995) se tienen variaciones en los factores gravimétricos inferiores al 0,006% y a 0,01° en el retardo de fases.

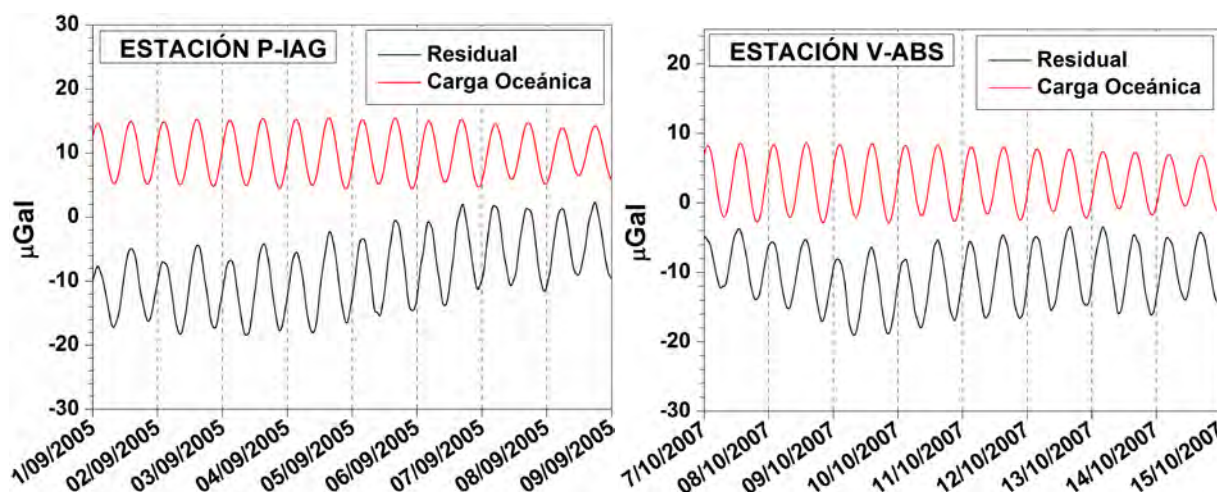


tres estaciones, la amplitud de la marea de carga es ligeramente inferior al 1% de la amplitud de la marea observada. En el caso de la estación MEL la magnitud de la carga oceánica se reduce a un 6%, 5%, 0,4% y 0,8% de la amplitud observada para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ , respectivamente.

Como ejemplo, se ha representando en la Fig. 6.28 el EOI calculado y el residual de marea gravimétrica en las estaciones V-ABS y P-IAG. Este último se ha calculado sustrayendo de la marea gravimétrica observada la marea teórica, calculada utilizando el modelo DDW para una Tierra elíptica, en rotación y anelástica no hidrostática (Dehant et al., 1999). En las dos gráficas se observa, claramente, la magnitud del EOI y la correlación existente entre las dos curvas, aunque el residual de marea presenta otros efectos no modelados, como las perturbaciones locales del sitio de observación y otras contribuciones de origen atmosférico.



**FIGURA 6.27:** Variaciones de gravedad, presión atmosférica y temperatura del aire observadas en las estaciones ALG, MEL, P-IAG y V-ABS, para un periodo de tiempo de un mes.



**FIGURA 6.28:** Residuales de la marea gravimétrica observada (curva negra), después de sustraer la marea teórica calculada utilizando el modelo de Tierra anelástico DDW y la marea gravimétrica de carga (curva roja) calculada, a partir del modelo FES2004 suplementado con IBER01, en las estaciones P-IAG (arriba) y V-ABS (abajo).

**TABLA 6.4:** Amplitudes observadas ( $A$ ), factores gravimétricos ( $\delta$ ) y desfases ( $\alpha$ ) para la onda  $M_2$ , en las estaciones V-ABS, P-IAG, ALG y MEL. El potencial de marea utilizado es Tamura (1987). Amplitudes ( $L$ ) y fases ( $\lambda$ ) de la marea gravimétrica de carga, calculada a partir de seis modelos oceánicos globales suplementados con IBER01 (y con refinamiento de la cuadrícula oceánica en torno a las estaciones ALG y MEL).  $\delta^c$  y  $\alpha^c$  son los factores de amplitud observados y desfases después de la corrección por el efecto de la carga oceánica. En cada estación se indica el valor medio de los factores gravimétricos corregidos y las desviaciones estándar. Se proporciona el modelo de Tierra anelástico DDW, para comparación. Las amplitudes están en  $\mu\text{Gal}$  y las fases en grados (locales).

Observado	M <sub>2</sub>															
	V-ABS				P-IAG				ALG				MEL			
	A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α	
	49.596	1.14691	5.063		49.854	1.14619	4.704		53.754	1.11877	4.556		57.073	1.14132	3.195	
	±0.035	±0.00081	±0.041		±0.030	±0.00068	±0.034		±0.034	±0.00070	±0.035		±0.042	±0.00084	±0.042	
Modelo+IBER01	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ
GOT00.2	1.16351	0.09	4.39	101.98	1.16082	0.04	4.13	101.23	1.16359	0.11	4.77	119.15	1.16515	-0.02	3.45	111.78
CSR4.0	1.16414	0.08	4.41	102.29	1.16145	0.03	4.15	101.56	1.16501	0.06	4.84	119.61	1.16628	-0.06	3.51	112.39
TPX07.1	1.16324	0.07	4.41	101.77	1.16051	0.03	4.14	101.01	1.16340	0.10	4.77	119.02	1.16496	-0.03	3.45	111.61
FES2004	1.16370	0.10	4.39	102.09	1.16097	0.06	4.12	101.35	1.16369	0.12	4.76	119.28	1.16529	-0.01	3.44	111.98
GOT4.7	1.16298	0.06	4.41	101.62	1.16029	0.01	4.15	100.85	1.16293	0.10	4.76	118.78	1.16455	-0.02	3.44	111.31
AG2006	1.16399	0.09	4.40	102.23	1.16131	0.04	4.14	101.50	1.16382	0.11	4.77	119.30	1.16534	-0.02	3.45	111.95
MEDIA	1.16359	0.08			1.16089	0.03			1.16374	0.10			1.16526	-0.03		
STDV	0.00044	0.01			0.00045	0.02			0.00070	0.02			0.00058	0.02		
DDW	1.16189				1.16189				1.16185				1.16184			

**TABLA 6.5:** Igual que la Tabla 6.4 para la onda de marea  $S_2$ .

Observado	S <sub>2</sub>															
	V-ABS				P-IAG				ALG				MEL			
	A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α	
	23.808	1.18338	3.117		23.899	1.18098	2.893		25.860	1.15683	3.429		27.044	1.16243	2.410	
	±0.032	±0.00161	±0.091		±0.032	±0.00160	±0.086		±0.033	±0.00147	±0.082		±0.063	±0.00272	±0.169	
Modelo+IBER01	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ
GOT00.2	1.16492	-0.43	1.51	77.11	1.16333	-0.43	1.42	76.67	1.16343	-0.34	1.71	96.49	1.16225	-0.28	1.27	90.87
CSR4.0	1.16651	-0.45	1.51	78.35	1.16492	-0.44	1.42	78.00	1.16558	-0.37	1.73	98.02	1.16409	-0.32	1.29	92.76
TPX07.1	1.16322	-0.34	1.48	75.49	1.16155	-0.36	1.40	74.96	1.16192	-0.26	1.67	95.49	1.16093	-0.22	1.24	89.48
FES2004	1.16360	-0.37	1.49	75.89	1.16204	-0.36	1.40	75.38	1.16228	-0.28	1.68	95.73	1.16126	-0.22	1.24	89.84
GOT4.7	1.16417	-0.43	1.51	76.52	1.16259	-0.42	1.42	76.05	1.16286	-0.32	1.70	96.10	1.16178	-0.28	1.27	90.38
AG2006	1.16579	-0.42	1.50	77.71	1.16418	-0.41	1.41	77.29	1.16445	-0.31	1.70	97.31	1.16304	-0.26	1.26	91.72
MEDIA	1.16470	-0.41			1.16310	-0.40			1.16342	-0.31			1.16223	-0.26		
STDV	0.00128	0.04			0.00129	0.04			0.00138	0.04			0.00118	0.04		
DDW	1.16189				1.16189				1.16185				1.16184			

**TABLA 6.6:** Igual que la Tabla 6.4 para la onda de marea  $O_1$ .

Observado	O <sub>1</sub>																	
	V-ABS				P-IAG				ALG				MEL					
	A		δ		α		A		δ		α		A		δ		α	
IBER01+	35.200	1.14654		-0.208	35.152	1.14633		-0.290	34.285	1.15019		-0.425	33.827	1.15518		-0.238		
	±0.045	±0.00146		±0.070	±0.024	±0.00078		±0.039	±0.027	±0.00089		±0.044	±0.076	±0.00260		±0.131		
Modelo	δ <sup>c</sup>	α <sup>c</sup>	L	λ	δ <sup>c</sup>	α <sup>c</sup>	L	λ	δ <sup>c</sup>	α <sup>c</sup>	L	λ	δ <sup>c</sup>	α <sup>c</sup>	L	λ		
GOT00.2	1.15279	0.05	0.25	-140.15	1.15213	-0.05	0.23	-140.81	1.15529	-0.05	0.27	-124.51	1.15818	-0.10	0.12	-137.31		
CSR4.0	1.15296	0.07	0.26	-139.36	1.15231	-0.04	0.24	-139.98	1.15542	-0.04	0.28	-124.06	1.15834	-0.08	0.13	-135.58		
TPX07.1	1.15282	0.02	0.24	-143.49	1.15215	-0.08	0.22	-144.42	1.15543	-0.08	0.26	-127.15	1.15850	-0.12	0.12	-144.30		
FES2004	1.15350	0.03	0.26	-145.35	1.15294	-0.07	0.244	-146.30	1.15621	-0.07	0.28	-130.07	1.15920	-0.11	0.14	-147.48		
GOT4.7	1.15306	0.01	0.24	-146.66	1.15184	-0.12	0.20	-147.81	1.15551	-0.10	0.25	-129.60	1.15844	-0.15	0.11	-150.27		
AG2006	1.15267	0.06	0.25	-138.86	1.15226	-0.04	0.24	-139.36	1.15537	-0.04	0.28	-123.66	1.15829	-0.08	0.13	-134.69		
MEDIA	1.15297	0.04			1.15228	-0.07			1.15554	-0.06			1.15849	-0.11				
STDV	0.00029	0.02			0.00037	0.03			0.00034	0.03			0.00036	0.02				
DDW	1.15424				1.15424				1.15422				1.15421					



**TABLA 6.7:** Igual que la Tabla 6.4 para la onda de marea  $K_1$ .

Observado	K <sub>1</sub>															
	V-ABS				P-IAG				ALG				MEL			
	A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α	
Modelo+IBER01	49.084	1.13680	0.391		48.785	1.13119	0.454		47.566	1.13462	0.472		47.032	1.14202	0.350	
	±0.042	±0.00098	±0.051		±0.027	±0.00062	±0.033		±0.027	±0.00064	±0.027		±0.069	±0.00166	±0.095	
	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ
GOT00.2	1.13737	-0.10	0.42	93.52	1.13153	-0.02	0.40	92.31	1.13744	-0.01	0.42	106.62	1.14066	-0.08	0.36	80.64
CSR4.0	1.13791	-0.10	0.42	96.72	1.13205	-0.00	0.39	95.70	1.13793	-0.01	0.42	109.55	1.14119	-0.08	0.34	84.00
TPX07.1	1.13743	-0.10	0.42	93.86	1.13157	-0.00	0.39	92.65	1.13741	-0.00	0.41	106.82	1.14064	-0.07	0.35	80.53
FES2004	1.13729	-0.05	0.38	93.33	1.13145	0.03	0.36	92.00	1.13738	0.04	0.38	107.95	1.14059	-0.03	0.32	79.40
GOT4.7	1.13708	-0.09	0.41	91.84	1.13124	-0.00	0.39	90.55	1.13716	-0.00	0.41	105.29	1.14039	-0.07	0.35	78.58
AG2006	1.13756	-0.09	0.41	94.77	1.13175	-0.00	0.39	93.75	1.13754	0.00	0.41	107.62	1.14088	-0.07	0.34	81.79
MEDIA	1.13744	-0.09			1.13160	0.00			1.13748	0.00			1.14073	-0.07		
STDV	0.00028	0.02			0.00028	0.02			0.00025	0.02			0.00028	0.02		
DDW	1.13490				1.13491				1.13506				1.13512			

**TABLA 6.8:** Vector residual de marea ( $B$ ,  $\beta$ ) observado, considerando el modelo DDW, en las estaciones MEL, ALG, V-ABS y P-IAG para los principales constituyentes de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ . Se indica el error correspondiente obtenido a partir de las expresiones [6.11]. Amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases, respecto al potencial local, en grados.

ESTACIÓN	$M_2$		$S_2$		$O_1$		$K_1$	
	B	$\beta$	B	$\beta$	B	$\beta$	B	$\beta$
MEL	3.37 $\pm$ 0.08	109.31 $\pm$ 0.04	1.14 $\pm$ 0.09	90.51 $\pm$ 0.17	0.14 $\pm$ 0.11	-78.66 $\pm$ 0.13	0.40 $\pm$ 0.11	45.41 $\pm$ 0.09
ALG	4.82 $\pm$ 0.07	117.68 $\pm$ 0.04	1.55 $\pm$ 0.05	95.85 $\pm$ 0.08	0.28 $\pm$ 0.05	-115.44 $\pm$ 0.04	0.39 $\pm$ 0.06	92.91 $\pm$ 0.03
V-ABS	4.46 $\pm$ 0.07	100.88 $\pm$ 0.04	1.35 $\pm$ 0.05	72.95 $\pm$ 0.09	0.27 $\pm$ 0.07	-151.63 $\pm$ 0.07	0.34 $\pm$ 0.08	76.42 $\pm$ 0.05
P-IAG	4.18 $\pm$ 0.07	101.76 $\pm$ 0.03	1.26 $\pm$ 0.05	73.56 $\pm$ 0.09	0.30 $\pm$ 0.05	-143.78 $\pm$ 0.04	0.41 $\pm$ 0.06	112.73 $\pm$ 0.03

### 6.6.2.3. Comparación de la Marea Gravimétrica de Carga Observada con la Calculada

Los resultados obtenidos en el cálculo de la carga oceánica de marea permiten corregir los factores gravimétricos observados y determinar las diferencias existentes con el factor teórico, calculado a partir del modelo anelástico DDW (Dehant et al., 1999). En las Tablas 6.4 a 6.7 se listan los factores gravimétricos observados y las diferencias de fase corregidos del efecto de carga oceánica, que se ha calculado usando 6 modelos globales suplementados con IBER01 y con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de las estaciones MEL y ALG, para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ .

Las Fig. 6.29 y 6.30 representan la carga oceánica calculada en las cuatro estaciones consideradas, junto con los valores de carga observados (determinados sustrayendo la marea teórica, calculada para el modelo DDW, casos elástico y anelástico, a la marea gravimétrica observada). Las barras de error alrededor de la carga observada representan la desviación estándar obtenida en el análisis de marea, mientras que los círculos representan la incertidumbre en la calibración de los gravímetros y en la normalización (en torno al 0,2% en la estación MEL y al 0,1% en las tres restantes). La magnitud de las barras de error en la estación MEL es, aproximadamente, el doble que en las restantes estaciones, debido al corto periodo de observación que se ha utilizado en dicha estación. Cabe destacar de estos resultados:

- El valor del EOI calculado y el observado para la onda de marea  $M_2$  en todas las estaciones concuerdan aceptablemente. En las estaciones V-ABS, P-IAG y ALG el valor de la componente coseno de los valores observados y calculadas coinciden dentro del margen de error de la observación. Para esta misma componente, en la estación MEL, se observa entre ambos una discrepancia que no supera los 0,1  $\mu\text{Gal}$  y, por tanto, están dentro del margen de error del cálculo del EOI. En cuanto a la componente seno, en las estaciones P-IAG y MEL el valor calculado concuerda con las observaciones dentro de su margen de error. En el caso de las estaciones V-ABS y ALG las discrepancias en el valor de la componente seno del EOI calculado y el observado son inferiores a 0,1  $\mu\text{Gal}$ . Para la onda de marea  $O_1$ , los valores observados y los calculados en ambas componentes presentan una buena concordancia en todas las estaciones. En el caso de las ondas  $S_2$  y  $K_1$ , se reflejan las mayores discordancias debido a que son ondas muy perturbadas por la presión atmosférica, las variaciones de temperatura del aire y, en todos los casos, no se dispone de una longitud adecuada en las observaciones para separar completamente estas ondas.
- En todos los casos, las barras de error no permiten casi distinguir entre los modelos teóricos DDW elástico y anelástico no hidrostático. A pesar de lo anterior, se aprecia que las diferencias entre los valores calculados y los observados son, generalmente, inferiores con respecto al modelo anelástico (exceptuando  $O_1$  en las estaciones más interiores, V-ABS y P-IAG).
- En general, para todas las estaciones y todas las ondas de marea, los valores del EOI calculado utilizando diferentes modelos globales suplementados con IBER01, no presentan diferencias significativas entre sí. Excepcionalmente, el modelo CSR4.0 presenta las mayores discrepancias,

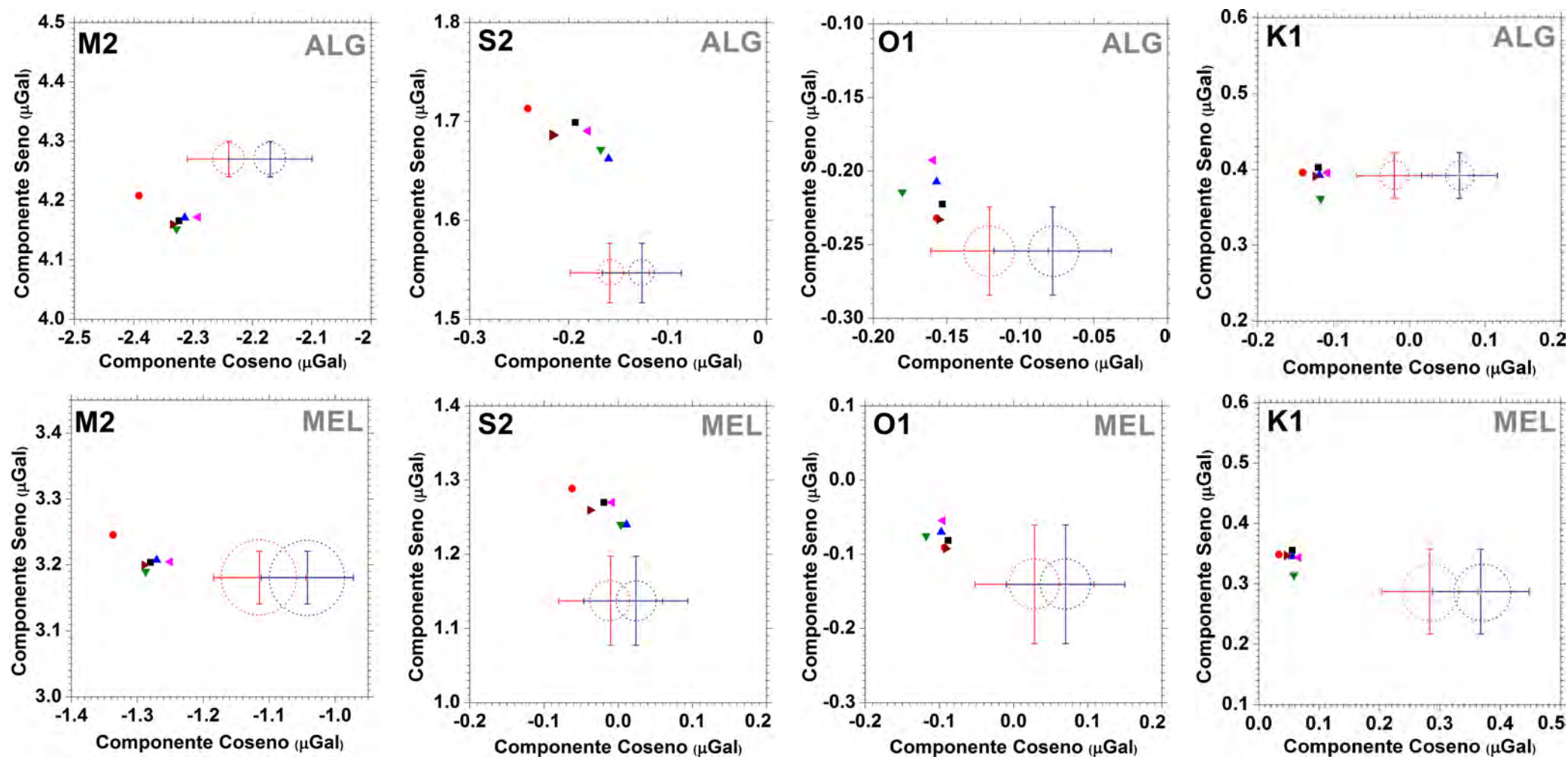
con respecto a los restantes modelos, para los armónicos en la banda de marea semi-diurna en las 4 estaciones consideradas.

En la Figura 6.31 se han representado los factores gravimétricos y los desfases corregidos del EOI, calculado utilizando 6 modelos globales con IBER01, para las ondas de marea principales  $M_2$  y  $O_1$  (los valores numéricos están listados en las Tablas 6.4 a 6.7). Asimismo, en la Figura 6.31 se ha representado, para su comparación, el modelo anelástico DDW. Destacan los siguientes resultados:

- Para las estaciones V-ABS y P-IAG, las discrepancias entre las desviaciones estándar del valor medio de los factores de amplitud corregidos para la onda  $M_2$  son de, aproximadamente, el 0,04%. En el caso de la onda  $O_1$  esta discrepancia es inferior al 0,03%. Para las estaciones ALG y MEL estas discrepancias no superan el 0,06% para  $M_2$  y el 0,04% para  $O_1$ . En el caso de las fases, la desviación estándar del valor medio para  $M_2$  es de  $\pm 0,01^\circ$  para la estación V-ABS y  $\pm 0,02^\circ$  para las tres restantes. En el caso de  $O_1$  esta desviación estándar es de  $\pm 0,03^\circ$  para todas las estaciones.
- Considerando el valor medio de los factores gravimétricos corregidos, las discrepancias que presentan respecto al modelo teórico son:  
Para  $M_2$ , -0,15% (V-ABS), 0,09% (P-IAG), -0,16% (ALG) y -0,29% (MEL).  
Para  $S_2$ , -0,24% (V-ABS), -0,10% (P-IAG), -0,14% (ALG) y -0,03% (MEL).  
Para  $O_1$ , 0,11% (V-ABS), 0,17% (P-IAG), -0,11% (ALG) y -0,37% (MEL).  
Para  $K_1$ , -0,22% (V-ABS), 0,29% (P-IAG), -0,21% (ALG) y -0,49% (MEL).

Finalmente, en las Fig. 6.32 y 6.33 está representado el vector residuo final, obtenido en cada una de las estaciones para las ondas  $M_2$  y  $O_1$ :

- En general se observa una buena concordancia entre los 6 modelos oceánicos considerados, para ambas ondas, en todas las estaciones (exceptuando, como se había señalado anteriormente, el modelo CSR4.0 para la onda  $M_2$ ). El constituyente  $O_1$  presenta valores más pequeños en la componente en fase que los respectivos valores para la onda  $M_2$ , aunque la separación de la componente en cuadratura es ligeramente mayor para éste último en todas las estaciones.
- Asimismo, los valores para todos los modelos están por debajo de  $0,1 \mu\text{Gal}$  en las componentes seno y coseno en todas las estaciones (exceptuando la componente coseno en MEL). Es reseñable, además, que para la onda  $O_1$  la componente coseno es negativa en las estaciones V-ABS y P-IAG (en esta última también para  $M_2$ ), frente a todas las demás que es positiva.



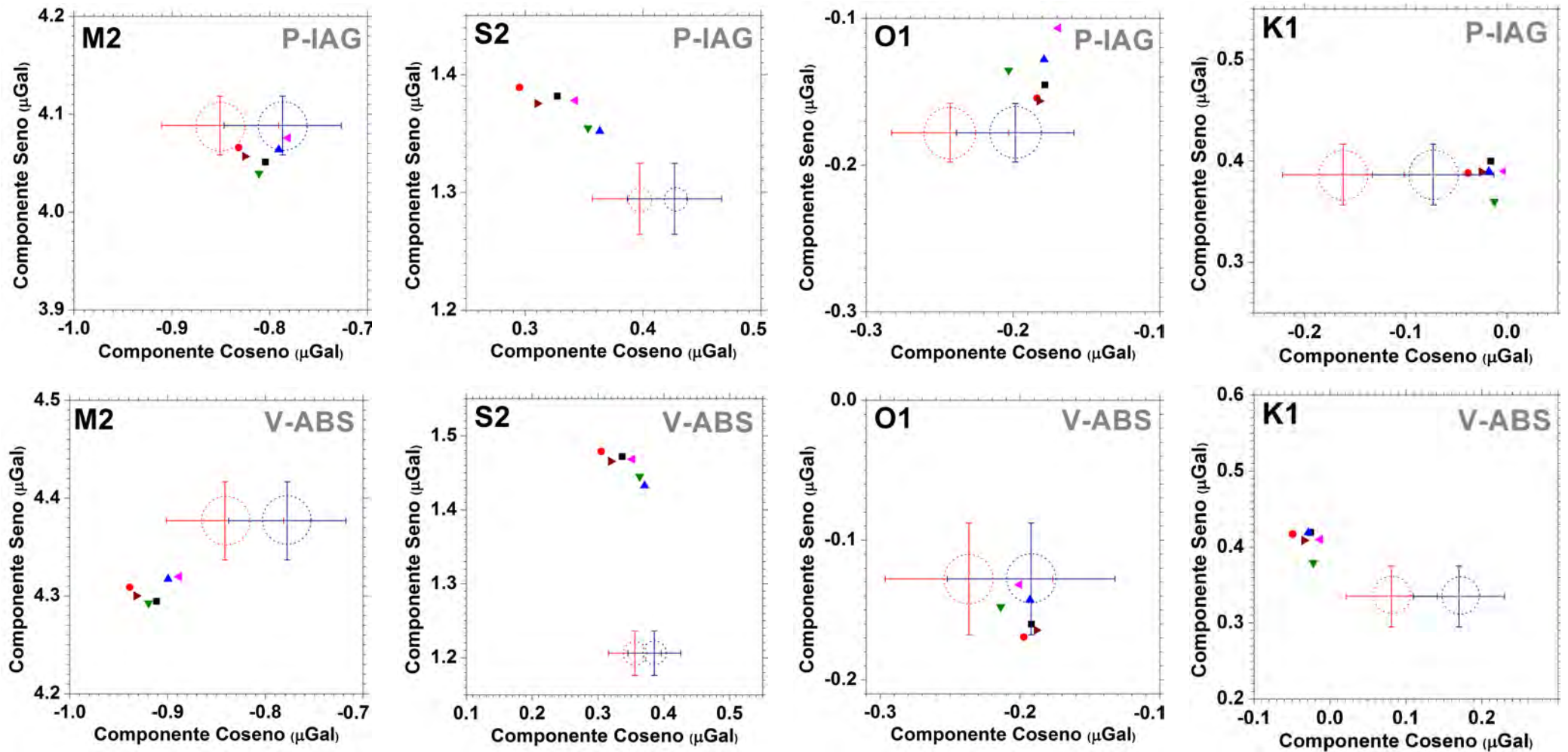
**FIGURA 6.29:** Diagramas de Argand representando el residual de la marea gravimétrica observada (casos elástico en azul y anelástico en rojo) y carga oceánica calculada, utilizando 6 modelos oceánicos globales suplementados con IBER01 (resultados en Tablas 6.4 a 6.7), para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  en las estaciones ALG y MEL. Las barras de error son las estimadas con el programa VAV en el análisis de marea. Los círculos representan la incertidumbre en la calibración del gravímetro.

IBER01 +

■ GOT00.2    ● CSR4.0    ▲ TPX07.1  
▼ FES2004    ▼ GOT4.7    ▼ AG2006

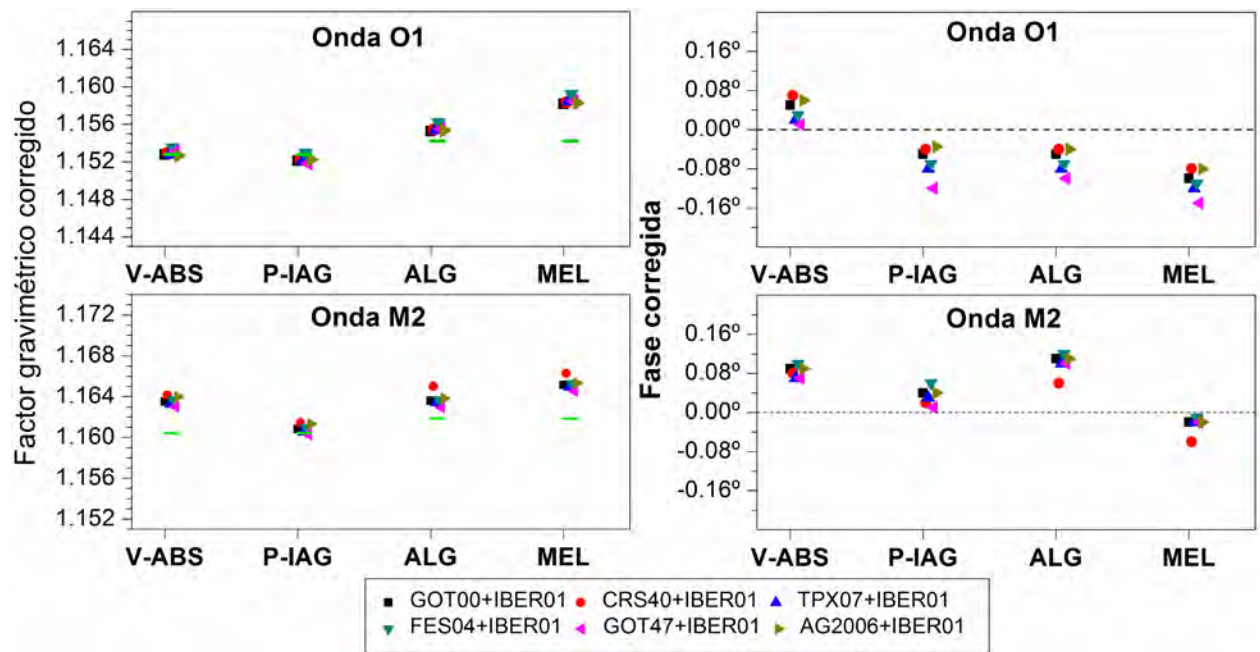
Observado

+ DDW Anelástico  
+ DDW Elástico

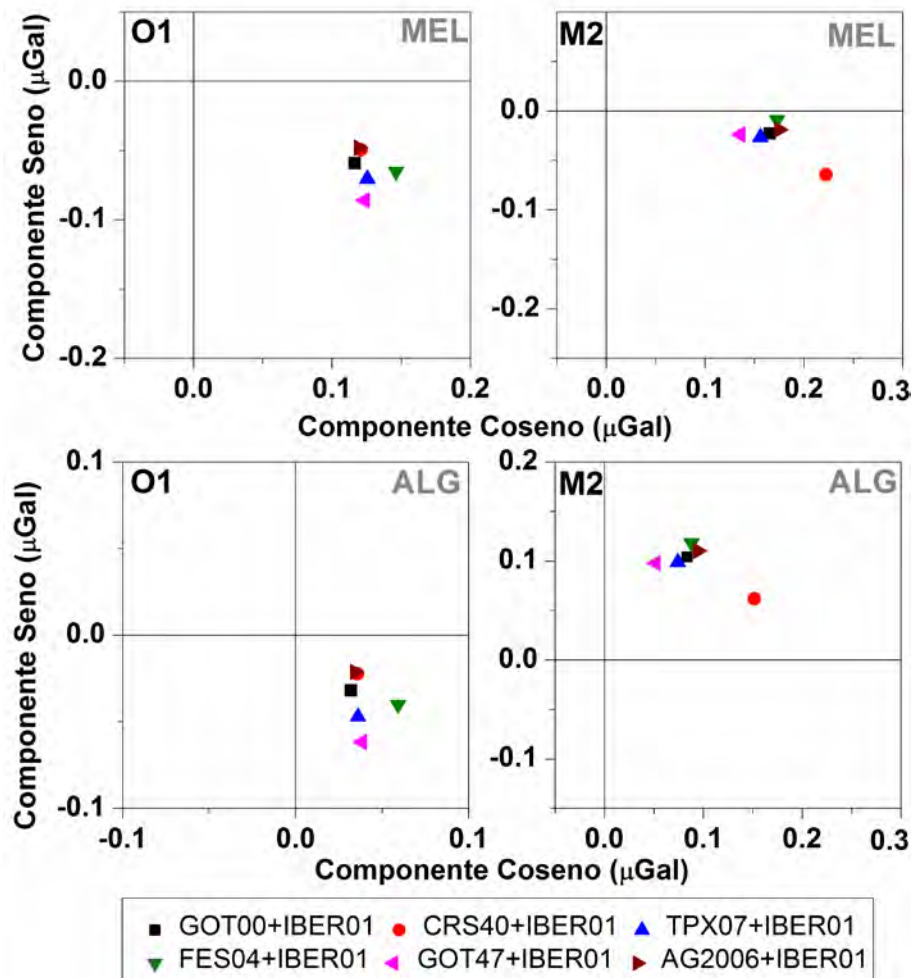


**FIGURA 6.30:** Diagramas de Argand del residual de la marea gravimétrica observada (casos elástico en azul y anelástico en rojo) y carga oceánica calculada, utilizando 6 modelos oceánicos globales suplementados con IBER01 (resultados en Tablas 6.4 a 6.7), para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  en las estaciones P-IAG y V-ABS. Las barras de error son las estimadas con el programa VAV en el análisis de marea. Los círculos representan la incertidumbre en la calibración del gravímetro.

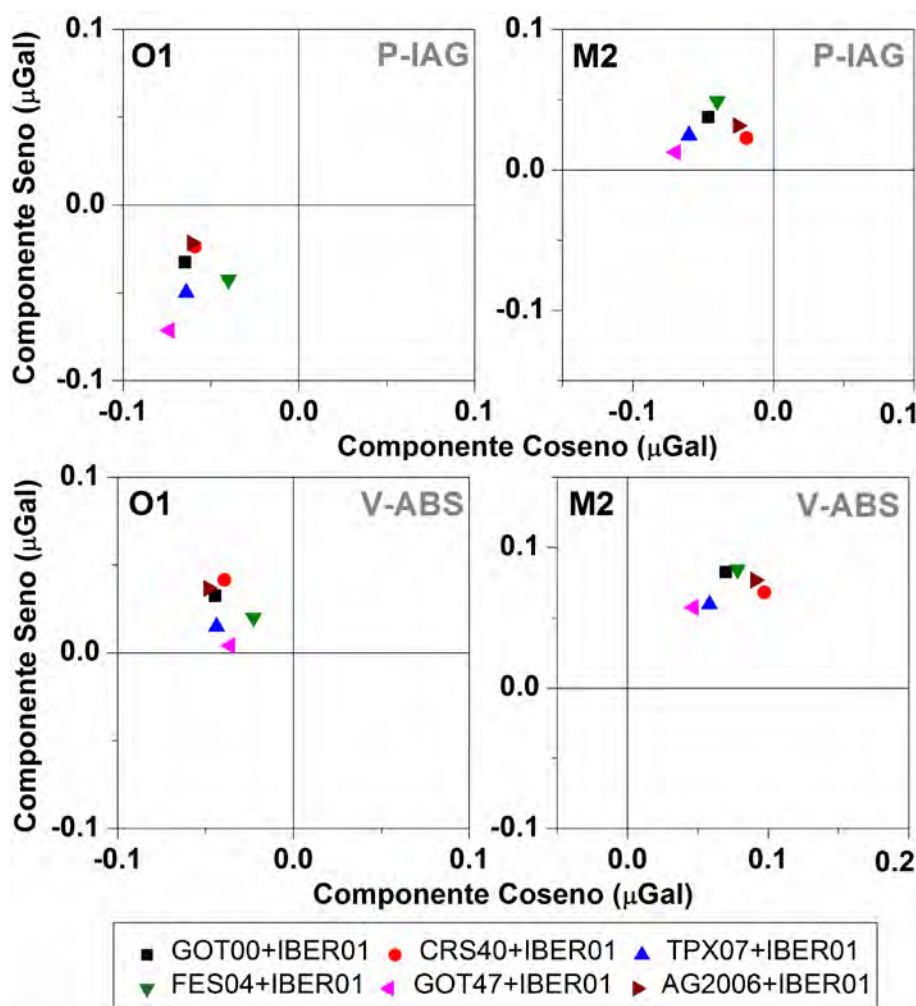




**FIGURA 6.31:** Factores gravimétricos (izda.) y desfases (dcha.) corregidos del EOI, utilizando 6 modelos globales suplementados con IBER01, para las ondas de marea  $O_1$  (arriba) y  $M_2$  (abajo) en las estaciones V-ABS, P-IAG, ALG y MEL. La línea verde representa el modelo anelástico DDW.



**FIGURA 6.32:** Diagrama de Argand del residuo final de la marea gravimétrica, obtenido a partir de 6 modelos globales suplementados con IBER01, para las ondas  $O_1$  (izda.) y  $M_2$  (dcha.) en las estaciones MEL (arriba) y ALG (abajo).



**FIGURA 6.33:**  
Diagrama de Argand del residuo final de la marea gravimétrica, obtenido a partir de 6 modelos globales suplementados con IBER01, para las ondas  $O_1$  (izda.) y  $M_2$  (dcha.) en las estaciones P-IAG (arriba) y V-ABS (abajo).

## 6.7 La Marea Gravimétrica de Carga Observada en el Archipiélago Canario y Comparación con la Calculada

### 6.7.1. Descripción General de la Marea Gravimétrica en Lanzarote, Tenerife y El Hierro

Para el constituyente armónico  $M_2$ , las amplitudes típicas de la marea terrestre gravimétrica observada en las islas de Lanzarote, Tenerife y El Hierro son del orden de  $58 \mu\text{Gal}$ , con fases que varían entre  $2^\circ$  y  $-1^\circ$ . Para la onda  $O_1$ , las amplitudes son de unos  $30 \mu\text{Gal}$  y las fases están en torno a  $-2^\circ$ . La magnitud del EOI en el Archipiélago Canario influye significativamente sobre las medidas de marea gravimétrica, hasta un 15% de la señal observada para el constituyente armónico dominante en la región  $M_2$ . De ahí la importancia de evaluar con exactitud este efecto.

### 6.7.2. Validación del Modelo Oceánico CIAM2

Para validar el modelo de marea oceánica CIAM2 se ha considerado el efecto de carga calculado en la Sección 6.4 y se ha comparado con los resultados del análisis de marea gravimétrica para los principales constituyentes de marea ( $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$  y  $K_1$ ) obtenidas en 3 estaciones localizadas en diferentes islas de archipiélago (Lanzarote, Tenerife y El Hierro). Además, se

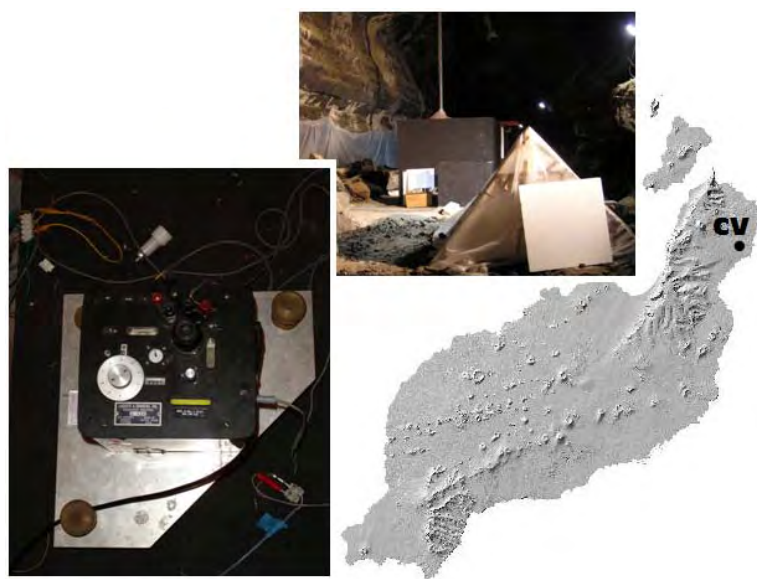
consideran los resultados del EOI calculados a partir de diversos modelos globales suplementados con CIAM2 para testear su adecuación a la zona de estudio.

#### 6.7.2.1. Las Observaciones de Marea Gravimétrica

Para este estudio se han considerado tres estaciones, donde se han realizado medidas de marea gravimétrica, situadas en diferentes islas del archipiélago, la estación CV en Lanzarote, TP en Tenerife y AU en El Hierro (Fig. 6.9).

##### La estación de la Cueva de los Verdes (CV), en Lanzarote

En la Isla de Lanzarote se vienen realizando desde el año 1987, de forma continua, observaciones de marea gravimétrica en diversos emplazamientos y con diferente instrumentación. Uno de ellos se sitúa en la parte noreste de la isla, en la *Cueva de los Verdes*, donde el Instituto de Astronomía y Geodesia de Madrid (CSIC-UCM) tiene instalado uno de los módulos del Laboratorio Geodinámico de Lanzarote (Vieira et al., 1991). Esta estación, denotada por CV, se encuentra en el interior de un túnel de lava del Volcán de La Corona, a una distancia de 1,3 km de la costa y una altitud de 37 m sobre el nivel del mar (Fig. 6.34).



**FIGURA 6.34:** Fotografías de la estación Cueva de los Verdes (CV) en la isla de Lanzarote. A la izquierda, imagen del gravímetro LCR-G434 instalado en el pilar sobre el que se realizaron las medidas continuas de gravedad.

(Fotografías: J. Arnoso)

Las medidas de marea gravimétricas realizadas en CV consideradas para este estudio, se llevaron a cabo con el gravímetro LaCoste&Romberg modelo G, número 434 (LCR-G434), equipado con un sistema electrónico de retroalimentación (Van Ruymbeke, 1985), perteneciente al IAG. De forma simultánea a las observaciones gravimétricas, se dispuso de registros de la variación de la presión atmosférica.

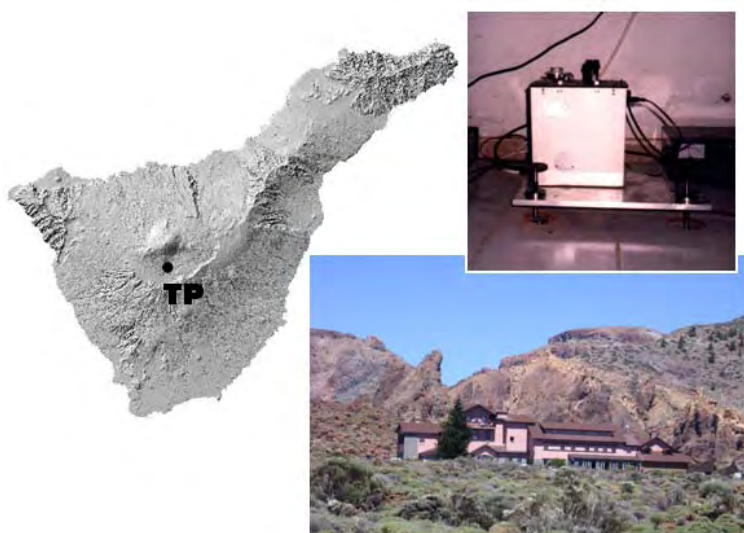
El proceso de normalización para el LCR-G434 se realizó con una exactitud del 0,03% en la escala y 0,2° para el retardo de fases. En este caso, la determinación de estos factores se realizó con respecto a otros gravímetros LCR que estuvieron operativos conjuntamente al LCR-G434 en Lanzarote, que habían sido referenciados a los valores estándar de Bruselas para mareas terrestres (Arnoso et al., 2001). Arnoso et al. (2001, 2006) utilizaron valores de la escala de calibración diferentes (un 0,4% mayores), debido a que no se habían corregido tras la modificación que sufrió dicha base de



Bruselas (Melchior, 1994). Asimismo, el feedback del gravímetro LCR-G434 ha sido calibrado periódicamente (según se describió en Secciones precedentes), con el fin de comprobar la estabilidad del factor de calibración y verificar la funcionalidad del sistema de retroalimentación a lo largo del tiempo. El valor final de calibración (que incluye la del sistema de retroalimentación más la normalización) para este gravímetro es estable al nivel del 0,5%, que es del orden de la que presentan estos gravímetros de muelle con el sistema MVR de feedback (Riccardi et al., 2002).

### **La estación de marea gravimétrica Teide-Parador (TP), en Tenerife**

La estación de marea gravimétrica emplazada en la Isla de Tenerife, denotada por **TP**, se localiza en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide. Concretamente, la estación se ubicó en una habitación aislada del edificio principal del Parador Nacional Las Cañadas del Teide (Arnoso et al., 2000), a una altitud de 2.150 metros sobre el nivel del mar y a una distancia de 18 km de la costa más próxima (Fig. 6.35).



**FIGURA 6.35:** *Fotografías de la estación Teide-Parador (TP) en la isla de Tenerife. Arriba (dcha.) imagen lateral del gravímetro LCR-G665 estacionado sobre la plataforma. (Fotografías: J. Arnoso)*

El gravímetro instalado en estación es el LaCoste&Romberg modelo G, número 665 (en adelante se denotará por LCR-G665) con sistema electrónico de feedback MVR (Van Ruymbecke, 1995), perteneciente al IAG. De forma simultánea a las observaciones de gravedad se registraron la temperatura del aire y las variaciones de la presión atmosférica. Todo el equipamiento se conectó a un sistema de registro digital de tipo *Microdas* (Van Ruymbeke et al., 1995) que permite almacenar los datos con un periodo de un minuto. El proceso de normalización para el LCR-G665 (que se realizó a partir de las observaciones llevadas a cabo con este mismo instrumento en la V-ABS y P-IAG, de forma similar a cómo se describió en la Secc. 6.6.2.1) se realizó con una escala de exactitud del 0,04%. Nuevamente, en trabajos previos, los valores de calibración para la escala difieren de los utilizados aquí debido a que, como ya se indicó, los autores utilizan los valores de la normalización que estaban vinculados con los valores incorrectos (superiores al 0,4%) del estándar de Bruselas (Melchior, 1994). El feedback del gravímetro LCR-G665 ha sido calibrado periódicamente mediante el tornillo micrométrico (según se describió en Secciones precedentes), con el fin de comprobar la estabilidad del factor de calibración y verificar la funcionalidad del sistema de retroalimentación a lo largo del tiempo.

En este caso, la discrepancia obtenida es del 0,4% que, al igual que en otros casos, está dentro del margen de error de este tipo de gravímetros.

### La estación de marea gravimétrica Aula de la Naturaleza (AU), en El Hierro

En la Isla de El Hierro, la estación de marea gravimétrica se ubica aproximadamente en el centro geográfico de la isla, en el edificio Aula de la Naturaleza (AU) (Fig. 6.36).

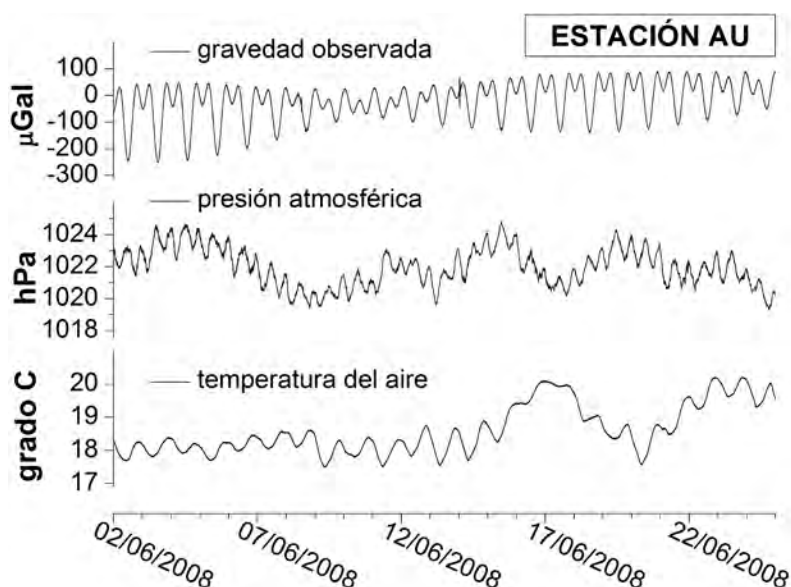


**FIGURA 6.36:** Fotografías de la estación Aula de la Naturaleza (AU) en la isla de El Hierro y de la caseta de protección en cuyo interior se ubica el pilar en el que se realizaron las medidas continuas con el gravímetro LCR-GRAVITON-EG1194 (abril de 2008). Abajo (dcha.) fotografía de la sonda de temperatura y humedad del aire Vaisala y del sensor de presión atmosférica Druck. (Fotografías: J. Arnoso)

El gravímetro utilizado es el LaCoste&Romberg Graviton-EG1194 (LCR-GRAVITON-EG1194) dotado con sistema de retroalimentación (Secc. 6.6.2.1). El proceso de normalización para este gravímetro se describió en la Sección 6.6.2.1 (escala de exactitud del 0,03% en el factor de escala y 0,1° en el retardo de las fases). Junto con la marea gravimétrica, se registró simultáneamente en esta estación la temperatura y humedad del aire con la sonda VAISALA HMP45C y la presión atmosférica con una sonda DRUCK. En la Fig. 6.37 se presentan, como ejemplo, las series de datos registradas en las diversas estaciones para un periodo de tiempo de unos veinte días.

**TABLA 6.9:** Periodo de observación, número de días efectivos analizado y gravímetro utilizado en las estaciones CV, TP y AU.

Estación	Gravímetro	Periodo		Nº Días
		Desde	Hasta	
CV	LCR-G434	1990/01/01	1997/09/30	2416
TP	LCR-G665	1998/12/23	1999/06/29	173
AU	LCR GRAVITON-EG1194	2008/04/03	2008/09/22	172



**FIGURA 6.37:** Datos observados (gravedad, presión atmosférica y temperatura del aire) en la estación AU, para un periodo de tiempo de 20 días.

#### 6.7.2.2. Las Series Temporales Observadas y el Análisis de Marea Gravimétrica

Para la estación CV-Lanzarote, los datos efectivos empleados para este estudio consisten en un total de 6,6 años de registro, estando el periodo de tiempo comprendido entre Mayo de 1987 hasta Marzo de 1997 (Tabla 6.9). El periodo de observación considerado para la estación TP-Tenerife es de seis meses (diciembre de 1998 a junio de 1999, Tabla 6.9). Durante este periodo se produjeron cuatro cortes en el suministro eléctrico que alimentaba el gravímetro, ocasionando la pérdida de algunos datos (de 12 días, la de duración más larga). Finalmente, el periodo de registro en la estación AU-El Hierro es de 6 meses (abril a septiembre de 2008, Tabla 6.9).

El procedimiento de análisis sigue la misma estructura que la descrita en la Sección 6.6.2.2 de pre-procesado, corrección del efecto de la presión atmosférica y el propio análisis de marea. Este último se ha llevado a cabo con el programa VAV y el potencial de marea considerado es el de Tamura (1987). El cálculo de los residuales observados, para determinar la respuesta de la Tierra sólida, se ha realizado considerando el modelo DDW, casos elástico y anelástico (Dehant et al., 1999). Realizando el análisis con el programa ETERNA (Wenzel, 1995) se obtienen diferencias con respecto al obtenido con VAV inferiores al 0,1%.

#### Resultados del Análisis

El resultado del análisis armónico de marea terrestre, para las principales ondas de marea diurnas y semi-diurnas, en las diferentes estaciones de marea gravimétrica de las Islas Canarias se presenta en las Tablas 6.10 a 6.13. En la Tabla 6.14 se listan los valores del vector residual de marea calculado a partir del modelo DDW, caso anelástico no hidrostático, para estas mismas ondas. Como se puede apreciar, la magnitud de la carga oceánica es del orden de un 15%, 16% y un 18% de la amplitud de marea observada para la onda  $M_2$  en las estaciones CV, TP y AU, respectivamente. Esta contribución se reduce al 12%, 14% y 15% para la onda  $S_2$  en las correspondientes estaciones. Para las ondas  $O_1$  y  $K_1$  la magnitud del EOI es del orden del 2-3% de la amplitud de la marea observada en las tres estaciones.

**TABLA 6.10:** Amplitudes observadas ( $A$ ), factores gravimétricos ( $\delta$ ) y desfases ( $\alpha$ ) para la onda  $M_2$ , en las estaciones CV, TP y AU. El potencial de marea utilizado es Tamura (1987). Amplitudes ( $L$ ) y fases ( $\lambda$ ) de la marea gravimétrica de carga, calculada utilizando seis modelos oceánicos globales suplementados con CIAM2 (y con refinamiento de la cuadrícula oceánica en torno a las estaciones).  $\delta^C$  y  $\alpha^C$  son los factores de amplitud observados y desfases después de la corrección por el efecto de la carga oceánica. En cada estación se indica el valor medio de los factores gravimétricos corregidos y las desviaciones estándar. Se proporciona el modelo de Tierra anelástico DDW, para comparación. Las amplitudes están en  $\mu\text{Gal}$  y las fases en grados (locales).

$M_2$												
Observado	CV				TP				AU			
	A	$\delta$	$\alpha$		A	$\delta$	$\alpha$		A	$\delta$	$\alpha$	
	58.05	1.0143	2.230		58.09	0.9965	0.148		58.10	0.9884	-1.197	
	$\pm 0.01$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.024$		$\pm 0.03$	$\pm 0.0006$	$\pm 0.035$		$\pm 0.02$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.024$	
Modelo+IBER01	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$
GOT00.2	1.15778	-0.10	8.59	163.96	1.15551	0.03	9.27	179.27	1.16304	0.14	10.37	-172.36
CSR4.0	1.16251	-0.16	8.87	163.99	1.15842	0.02	9.44	179.22	1.16544	0.14	10.51	-172.47
TPXO7.1	1.15797	-0.10	8.60	163.98	1.15534	0.03	9.26	179.29	1.16286	0.14	10.36	-172.35
FES2004	1.15827	-0.11	8.62	163.93	1.15567	0.01	9.28	179.16	1.16326	0.12	10.38	-172.50
GOT4.7	1.15702	-0.11	8.55	163.83	1.15464	0.01	9.22	179.15	1.16240	0.12	10.33	-172.46
AG2006	1.15786	-0.09	8.59	164.07	1.15534	0.04	9.26	179.35	1.16302	0.15	10.37	-172.31
<b>MEDIA</b>	1.15857	-0.11			1.15582	0.02			1.16334	0.13		
<b>STDV</b>	0.00198	0.03			0.00132	0.01			0.00107	0.01		
<b>DDW</b>	1.16178				1.16177				1.16177			

**TABLA 6.11:** Igual que la Tabla 6.10 para la onda de marea  $S_2$ .

S <sub>2</sub>												
Observado	CV				TP				AU			
	A	δ	α		A	δ	α		A	δ	α	
	28.42±0.01	1.0672±0.0005	4.018±0.028		28.01±0.04	1.0326±0.0013	3.069±0.073		27.81±0.02	1.0159±0.0009	2.373±0.049	
Modelo+IBER01	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ
GOT00.2	1.16535	-0.21	3.41	141.90	1.16114	0.11	3.81	157.77	1.16426	0.24	4.21	165.99
CSR4.0	1.17077	-0.22	3.53	143.23	1.16542	0.19	3.90	159.08	1.16825	0.36	4.30	167.23
TPX07.1	1.16380	-0.13	3.35	142.07	1.15947	0.19	3.75	158.18	1.16245	0.33	4.15	166.49
FES2004	1.16328	-0.10	3.33	142.12	1.15877	0.21	3.73	158.17	1.16174	0.34	4.13	166.49
GOT4.7	1.16514	-0.19	3.40	141.96	1.16121	0.12	3.81	157.85	1.16467	0.25	4.22	166.08
AG2006	1.16751	-0.10	3.42	143.27	1.16307	0.25	3.83	159.14	1.16617	0.40	4.24	167.32
MEDIA	1.16598	-0.16			1.16151	0.18			1.16459	0.32		
STDV	0.00277	0.06			0.00243	0.05			0.00933	0.06		
DDW	1.16178				1.16177				1.16177			

**TABLA 6.12:** Igual que la Tabla 6.10 para la onda de marea  $O_1$ .

O <sub>1</sub>												
Observado	CV				TP				AU			
	A	δ		α	A	δ		α	A	δ		α
	30.44±0.02	1.1526±0.0007	-1.567±0.035		29.90±0.04	1.1561±0.0017	-1.699±0.083		29.57±0.03	1.1570±0.0012	-1.910±0.059	
Modelo+IBER01	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ	δ <sup>C</sup>	α <sup>C</sup>	L	λ
GOT00.2	1.15440	-0.25	0.70	-94.80	1.15437	-0.11	0.83	-87.82	1.15240	-0.04	0.97	-84.02
CSR4.0	1.15459	-0.20	0.73	-95.00	1.15437	-0.09	0.84	-87.84	1.15236	-0.02	0.98	-84.02
TPX07.1	1.15461	-0.27	0.69	-95.34	1.15470	-0.13	0.82	-88.38	1.15282	-0.08	0.95	-84.54
FES2004	1.15578	-0.28	0.69	-97.92	1.15592	-0.13	0.82	-90.59	1.15410	-0.07	0.95	-86.52
GOT4.7	1.15481	-0.29	0.68	-95.86	1.15485	-0.17	0.80	-88.61	1.15292	-0.10	0.94	-84.63
AG2006	1.15413	-0.23	0.71	-94.16	1.15414	-0.11	0.83	-87.40	1.15226	-0.04	0.97	-83.80
MEDIA	1.15472	-0.26			1.15473	-0.12			1.15281	-0.06		
STDV	0.00057	0.04			0.00064	0.03			0.00069	0.03		
DDW	1.15417				1.15417				1.15417			

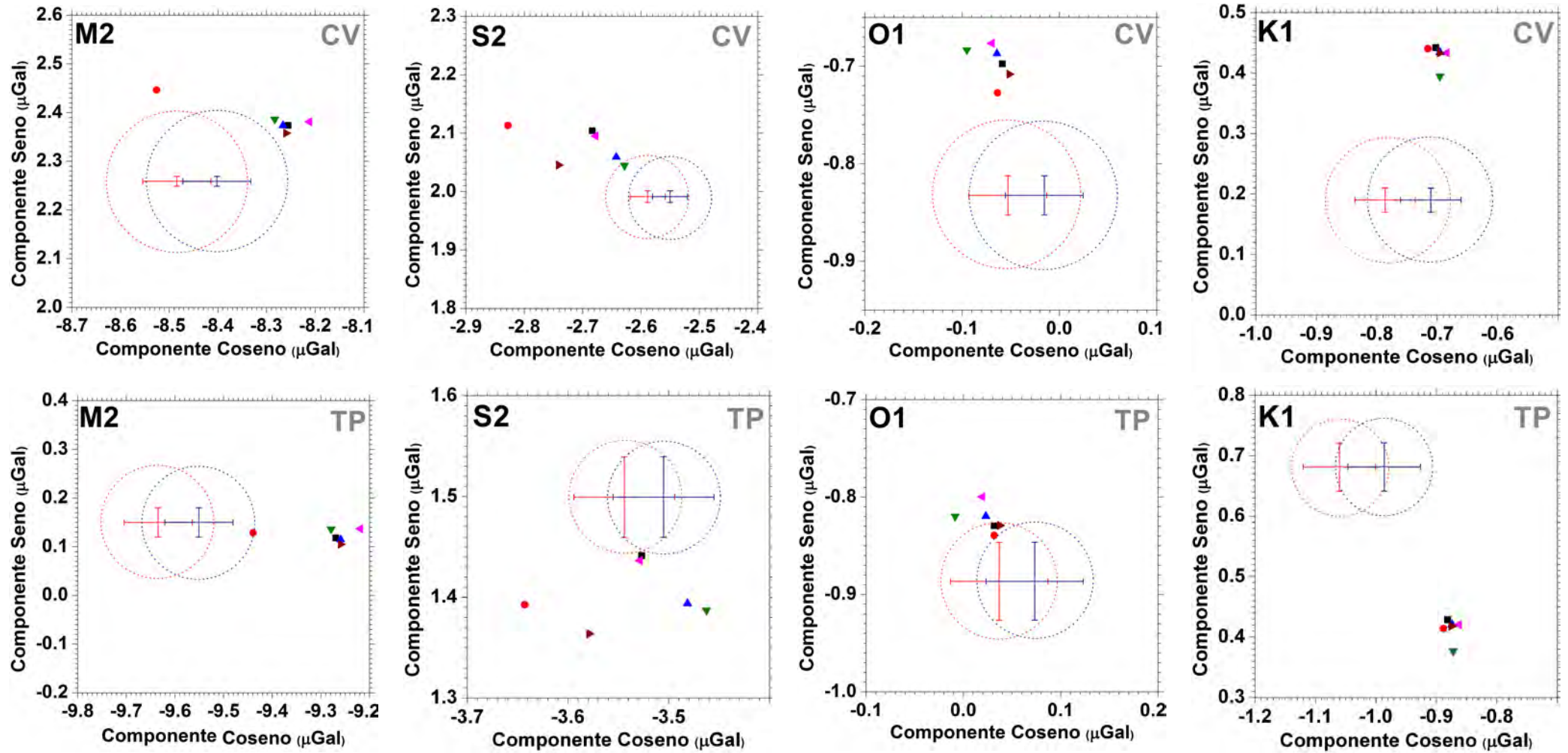
**TABLA 6.13:** Igual que la Tabla 6.10 para la onda de marea  $K_1$ .

Observado	$K_1$											
	CV				TP				AU			
	A	$\delta$	$\alpha$		A	$\delta$	$\alpha$		A	$\delta$	$\alpha$	
	41.38±0.02	1.1142±0.0005	0.263±0.024		40.25±0.04	1.1064±0.0011	0.970±0.054		40.16±0.03	1.1173±0.0008	1.342±0.037	
Modelo+IBER01	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$	$\delta^C$	$\alpha^C$	L	$\lambda$
GOT00.2	1.13312	-0.34	0.83	147.82	1.13049	0.35	0.98	154.07	1.14612	0.74	1.12	158.68
CSR4.0	1.13347	-0.34	0.84	148.38	1.13068	0.37	0.98	155.00	1.14621	0.75	1.12	159.16
TPX07.1	1.13294	-0.33	0.82	148.02	1.13029	0.36	0.97	154.30	1.14589	0.75	1.11	158.81
FES2004	1.13294	-0.28	0.80	150.43	1.13025	0.43	0.95	156.64	1.14579	0.82	1.09	161.06
GOT4.7	1.13263	-0.33	0.81	147.63	1.12999	0.36	0.96	154.02	1.14560	0.75	1.10	158.68
AG2006	1.13295	-0.33	0.82	148.10	1.13033	0.37	0.97	154.47	1.14569	0.76	1.10	159.10
<b>MEDIA</b>	1.13301	-0.33			1.13034	0.37			1.14588	0.76		
<b>STDV</b>	0.00028	0.02			0.00023	0.03			0.00024	0.03		
<b>DDW</b>	1.13536				1.13539				1.13540			

**TABLA 6.14:** Vector residual de marea ( $B$ ,  $\beta$ ) observado, considerando el modelo DDW, en las estaciones CV, TP y AU para los principales constituyentes de marea  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ . Se indica el error correspondiente obtenido a partir de las expresiones [6.11]. Amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases, respecto al potencial local, en grados.

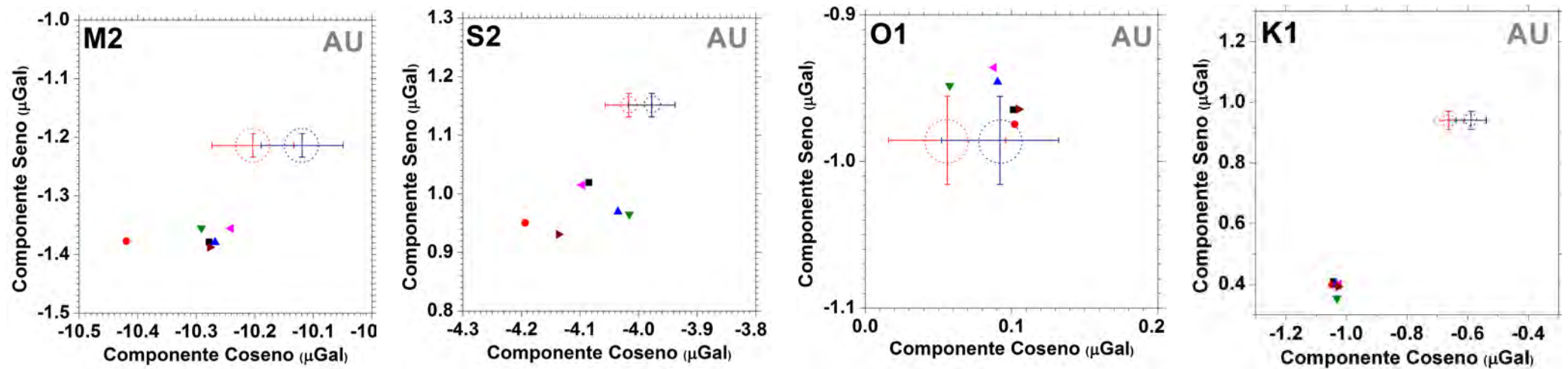
ESTACIÓN	$M_2$		$S_2$		$O_1$		$K_1$	
	B	$\beta$	B	$\beta$	B	$\beta$	B	$\beta$
CV	8.78±0.07	165.09±0.02	3.27±0.03	142.43±0.03	0.83±0.04	-93.64±0.04	0.81±0.05	166.42±0.05
TP	9.64±0.08	179.11±0.04	3.85±0.06	157.07±0.07	0.89±0.06	-87.62±0.08	1.26±0.07	147.28±0.05
AU	10.28±0.07	-173.22±0.02	4.18±0.04	164.01±0.05	0.99±0.05	-86.75±0.06	1.15±0.06	125.14±0.04



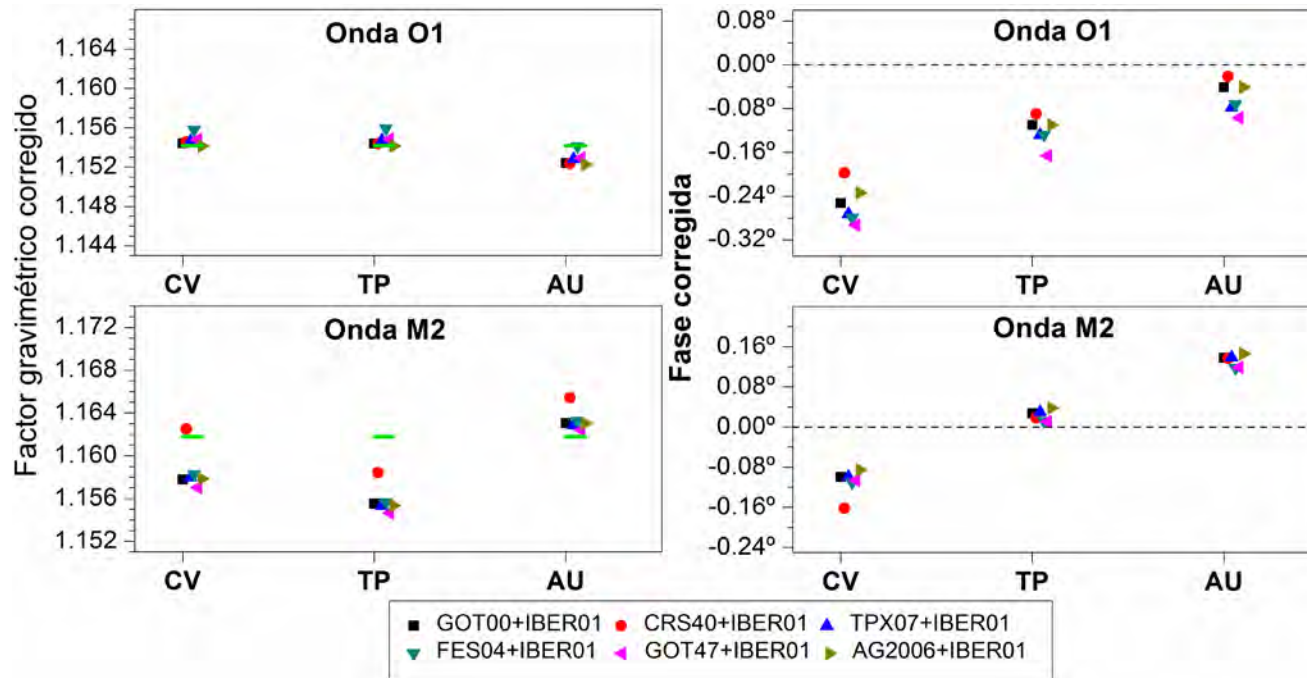


**FIGURA 6.38:** Diagrama de Argand del residual de la marea gravimétrica observado respecto al modelo DDW (casos elástico en azul y anelástico en rojo) y carga oceánica calculada, utilizando 6 modelos oceánicos suplementados con CIAM2 (resultados en Tablas 6.10 a 6.13), para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  en la estación CV, TP y AU. Las barras de error son las estimadas con el programa VAV en el análisis de marea. Los círculos representan la incertidumbre en la calibración del gravímetro utilizado en la observación.

IBER01 +		Observado	
■ GOT00.2	● CSR4.0	▲ TPX07.1	+
▼ FES2004	◀ GOT4.7	▶ AG2006	+
			+

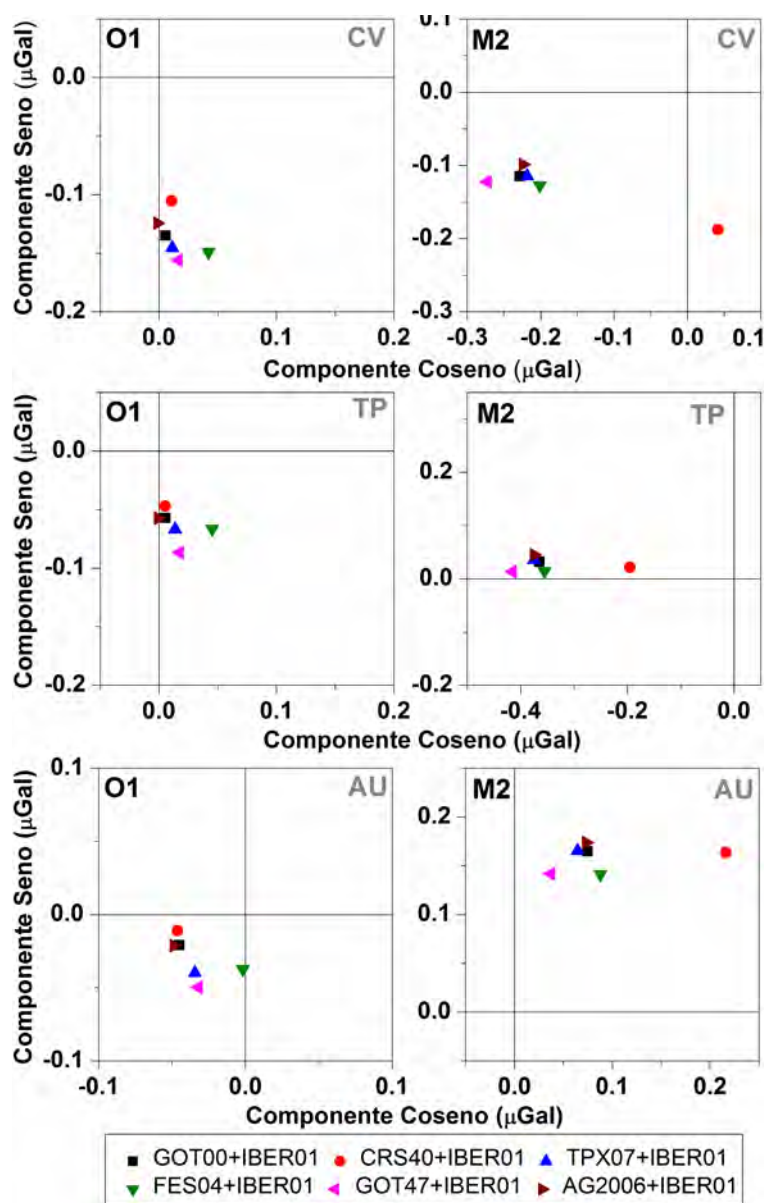


**FIGURA 6.38:** Continuación.



**FIGURA 6.39:** Factores gravimétricos (izda.) y fases (dcha.) corregidos del efecto de carga oceánica, utilizando seis modelos globales suplementados con CIAM2, para las ondas de marea  $O_1$  (arriba) y  $M_2$  (abajo) en las estaciones CV, TP y AU. La línea verde representa el modelo anelástico DDW.





**FIGURA 6.40:**

*Diagrama de Argand del residuo final de la marea gravimétrica, obtenido a partir de seis modelos oceánicos globales diferentes suplementados con CIAM2, para las ondas  $O_1$  (izda.) y  $M_2$  (dcha.) en las estaciones CV, TP y AU.*

### 6.7.2.3 Comparación de la Marea Gravimétrica de Carga Observada con la Calculada

En las Tablas 6.10 a 6.13 se listan los factores gravimétricos observados y los desfases corregidos del EOI, que han sido calculados usando 6 modelos globales suplementados con CIAM2 y con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de las estaciones, para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$ . Asimismo, la Fig. 6.38 representan la carga oceánica calculada en las estaciones CV, TP y AU, junto con los valores de carga observados. Las barras de error alrededor de la carga observada representan la desviación estándar del análisis de marea, mientras que los círculos representan la incertidumbre en la calibración de los gravímetros (en torno al 0,5% en CV, 0,4% en TP y 0,1% en AU). Destaca que:

- Para la onda  $M_2$  se observan algunas discrepancias. La dispersión de la componente coseno de la carga calculada para esta onda es coherente, considerando el error de la calibración, con lo observado en las estaciones CV y AU, siendo en TP del orden de 0,2  $\mu\text{Gal}$ . Por otra parte, la componente seno muestra mayor dispersión en la estación AU, de magnitud 0,2  $\mu\text{Gal}$ . En ambos casos, estos valores son del orden o ligeramente inferiores a los errores en CIAM2. Teniendo en cuenta que el valor medio del error de CIAM2 es de unos 2 cm, que representa un

3% del valor medio de la amplitud en la región, y que su contribución al EOI total en TP es de 5,7  $\mu\text{Gal}$ , se tendría una incertidumbre de unos 0,2  $\mu\text{Gal}$ .

- Para la onda de marea  $O_1$ , los valores observados y los calculados en ambas componentes presentan una buena concordancia en las tres estaciones. En el caso de las ondas  $S_2$  y  $K_1$ , en las estaciones TP y AU se reflejan las mayores discordancias debido a que son ondas muy perturbadas por la presión atmosférica, las variaciones de temperatura del aire. Además, en estos dos casos, no se dispone de una longitud adecuada en las observaciones para poder separar completamente estas ondas.
- En todos los casos, las barras de error no permiten casi distinguir entre los modelos teóricos DDW elástico y anelástico no hidrostático. A pesar de lo anterior, se aprecia que las diferencias entre los valores calculados y los observados, para la onda  $M_2$ , son inferiores con respecto al modelo elástico en las estaciones CV y TP, e inferiores con respecto al anelástico en AU.
- En general, para todas las estaciones y todas las ondas de marea, los valores del EOI calculado utilizando diferentes modelos globales suplementados con CIAM2, no presentan diferencias significativas entre sí, excepto para CSR4.0.

En la Figura 6.39 se han representado los factores gravimétricos y los desfases corregidos del EOI, calculado utilizando 6 modelos globales con CIAM2, para las ondas de marea principales  $M_2$  y  $O_1$  (los valores numéricos están listados en las Tablas 6.10 a 6.13). Destacan los siguientes resultados:

- Las discrepancias entre las desviaciones estándar del valor medio de los factores de amplitud corregidos para la onda  $M_2$  son de, aproximadamente, el 0,20% en la estación CV, 0,13% en TP y 0,11% en AU. En el caso de la onda  $O_1$  esta discrepancia es inferior al 0,06% en las tres estaciones. En el caso de las fases, la discrepancia de la desviación estándar del valor medio para  $M_2$  es de  $\pm 0,03^\circ$  en la estación CV y  $\pm 0,01^\circ$  en TP y AU. Para la onda  $O_1$  es de  $\pm 0,04^\circ$  en CV y  $\pm 0,03^\circ$  en TP y AU.
- Considerando el valor medio de los factores gravimétricos corregidos las discrepancias con el modelo teórico son:  
 Para  $M_2$ , 0,28% (CV), 0,51% (TP) y -0,14% (AU).  
 Para  $S_2$ , -0,36% (CV), 0,02% (TP) y -0,24% (AU).  
 Para  $O_1$ , -0,05% (CV), -0,05% (TP) y 0,12% (AU).  
 Para  $K_1$ , 0,21% (CV), 0,45% (TP) y -0,92% (AU).

Finalmente, en la Fig. 6.40 está representado el vector residuo final obtenido en cada una de las estaciones para las ondas  $M_2$  y  $O_1$ . En general, se observa una buena concordancia entre los 6 modelos oceánicos considerados en todas las estaciones (exceptuando, como se había señalado anteriormente, el modelo CSR4.0 para  $M_2$ ). La componente coseno es, prácticamente, cero para  $O_1$  en todas las estaciones. Para  $M_2$ , dicha componente alcanza un mayor valor en la estación TP, de unos 0,4  $\mu\text{Gal}$ .

## 6.8 Conclusiones

En las Secciones 6.3 y 6.4 de este Capítulo se han presentado los mapas de carga de carga oceánica, para ocho constituyentes armónicos, en lo que respecta a las variaciones del módulo de la gravedad en la Península Ibérica y norte de África (Fig. 6.3 y 6.4) y el desplazamiento radial sobre la superficie terrestre (Fig. 6.8). En el caso de la región Canaria, para las islas Lanzarote, Tenerife y El Hierro, se exponen los mapas de las variaciones de gravedad (Fig. 6.13 a 6.15) y desplazamientos radial y tangencial NS y EO (Fig. 6.17 a 6.19). Los cálculos se han realizado con el software ECOM y con los modelos de carga oceánica IBER01 y CIAM2. En cada caso, se han analizado los resultados obtenidos, discutiendo la influencia sobre ellos de diferentes modelos oceánicos globales, de las funciones de Green, de la representación de las líneas de costa, etc. De ello se desprende que,

- El uso de IBER01, junto con el refinamiento de la cuadrícula oceánica, actualiza el cálculo del EOI en la Península Ibérica. De tal forma que, los resultados obtenidos mejoran sustancialmente los publicados anteriormente por otros autores, principalmente en puntos situados en las proximidades de la costa.
- La contribución de IBER01 al EOI es de un 70% para  $M_2$  y entre un 50-60% para  $O_1$ .
- No se observan diferencias reseñables respecto al uso de diferentes funciones de Green, estando las variaciones máximas por debajo de un 1% en amplitud y  $1^\circ$  en fase.
- En el caso de las islas Canarias, se pone de manifiesto la importancia de la exactitud en la delimitación de la línea de costa, que puede modificar sustancialmente (un 50% para  $M_2$  en El Hierro) el valor del EOI calculado.

En la Secc. 6.7 se han presentado los resultados del análisis de las observaciones realizadas en nuevas estaciones de marea terrestre gravimétrica, ALG, MEL y AU. Además, se han actualizado los resultados existentes en las estaciones V-ABS, P-IAG, CV y TP. A partir de ellos se han validado los modelos IBER01 y CIAM2, siendo las conclusiones más significativas las siguientes:

- No existen discordancias significativas en ninguna de las estaciones consideradas en la Península Ibérica, Melilla y Canarias, en todo caso son inferiores a  $0,1 \mu\text{Gal}$ . De forma excepcional, se aprecian todavía alguna discrepancia para la onda  $M_2$  en las estaciones Canarias, aunque teniendo en cuenta los errores en la calibración y en el propio modelo oceánico, los resultados son coherentes. Por otra parte, debe señalarse que los resultados para  $S_2$  y  $K_1$  reflejan la corta longitud de las series observadas y las perturbaciones debidas a las variaciones de presión y temperatura del aire.
- No existen discordancias importantes al comparar el EOI obtenido con diversos modelos oceánicos globales recientes, cuando se suplementan con los modelo regionales, excepto el modelo CSR4.0.
- No se alcanza precisión suficiente en la observación (considerando la resolución instrumental) para discernir entre el modelo terrestre DDW elástico o anelástico, a pesar de la gran precisión alcanzada en el cálculo de la carga.

# Conclusiones

El estudio del Efecto Oceánico Indirecto (EOI) y su evaluación exacta permiten corregir su contribución sobre las medidas geodésicas y geofísicas de precisión (como pueden ser la gravedad y los desplazamientos sobre la superficie terrestre). Con ello se consigue que dichas medidas puedan utilizarse para investigar otros fenómenos y procesos relacionados con la geodesia, la geofísica y la geodinámica. En esta memoria se ha desarrollado todo el procedimiento a seguir para determinar el EOI con gran exactitud, desde la consideración del propio método de cálculo, de los modelos y parámetros involucrados en el mismo y de su implementación numérica. Por el papel relevante que desempeñan en estos estudios los modelos de carga oceánica, se ha establecido una metodología para su diseño y construcción a escala regional, basada en la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico. Esto engloba el análisis de observaciones de marea oceánica, la construcción de un modelo teórico y la aplicación de un método de inversión para conjugar ambos tipos de información.

A lo largo de esta memoria se han realizado aplicaciones en dos zonas de estudio, en las que es de gran relevancia este tipo de investigaciones geodésicas: las regiones de la Península Ibérica y Canarias. Los resultados obtenidos se han investigado en dos vertientes fundamentales. Por un lado, la propia contrastación de los modelos de carga oceánica a través del análisis de los residuales y anomalías de la marea gravimétrica. Por otro lado, la marea terrestre permite introducir constreñimientos en la propia modelización oceánica, lo cual redundará en la mejora de los modelos desarrollados.

A continuación se destacan las conclusiones más relevantes y las aportaciones personales más significativas, que son consecuencia de estas investigaciones:

- 1) Se ha realizado un estudio en profundidad del formalismo empleado en el cálculo del EOI, analizando su adecuación al ámbito de aplicación en que se enmarca la investigación propuesta y las regiones objeto de estudio en esta memoria. Se han examinado los distintos errores que afectan al cálculo del EOI, con el fin de reducir el efecto de aquellos que son susceptibles de ser mejorados.
- 2) Se ha desarrollado un nuevo software para el cálculo práctico del EOI, denominado **ECOM**, basado en el método de Farrell (1972) de convolución de las funciones de Green de carga (gravedad y desplazamientos de la superficie terrestre) con una representación de la marea oceánica. Como principal novedad, ECOM incorpora la combinación de múltiples opciones de cálculo, que abarcan:
  - La elección de diversos algoritmos numéricos para el cálculo (p. ej., técnicas de interpolación).
  - El uso de funciones de Green reales o complejas. Éstas últimas permiten introducir el carácter anelástico y visco-elástico del modelo terrestre.

- La combinación de modelos de carga oceánica globales y regionales/locales de mayor resolución y, asimismo, el refinamiento automático de la cuadrícula oceánica en torno al punto de cálculo. Dada la gran relevancia que tienen estos factores sobre el resultado, es una de las cualidades más destacables de este nuevo software.

Además de su versatilidad, ECOM se caracteriza por su accesibilidad, ya que presenta una interfaz visual y asistencia al usuario.

**3)** Se ha establecido una metodología eficaz para el desarrollo de modelos regionales/locales de carga oceánica, basada en la técnica de asimilación de datos en un modelo hidrodinámico.

- Para los datos involucrados, medidas mareográficas y de altimetría procedentes del satélite TOPEX/Poseidón (T/P), se han especificado las técnicas de análisis de las series temporales observados y las correcciones necesarias para la obtención de las constantes armónicas de marea.
- Se ha deducido y justificado teóricamente el sistema de ecuaciones de aguas someras (SWE), cuya solución es el modelo hidrodinámico, detallando las hipótesis, simplificaciones y parametrizaciones consideradas. Asimismo, se ha estudiado en detalle su idoneidad en función de la zona de aplicación. La formulación y procedimiento para la resolución de las SWE, por una parte, mediante la discretización de las ecuaciones no lineales en el espacio y el tiempo y, por otra parte, mediante su factorización directa en el dominio de la frecuencia, ha sido establecida con rigor.
- Se han dispuesto los principios fundamentales y justificaciones teóricas esenciales del esquema de asimilación de datos seguido, basado en el método de los representantes (Egbert y Erofeeva, 2002; Egbert et al, 1994), para la obtención del modelo final.

Respecto al objetivo de obtener una evaluación más precisa del Efecto Oceánico Indirecto en la Península Ibérica, norte de África y el Archipiélago Canario, cabe destacar:

**4)** La realización de un estudio exhaustivo de las medidas mareográficas y de altimetría T/P disponibles en las zonas de estudio. Las series de datos procedentes de mareógrafos se han analizado armónicamente con el programa VAV (Venedikov et al., 2001, 2002). Los datos T/P, con las correcciones aplicadas, se han recopilado de la base de datos del Altimeter Ocean Pathfinder Project (NASA/GSFC).

**5)** El diseño y construcción de dos nuevos modelos de carga oceánica para el entorno de la Península Ibérica y Canarias, **IBER01** y **CIAM2** respectivamente. Para ello:

- Se delimitó el dominio del modelo estudiando el área de mayor influencia del EOI y optimizando las condiciones impuestas sobre la frontera.
- Se seleccionó la metodología de construcción y de resolución del modelo hidrodinámico (lineal o no lineal) en función de las características de cada zona de estudio. Además, se seleccionaron las batimetrías, condiciones de frontera, valores para los coeficientes de

arrastre con el fondo oceánico y de viscosidad turbulenta basándose en estudios de adecuación a la zona y test de comparación.

Por vez primera en las dos áreas de estudio, los modelos de carga se han desarrollado con una resolución de **5'x5'**, para ocho armónicos de marea **Q<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>, K<sub>1</sub>, N<sub>2</sub>, M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub> y K<sub>2</sub>**. Fruto de estas investigaciones, se concluye que

- En el océano abierto, las diferencias de IBER01 con respecto a los modelos globales de marea son del orden de 1 cm. En aguas someras y de plataforma continental (donde las diferencias alcanzan 10-30 cm), se ha demostrado que IBER01 reproduce con mayor exactitud la variabilidad de la marea (amplitud y patrón de propagación) que los modelos globales y, casi en general, que los modelos locales. Se detectan zonas aisladas, principalmente en la región Mediterránea y el Estrecho de Gibraltar, donde la resolución del modelo debe incrementarse para investigar efectos singulares. Un estudio estadístico de los errores en IBER01 muestra que, para la onda M<sub>2</sub>, las desviaciones estándar obtenidas son inferiores a **1 cm** (excepcionalmente, representan un 2% de la amplitud de la marea en el Golfo de Vizcaya).
- El estudio estadístico de los errores en CIAM2 muestra, para M<sub>2</sub>, un valor medio en el dominio del modelo de las desviaciones estándar de **2 cm**. La comparación con observaciones mareográficas y con modelos locales pone de manifiesto la buena representación de la marea oceánica por parte de este modelo.

Con el programa ECOM y los nuevos modelos de carga oceánica IBER01 y CIAM2:

- 6) Se han construido de forma rigurosa **mapas de carga oceánica**, para la componente vertical de gravedad y para los desplazamientos sobre la superficie terrestre, en la Península Ibérica, el norte de África y las islas de Lanzarote, Tenerife y El Hierro, para 8 constituyentes de marea (Q<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>, K<sub>1</sub>, N<sub>2</sub>, M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub> y K<sub>2</sub>). Debe destacarse que se detectaron errores en la representación de contornos costeros de las islas Canarias proporcionados por la base de datos *World Vector Shoreline Data* (Wessel y Smith, 1996), utilizados habitualmente por otros programas de cálculo del EOI. Estos errores originan variaciones que alcanzan hasta el 50% en el cálculo de la carga para el constituyente armónico M<sub>2</sub> en El Hierro. Por esta razón, en las islas Canarias se ha utilizado una representación precisa de las líneas de costa obtenida a partir de modelos digitales del terreno y batimétricas de alta resolución.
- 7) Se han proporcionado los **valores del EOI** (gravedad y desplazamientos) en las estaciones de la Red Española de Marea Gravimétrica (Instituto de Astronomía y Geodesia, CSIC-UCM). Con estos valores se podrán obtener correcciones a medidas geodésicas y geofísicas de precisión (gravimetría, GPS, VLBI) al **nivel del 1-1,5%**. Como novedad de esta investigación, se presentan resultados de marea terrestre en nuevos emplazamientos, ALG, MEL y AU. Las observaciones realizadas en estas estaciones y los parámetros de marea obtenidos, con las

correcciones aplicadas, podrán utilizarse en otras investigaciones geodésicas de interés y, asimismo, pueden formar parte de la Red de Mareas del IAG.

- 8) Se ha realizado la validación de los modelos IBER01 y CIAM2 mediante la comparación entre los valores de carga oceánica calculados con el nuevo software ECOM y los valores observados en diversas estaciones gravimétricas: Tres estaciones en la Península, V-ABS y P-IAG en Madrid y ALG en Cádiz, una en Melilla, MEL, y tres estaciones en el Archipiélago Canario, CV (en Lanzarote), TP (en Tenerife) y AU (en El Hierro). Consecuencia de ello ha sido:
- La **revisión y mejora de los parámetros** de marea terrestre obtenidos en las estaciones de **P-IAG, V-ABS, CV y TP**, teniendo en cuenta, a su vez, la corrección de errores en la normalización de los gravímetros del IAG.
  - La verificación de los modelos terrestres **DDW**, para  $O_1$  y  $M_2$ , con una exactitud comprendida entre **0,1% - 0,5%**, dependiendo de la estación considerada en este estudio.
  - En general, los armónicos  $K_1$  y  $S_2$  presentan las discrepancias más destacables, dada la longitud de las series de datos utilizadas en los análisis.
- 9) De los modelos globales de marea oceánica utilizados en esta memoria se desprende que, cuando se suplementan con los modelos regionales IBER01 y CIAM2, ninguno de ellos presenta un mejor resultado que otro en las zonas de estudio, con excepción del modelo CSR4.0. Por el contrario, cuando únicamente se consideran para el cálculo del EOI modelos globales, las diferencias obtenidas son muy significativas (p. ej., hasta 1,1  $\mu\text{Gal}$  en la estación ALG para la onda  $M_2$ ).

## Trabajos Futuros

Las investigaciones llevadas a cabo en esta tesis permiten abrir, como aplicación directa, otras líneas de investigación. Por ejemplo, los nuevos modelos de carga oceánica y la evaluación más exacta del EOI en las nuevas estaciones de marea gravimétrica propician el inicio de otras investigaciones geodésicas dedicadas al estudio de la respuesta elástica de la corteza terrestre en la zona sur de la Península Ibérica y norte de África mediante observaciones de marea terrestre gravimétrica.

Asimismo, se pueden considerar las siguientes líneas futuras de investigación:

- Introducir nuevas opciones de cálculo en el software ECOM. Entre ellas, por ejemplo, el cálculo de las variaciones en inclinación y extensión originadas por el EOI.
- Mejora sucesiva de los modelos de carga oceánica, mediante la incorporación de nuevas observaciones o el incremento en la resolución. En la Península Ibérica deben realizarse estudios locales en regiones como el Estrecho de Gibraltar y el Mediterráneo. Su mejora debe integrarse en el contexto regional.

- En la validación de los modelos de carga oceánica con observaciones de marea terrestre, considerando el nivel de exactitud alcanzado en el cálculo del efecto de carga, debe mejorarse la calibración de los gravímetros (por ejemplo, mediante su intercomparación con superconductores y absolutos).
- La acumulación de medidas de marea terrestre en el tiempo permitirá, además, mejorar la precisión en la separación de los armónicos de marea, lo cual favorece el estudio de otros efectos perturbadores.
- Lo anterior, abriría la posibilidad de estudiar con más exactitud los modelos terrestres, a través del propio cálculo de la carga y de la respuesta elástica en zonas de interés geodinámico.
- Dada la precisión que se está consiguiendo hoy en día en el GPS se puede estudiar la carga oceánica, bien para mejorar su corrección e investigar la respuesta a los desplazamientos medidos, o bien, para validar y establecer la exactitud de los modelos de marea oceánica.
- Recientemente, se ha establecido, por parte del IGN, en España el primer gravímetro superconductor GWR. Además, en Tenerife está operativo un gravímetro LCR de tipo G-Phone, de un orden de magnitud más preciso que los clásicos modelos G. En ambos casos, las investigaciones llevadas a cabo en esta memoria pueden servir, por un lado, como corrección a las medidas realizadas por estos gravímetros y, por otro lado, para otros estudios de carga oceánica fundamentados en la alta precisión que se espera obtener con estos gravímetros.



# Conclusions

The study of the Ocean Tide Loading (OTL) and its exact evaluation allow correcting its contribution on geodetic and geophysical measurements (such as gravity and displacements over the Earth's surface). Thus, such measurements can be used to investigate other phenomena and process related to geodesy, geophysics and geodynamics. In this thesis, it has been developed the whole procedure to determine accurately the OTL, taken into account the computation methodology, its numerical implementation and the models and parameters involved. It has been also established the methodology to design and to develop ocean tide models at a regional scale, due to the outstanding role of this type of models in the OTL computations. The methodology used is based on the data assimilation technique, which requires ocean tide observations, a theoretical hydrodynamical model and the application of an inversion method to combine both kind of information.

Applications for the Iberian Peninsula and the Canary Archipelago, where the geodetic researches acquire great relevance, have been carried out. The results obtained have been investigated from two fundamental points of view: On the one hand, the validation of the ocean tide models through the analysis of the residuals and the anomalies of the gravimetric tide. On the other hand, the body tide allows introducing constraint in the ocean tide modeling, which benefit to the improvement of the developed ocean models.

Next, most relevant conclusions from these researches are outlined:

- 1) An exhaustive study of the methodology used in the OTL computation, analyzing its adequacy to the application research fields and the areas of study considered in this thesis. The errors affecting the OTL computations have been also examined to reduce their effect.
- 2) New software for computing the OTL effect has been developed, namely **ECOM**. It is based on the convolution between the ocean tide distribution and the Green's functions (displacements and gravity), according to Farrell's (1972) procedure. As main novelty, ECOM incorporates new calculation options, which comprise:
  - Diverse numeric algorithms for the computations (e.g., interpolation techniques).
  - Use of real and complex load Green's functions. The last ones allow introducing the inelastic or visco-elastic quality of the Earth model.
  - Combination of global ocean tidal loading models with higher resolution regional ones and a further automatic refinement of the oceanic grid around the computation point.

Besides of its versatility, another significant characteristic of ECOM is its accessibility, as it has a visual interface and guidance assistance to the users.

- 3) An effective methodology for ocean tide models development to a regional scale has been established. It is based on the data assimilation technique into a hydrodynamical model.

- The methods of analysis of the observed time series, from tide gauge and TOPEX/Poseidon (T/P) satellite altimetry measurements, have been specified. Also, the corrections applied to the observed data to obtain the tidal harmonic constants for the main diurnal and semi-diurnal constituents have been detailed.
- The Shallow Water Equations system (SWE), used to obtain the hydrodynamical model, have been deduced. All hypotheses, simplifications and parameterizations considered, taken into account their suitability for the study areas, have been explained. Also, the formulation and procedure to solve the SWE by means of, by one hand, the discretization of the non-linear equations in the space and time and, by the other hand, the direct factorization of the equations in the frequency domain, have been rigorously explained.
- The fundamental theoretical principles of the data assimilation technique, which follows the *representer method* (Egbert and Erofeeva, 2002; Egbert et al, 1994), have been studied.

With regard to the direct application of the above methodologies in order to get a more accurate evaluation of the OTL in the Iberian Peninsula, north of Africa and the Canary Archipelago, it must be pointed out the following:

- 4) The exhaustive study of the tide gauge observations and T/P satellite altimetry measurements available carried out in the area of study. The tide gauge observations were analyzed harmonically with the VAV program (Venedikov et al., 2001, 2002). T/P measurements, with all corrections applied, were obtained from Altimeter Ocean Pathfinder Project data base (NASA/GSFC) and analyzed with OSU Tidal Inversion Software (Egbert and Erofeeva, 2002).
- 5) The development of ocean tidal loading models for the Iberian Peninsula and Canary Islands regions, **IBER01** y **CIAM2** respectively. Where:
  - The model domain was delimited, first, taking into account the area of mayor influence of the OTL and, second, optimizing the conditions established over the boundaries through the observed data.
  - The methodology used to develop the hydrodynamical model was selected taking into account the characteristic of each study area. Also, bathymetry, boundary conditions, drag and turbulent horizontal viscosity coefficients were selected based on regional studies and comparison tests.

For the first time, the ocean tidal loading models developed for the two areas were carried out with a resolution of **5'×5'** and for eight harmonic constituents **Q<sub>1</sub>**, **O<sub>1</sub>**, **P<sub>1</sub>**, **K<sub>1</sub>**, **N<sub>2</sub>**, **M<sub>2</sub>**, **S<sub>2</sub>** and **K<sub>2</sub>**. Then, it can be concluded that:

- In the open ocean, the differences between IBER01 and global models are about 1 cm. In shallow waters and continental shelf areas (where differences reach 10-30 cm), it has been shown that IBER01 reproduces with more accuracy the variability of the ocean tides than global models and, almost in general, than the local ones. In spite of this fact, it was noted that in some isolated areas, as the Strait of Gibraltar, the resolution of the IBER01 must be

increased to deal with local effects. A statistical study of the errors in IBER01 shows that, for  $M_2$  wave, the standard deviations obtained are lower than **1 cm** (exceptionally, they represent the 2% of the tidal amplitude in the Gulf of Biscay).

- For  $M_2$ , the statistical study of the errors in CIAM2 shows a mean value of the standard deviation about **2 cm**. The comparisons with tide gauge observations and with local models reveal the satisfactory representation of the ocean tides from CIAM2.

With the ocean tidal loading models, IBER01 y CIAM2, and with the software ECOM:

- 6) **Maps of ocean tide loading** (for gravity and displacements) in the Iberian Peninsula, north of Africa and the islands of Lanzarote, Tenerife and El Hierro were developed, for eight harmonic constituents ( $Q_1$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $K_1$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $S_2$  y  $K_2$ ). It must be noted that errors in the coastline representation of the Canary Islands from the *World Vector Shoreline Data* (Wessel and Smith, 1996) were detected. These errors originate changes in the OTL computed. For example, these changes reach until the 50% in the tidal gravity loading computed in El Hierro for  $M_2$  wave. So, in the Canaries it must be used an accurate coastline representation obtained from digital terrain models and high resolution bathymetries.
- 7) **OTL values** were provided (gravity and displacements) in the Spanish Gravity Tides Network (Instituto de Astronomía y Geodesia, CSIC-UCM). The given values make possible to correct accurately geodetic and geophysical measurements (e.g. from gravimeters, GPS, VLBI) at a **level of 1-1.5%**. As newness in these researches, results of solid Earth tides in three new locations, ALG, MEL and AU, have been obtained. Thus, the tidal parameters found in these stations, with the corrections applied, can be integrated into the Gravity Tides Network of the IAG for using in other geodetic studies.
- 8) The validation of the ocean tidal loading models, IBER01 and CIAM2, were carried out by means of the comparison between the calculated values by using the software ECOM, and the observed values at several gravimetric stations: three stations in the Peninsula, V-ABS and P-IAG (in Madrid) and ALG (in Cádiz), one in Melilla, MEL, and three stations in the Canary Archipelago, CV, TP and AU in Lanzarote, Tenerife and El Hierro, respectively. Then, as a consequence:
  - **The Earth tides parameters** obtained in the stations **P-IAG**, **V-ABS**, **CV** and **TP** have been **improved**, taking into account the correction of the errors in the normalization of the gravimeters of the IAG.
  - The Earth models **DDW** have been verified with accuracy between **0.1% - 0.5%**, depending of the stations considered, for  $O_1$  and  $M_2$  waves.
  - The harmonic  $K_1$  and  $S_2$  show, in general, most significant discrepancies due to the short length of the data series used in the analysis.
- 9) From the global ocean tide models used in this thesis it is shown that, when they are supplemented with the regional models IBER01 and CIAM2, no one of them gives better results

than others in the areas of study, with exception of the CSR4.0 model. However, when OTL are computed by using only global models, the discrepancies obtained are highly significant (e.g., up to 1.1  $\mu\text{Gal}$  in the station ALG for the  $M_2$  wave).

## Future Work

The new ocean tidal loading models developed in this thesis and the accurate OTL values obtained at the new gravity tide stations allow us starting other geodetic researches. For instance, to investigate the elastic response of the Earth's crust in the south area of the Iberian Peninsula and north of Africa through gravity tide observations.

Likewise, we can consider now other future lines as:

- To introduce new computation options in the software ECOM as, for example, tilt and extension variations due to the OTL.
- To improve successively the ocean tide loading models based on the increase in resolution of the model and on the comparison with new tide height observations. Particularly, in the Iberian Peninsula region, local studies must be carried out in some areas as the Gibraltar Strait and the Mediterranean Sea.
- To validate ocean tide loading models with gravity tide observations, having into account the accuracy reached in the OTL computations, the calibration of the spring gravimeters must be improved (e.g., by means of the intercomparison with superconducting and absolute gravimeters).
- The increasing of the length of the observed time series of gravity tides will allow improve the accuracy in the separation of the harmonic constituents, which will be favorable to study of other perturbation effects. This point also make feasible to study with more accuracy the Earth's models, through the OTL computation and the elastic response in areas of geodynamical interest.
- The accurate OTL values obtained in this thesis allow correcting GPS observations, so they can be used to study the response of the measured displacement. At the same time, due to the current accuracy of the GPS, it is possible to use it to validate ocean tide models through the observed and calculated OTL effect.
- Recently, the IGN have established in Spain the first superconducting gravimeter GWR. Also, currently in Tenerife Island there is operative a LCR G-Phone gravimeter, which provide a precision that is one order of magnitude higher than the classical G model. In both cases, the research carried out in this thesis can be used to correct the gravity tide measurements and to study the OTL effect from these gravimeters.

# Referencias

- Abbot, M.B. y D.R. Basco, 1989. Computational fluid dynamics. *An introduction for engineers*. Harlow Longman.
- Abdennadher, J. y M. Boukthir, 2006. Numerical simulation of the barotropic tides in the Tunisian Shelf and the Strait of Sicily. *J. Marine Systems*, 63, 162-182.
- Accad, Y. y Pekeris, C.L., 1978. Solution of the tidal equations for the  $M_2$  and  $S_2$  tides in the world oceans from a knowledge of the tidal potential alone. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 290, 235-266.
- Adams, L.H. y E.D. Williamson, 1923. The composition of the Earth's interior. *The Smithsonian Report for 1923*. 241-260.
- Agnew, D.C., 1983. Conservation of mass in tidal loading computations. *Geophys. J. Int.*, 72 (2), 321-325. doi:10.1111/j.1365-246X.1983.tb03786.x.
- Agnew, D.C., 1995. Ocean load tides at the South Pole: A validation of recent ocean tide models. *Geophys. Res. Lett.*, 22 (22), 3063-3066.
- Agnew, D.C., 1996 (Actualizada en Julio de 2005). SPOTL: Some programs for ocean tide loading. *SIO Reference Ser.* 96-8, *Scripps Institution of Oceanog.*, Woods Hole.
- Agnew, D.C., 1997. NLOADF: A program for computing ocean tide loading. *J. Geophys. Res.*, 102 (B3), 5109-5110.
- Agnew, D.C., 2005. Earth tides: An introduction. *Univer. California, San Diego, CA, USA*. <http://www.unavco.org:8080/cws/straindata/Notesfrom2005class/tidenote.pdf>.
- Akhiezer, N.I. e I.M. Glazman, 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Vol. 1, M. Nestell, trans. from Russian. Frederick Ungar, New York, NY.
- Allinson, C.R. Clarke, P.J., Edwards, S.J., King, M.A., Baker, T.F. y P.R. Cruddace, 2004. Stability of direct GPS estimates of ocean tide loading. *Geophys. Res. Lett.*, 31 (15). doi:10.1029/2004GL020588.
- Almeida, M.M y J. Dubert, 2006. The structure of the tides in the Western Iberian region. *Cont. Shelf Res.*, 26, 385-400.
- Alsop, L.E. y J.T. Kuo, 1964. The characteristic numbers of semidiurnal Earth tidal components for various Earth models. *Ann. Geophys.*, 20, 286.
- Altamimi, Z., Sillard, P. y C. Boucher, 2002. ITRF2000: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth Science Applications. *J. Geophys. Res.*, 107 (B10), 10.1029/2001JB000561.
- Alterman, Z. Jarosch, H. y C.L. Pekeris, 1959. Oscillation of the Earth. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 252, 80-95.
- Alterman, Z. Jarosch, H. y C.L. Pekeris, 1961. Propagation of Rayleigh waves in the Earth. *Geophys. J. Int.*, 4 (0), 219-241.
- Alterman, Z., Eyal, Y. y A.M. Merzer, 1974. On free oscillations of the Earth. *Geophys. Surv.*, 1, 409-428.
- Álvarez, O. Tejedor, B. y J. Vidal, 2001. La dinámica de marea en el estuario del Guadalquivir: un caso peculiar de resonancia antrópica. *Física de la Tierra*, 13, 11-24.
- Álvarez, O. Tejedor, B., Tejedor, L. y B.A. Kagan, 2003. A note on sea-breeze-induced seasonal variability in the  $K_1$  tidal constants in Cádiz Bay, Spain. *Estuarine, Coastal and Shelf Sci.*, 58, 805-812.
- Amante, C. y B.W. Eakins, 2008. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. *National Geophys. Data Center, NESDIS, NOAA, U.S. Dept. Commerce, Boulder, CO*.
- Andersen, O.B., 1994. Ocean tides in the northern North Atlantic Ocean and adjacent seas from ERS-1 altimetry. *J. Geophys. Res.*, 99 (22), 22557-22573.
- Andersen, O.B., 1995. Global ocean tides from ERS-1 and TOPEX/POSEIDON altimetry. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25249-25259.
- Andersen, O.B., 1995(b). New Ocean Tide Models for Loading Computations. *J. Geophys. Res.*, 122, 9256-9264.
- Andersen, O.B., Woodworth, P.L. y R.A. Flather, 1995. Intercomparison of recent ocean tide models. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25261-25282.
- Andersen, O.B. y P. Knudsen, 1997. Multi-satellite ocean tide modelling: the  $K_1$  constituent. *Prog. Oceanogr.*, 40, 197-216.
- Andersen, O.B., Egbert, G.D., Erofeeva, S.Y. y R.D. Ray, 2006. Mapping nonlinear shallow-water tides: a look at the past and the future. *Ocean Dynamics*, 56, 416-429.
- Andersen, O.B., Egbert, G.D., Erofeeva, S.Y. y R.D. Ray, 2006(b). Non-linear tides in shallow water regions from multi-mission satellite altimetry. *AGU WPGM meeting, Beijing, China, July, 2006*.
- Anderson, B.D.O y J.B. Moore, 1979. Optimal filtering. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York*, 357pp.
- Anderson, D.L., 1989. Theory of the Earth. *Boston, Blackwell Sci. Publ.*
- Anderson, D.L. y R.S. Hart, 1978. The  $Q$  of the Earth. *J. Geophys. Res.*, 83, 5869-5882.

- Anderson, D.L. y J.W. Given, 1982. Absorption Band Q model for the Earth. *J. Geophys. Res.*, 87, 3893-3904.
- Apostol, T.M., 1980. Calculus. 2. *Reverté. Barcelona.*
- Arakawa, A. y V. Lamb, 1977. Computational design of the basic dynamical processes of the ucla general circulation model. *En: Methods in Computational Phys.*, 17, 174-267. *Acad. Press.*
- Arabelos, D.N., Asteriadis, G., Contadakis, M.E., Papazachariou, D. y S.D. Spatalas, 2007. Assessment of recent tidal models in the Mediterranean Sea. *En: Dynamic Planet*, 57-64. doi:10.1007/978-3-540-49350-1\_9.
- Arbic, B.K., Garner, S.T., Hallberg, R.W. y H.L. Simmons, 2004. The accuracy of surface elevations in forward global barotropic and baroclinic tide models. *Deep-Sea Res. II*, 51, 3069-3101.
- Aristegui, J., Sangrá, P., Hernández-León, S., Cantón, M., Hernández-Guerra, A. y J.L. Kerling, 1994. Island-induced eddies in the Canary Islands. *Deep-Sea Res.*, 41 (10), 1509-1525.
- Arnosó, J., 1996. Modelización y evaluación de los efectos indirectos sobre las mareas terrestres en el área de las Islas Canarias. *PhD tesis. Univ. Complutense de Madrid*, 148 pp.
- Arnosó, J., Vieira, R., Vélez, E., Van Ruymbeke, M. 1999. Efectos de Carga y Atracción Oceánica en las Observaciones de Marea Gravimétrica en Lanzarote. *CDROM, I Asam. Hispano-Portuguesa Geod. & Geofís.*
- Arnosó, J., Fernández, J., Vieira, R., Vélez, E.J. and A.P. Venedikov, 2000. Results of Tidal Gravity Observations in Tenerife, Canary Islands. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 132, 10283-10290.
- Arnosó, J., Fernández, J., Vieira, R., 2001. Interpretation of tidal gravity anomalies in Lanzarote, Canary Islands. *J. Geodyn.*, 31, 341-354.
- Arnosó, J., Vieira, R., Vélez, E., Cai, W., Tan, S., Jiang, J. y A.P. Venedikov, 2001(b). Monitoring tidal and non-tidal variations in Lanzarote Island (Spain). *J. Geodetic Soc. Jpn.* 47 (1), 456-462.
- Arnosó, J., Benavent, M., Ducarme, B. y F. G. Montesinos, 2006. A new ocean tide loading model in the Canary Islands region. *J. Geodyn.*, 41, 100-111. doi:10.1016/j.jog.2005.08.034.
- Arnosó, J., Montesinos, F.G., Benavent, M., Vélez, E.J., 2008. Gravity tide measurements at two absolute gravity sites in Madrid. *Proc. 6ª Asam. Hispano Portuguesa de Geodesia y Geofísica, Tomar (Portugal).*
- Arnosó, J., Benavent, M., Bos, M.S. y F.G. Montesinos, 2009. New insights into ocean tide loading corrections on tidal gravity data in Canary Islands. *Geophys. Res. Abstracts*, 11, EGU2009-6378.
- Arnosó, J., Benavent, M. y F.G. Montesinos, 2010. Ocean tide loading effects on new gravity tide measurements made at south of Spain. *Geophys. Res. Abst.*, 12, EGU2010-5004.
- Arnosó, J., Benavent, M. Bos, M.S. y F.G. Montesinos, 2010. Verifying the body tide at the Canary Islands, using tidal gravimetry observation. *J. Geodyn. Aceptado.*
- Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Trans. Am. Math. Soc.*, 68, 337-404.
- AVISO, 1996. AVISO user handbook: Merged TOPEX/Poseidon products. *Techn. Rep. AVI-NT-02-101-CN, ed. 3.0, 198 Toulouse, France.*
- AVISO Users Newsletter #4, Febrero 2010. Pistach: Altimetry for coastal and hydrology applications.
- Baker, T.F., 1978. What can earth tide measurements tell us about ocean tides or earth structure?. *Proc. 9th GEOP Conf. Dept. of Geodetic Sci. Rept. (280), Ohio State Univ.*, 299-307.
- Baker, T.F., 1980. Tidal gravity in Britain: tidal loading and spatial distribution of the marine tide. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 62, 249-267.
- Baker, T.F., 1984. Tidal deformations of the Earth. *Sci. Prog. Oxford*, 69, 197-233.
- Baker, T.F., 1985. Methods of Tidal Loading Computations. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 94, 6365-6373.
- Baker, T.F., 1991. Perturbations of survey procedures in the coastal zone. *Proc. 2nd Australasian Hydrographic Symp., Univ. New South Wales*, 9-12.
- Baker, T.F., Edge, R.J. y G. Jeffries, 1989. European tidal gravity: an improved agreement between observations and models, *Geophys. Res. Lett.*, 16, 1109-1112.
- Baker, T.F., Edge, R.J., y G. Jeffries, 1991. European tidal gravity. *Proc. 11th Int. Symp. Earth Tides, Helsinki 1989*, 147-155. *Schweizerbart'sche Verlag. Stuttgart.*
- Baker, T.F., Edge, R.J., y G. Jeffries, 1991b. Tidal gravity and ocean tide loading in Europe. *Geophys. J. Int.*, 107, 1-11.
- Baker, T.F., Curtis, D.J., y A.H. Doodson, 1995. Ocean tide loading and GPS. *GPS World*, 54-59.
- Baker, T.F., Curtis, D.J. y A.H. Dodson, 1996. A new test of Earth tide models in central Europe. *Geophys. Res. Lett.*, 23, 3559-3562.
- Baker, T.F. y M.S. Bos, 2003. Validating Earth and ocean tide models using tidal gravity measurements. *Geophys. J. Int.*, 152 (2), 468-485.
- Balzano, A., 1998. Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models. *Coastal Engineering*, 34, 83-107.

- Banda, E., Suriñach, E., Aparicio, A., Sierra, J. y E. Ruiz de la Parte, 1981. Crust and upper mantle structure of the Central Iberian Meseta (Spain). *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 67, 779-789.
- Barton, E.D., Arístegui, J., Tett, P. y E. Navarro-Perez, 2004. Variability in the Canary Islands area of filament-eddy exchanges. *Prog. Oceanog.*, 62, 71-94.
- Beaumont, C. y A. Berger, 1974. Earthquake prediction: modification of Earth tide tilts and strains dilatancy. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 39, 111-121.
- Beckley, B.D., Lemoine, F.G., Luthcke, S.B., Ray, R.D., y N.P. Zelensky, 2007. A reassessment of global rise and regional mean sea level trends from TOPEX and Jason-1 altimetry based on revised reference frame and orbits. *Geophys. Res. Lett.*, 34, L14608, 25. doi:10.1029/2007GL030002.
- Benavent, M., Arnoso, J. y F. G. Montesinos, 2009. Regional ocean tide loading modelling around the Iberian Peninsula. *J. Geodyn.*, 48, 132-137. doi:10.1016/j.jog.2009.09.023.
- Benavent, M., Arnoso, J. y F.G. Montesinos, 2008. Analysis of ocean tide loading computations in the Iberian Peninsula on the basis of recent ocean tide models. *Earth Tides Symposium 2008. Jena, Alemania*.
- Benavent, M., Arnoso, J. y Montesinos, F.G., 2008. First Results of a New Ocean Tide Loading Model by Data Assimilation in the Nearby of Iberian Peninsula. *Geophys. Res. Abst.*, 10, EGU2008-A-09917, 2008 SRef-ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-09917.
- Benavent, M., Arnoso, J. y F.G. Montesinos, 2008. Modelo oceánico de carga de alta resolución para la región de la Península Ibérica. *Res. 6ª Asam. Luso-Española Geodesia y Geofísica*, 277 -278.
- Benavent, M., Arnoso, J. y F. G. Montesinos, 2005. Computation of surface displacements, tilt and gravity variations due to ocean tide loading. *Física de la Tierra. Topics in Geodesy*, 17, 97-112. ISSN:0214-4557.
- Benavent, M., Arnoso, J., Sevilla, M. J., Vieira, R., 2004. Influencia de la Elasticidad de la tierra en las Funciones de Green en el Cálculo de la Carga Oceánica. *Proc. 4ª Asam. Hispano-Portuguesa Geodesia y Geofísica. Figueira da Foz (Portugal)*, 525-526.
- Bennett, A.F., 1985. Array design by inverse method. *Prog. Oceanog.*, 15, 129-156.
- Bennett, A.F., 1992. Inverse methods in physical oceanography. *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 346pp.
- Bennett, A.F., 2002. Inverse modelling of the ocean and atmosphere. *Cambridge Univ. Press*, 234pp.
- Bennett, A.F. y P.C. McIntosh, 1982. Open ocean modeling as an inverse problem: Tidal theory. *J Phys. Oceanog.*, 12, 1004-1018.
- Bennett, A.F., Chua, B.S. y L.M. Leslie, 1996. Generalized inversion of a global numerical weather prediction model. *Meteor. Atmos. Phys.*, 60, 165-178.
- Bennett, A.F., Chua, B.S. y L.M. Leslie, 1997. Generalized inversion of a global numerical weather prediction model. II: Analysis and implementation. *Meteor. Atmos. Phys.*, 62, 129-140.
- Bennett, A.F., Chua, B.S., Harrison, D.E. y M.J. McPhaden, 1998. Generalized inversion of Tropical Atmosphere-Ocean data and a coupled model of the tropical Pacific. *J. Climate*, 11, 1768-1792.
- Bills, P.J., 1992. Barotropic depth averaged and three-dimensional tidal programs for shallow seas. *PhD. Tesis, Univ. Adelaide*.
- Biot, M.A., 1954. Theory of stress-strain relations in anisotropic visco-elasticity and relaxation phenomena. *J. Appl. Phys.*, 25 (11), 1385.
- Blewitt, G. y P. Clark, 2003. Inversion of Earth's changing shape to weigh sea level in static equilibrium with surface mass redistribution. *J. Geophys. Res.* 108 (B6), 2311. doi:10.1029/2002JB002290.
- Bode, L. y A. Hardy, 1997. Progress and recent developments in storm surge modeling. *J. Hydr. Eng.*, 123 (4), 315-331.
- Bokelmann, G. y E. Maufroy, 2007. Mantle structure under Gibraltar constrained by dispersion of body waves. *Geophys. Res. Letters*, 34, L22305, doi: 10.1029/2007GL030964.
- Bos, M.S., 2000. Ocean tide loading using improved ocean tide models. *PhD. Tesis, Proudman Oceanog. Lab., Univ. Liverpool, Liverpool*.
- Bos, M.S., 2004. New software for calculating the loading of the ocean tides. *Resúm. 4ª Asam. Geod. & Geofís., Figueira da Foz, Portugal*, 523-524.
- Bos, M.S., Baker, T.F., Rothing, K. y H.P. Plag, 2002. Testing ocean tide loading models in the Nordic Seas with tidal gravity observations. *Geophys. J. Int.*, 150, 687-694.
- Bos, M. y T. Baker, 2005. An estimate of the errors in gravity ocean tide loading computations. *J. Geod.*, 79, 50-63.
- Bourret, A., Devenon, J.L. y C. Chevalier, 2005. Investigation on passive open boundary conditions adapted to the conjunction of strong currents, standing tidal wave and high stratification: Application to the French Guiana Continental Shelf. *Cont. Shelf Res.*, 25, 1353-1373.
- Boussinesq, J., 1877. Essai sur la théorie des eaux courants. *Mém. Prés. Acad. Sci. Paris (Ser. 2) (23)*, 1-680.

- Boussinesque, J., 1885. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. 508 Gauthiers-Villars, Paris.
- Bouttier, F. y P. Courtier, 1999. Data assimilation concepts and methods. *Lecture Notes, European Centre for Medium Range Forecasts (ECMWF), Reading, England, 59pp.*
- Boy, J.P., Llubes, M., Hinderer, J. y N. Florsch, 2003. A comparison of tidal ocean loading models using superconducting gravimeter data. *J. Geophys. Res.*, 108 (B4), doi:10.1029/2002JB002050.
- Boy, J.P., Llubes, M., Ray, R. Hinderer, J. y N. Florsch, 2006. Validation of long period oceanic tide models with superconducting gravimeters. *J. Geodyn.*, 41, 112-118. doi:10.1016/j.jog.2005.08.026.
- Brandt, P., Rubino, A., Sein, D.V., Baschek, B., Izquierdo, A. y J.O. Backhaus, 2004. Sea level variations in the western Mediterranean studied by a numerical tidal model of the strait of Gibraltar. *Amer. Meteor. Soc.*, 433-443.
- Brettschneider, G., 1967. Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens zur Ermittlung der M2-mittelschwingungszeit der Nordsee. *Mitt. Inst. Meereskunde Univ. Hamburg*, VII.
- Broomans, P., 2002. Numerical accuracy in solutions of the Shallow-Water-Equations. *TU Delf & TW, Delf Hydraulics*. 32pp.
- Bufo, E., Bezzeghoud, M., Udías, A y C. Pro, 2004. Seismic sources in the Iberia-African plate boundary and their tectonic implications. *Pure and Applied Geophysics*, 161, 623-646.
- Bullen, K.E., 1975. The Earth's density. *John Wiley and Sons*.
- Caldwell, P.C., 1998. Sea Level Data Processing On IBM-PC Compatible Computers. Version 3.0 ( Year 2000 Compliant). *JIMAR Contribution N°98-319*.
- Callahan, P.S., 1993. TOPEX/POSEIDON Project GDR User's Handbook, *JPL Rep. D.8944, Jet Propul. Lab., Pasadena, Calif.*
- Callahan, P.S., 1996. Error in FES 95.2.1 Tides on TOPEX GDRs and Additional Changes to GDRs from Cycle 133 Onwards. *E-mail to TOPEX-POSEIDON distribution*.
- Camacho, A.G., Vieira, R. y C. de Toro, 1991. Least squares prediction applied to gravimetric tides in Europe. *En: J. Kakkuri Sc. (Ed.), Proc. 11<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Helsinki 1989, 473-490. Schweizerbart'sche Verlag. Stuttgart.*
- Candela, J., Winant, C. y A. Ruiz, 1990. Tides in the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 95 (C5), 7313-7335.
- Caputo, M., 1961. Deformation of a layered Earth by an axially symmetric surface mass distribution. *J. Geophys. Res.*, 66, 1479.
- Caputo, M., 1962. Tables for the deformation of an Earth model by surface mass distribution. *J. Geophys. Res.*, 67, 1611.
- Cartwright, D.E., 1977. Ocean Tides. *Rep. Prog. Phys.*, 40 (6), 665-708.
- Cartwright, D.E., 1991. Detection of tides from artificial satellites (Rev.). *En: B.B. Parker (Ed.), Tide Hydrodynamics, 547-568. Wiley, New York.*
- Cartwright, D.E. 1993. Theory of ocean tides with application to altimetry. *En: Rummel R. y F. Sansò (Eds.), Lecture Notes in Earth Sciences, 50, 100-141. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.*
- Cartwright, D.E. y Tayler, R.J., 1971. New computations of the tide-generating potential. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 23, 45-74.
- Cartwright, D.E. y Edden, A.C., 1973. Corrected tables of tidal harmonics. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 33, 253-264.
- Cartwright, D.E., Edden, C., Spencer, R. y J.M. Vassie, 1980. The tides of the Northeast Atlantic Ocean. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 298, 87-139.
- Cartwright, D.E. y G. Alcock, 1983. Altimeter measurements of ocean topography. *En: T. Allan (Ed.), Satellite microwave remote sensing, 309-319. Ellis Horwood, Chichester, England.*
- Cartwright, D.E. y R.D. Ray, 1990. Oceanic Tides from GEOSAT altimetry. *J. Geophys. Res.*, 95, 3069-3090.
- Cartwright, D.E. y R.D. Ray, 1991. Energetics of global ocean tides from Geosat altimetry. *J. Geophys. Res.*, 96 (C9), 16897-16912.
- Castanedo, S. y R. Medina, 2002. Análisis de modelos 3D para la simulación de flujo en aguas de transición. *Ingeniería del Agua*, 9 (4), 467-481.
- Castro, M.J., García-Rodríguez, J.A., González-Vida, J.M., Macías, J. y C. Parés, 2007. Improved FVM for two-layer shallow-water models: Application to the Strait of Gibraltar. *Adv. Eng. Softw.*, 38, 386-398.
- Casulli, V., 1990. Semi-implicit difference methods for two-dimensional shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 86, 56-74.
- Catalán, M.M. y M.P.U. Catalán, 1996. Aplicaciones de la altimetría al estudio de la dinámica del océano. La corriente circumpolar en el arco del Scotia. *Física de la Tierra* (8), Ed. U.C.M., Madrid, ISBN: 0214-4557, 51-80.
- Cateura, C., López-Marco, J., Espino, M. y F.J. Puigdefàbregas, 2007. Xarxa d'instrumentació oceanogràfica i meteorològica de la Generalitat de Catalunya (XIOM). *Informe tècnic, LEM-UPC, Barcelona.*



- Chambers, D.P., Hayes, S.A., Ries, J.C. y T.J. Urban, 2003. New TOPEX sea state bias models and their effect on global mean sea level. *J. Geophys. Res.*, 108 (C10), 3305-3311.
- Chambers, D.P., Warh, J. y R.S. Nerem, 2004. Preliminary observations of global ocean mass variations with GRACE. *Geophys. Res. Lett.*, 31, L13310, doi:10.1029/2004GL020461.
- Chapront, J. y M. Chapront –Touze, 1987. ELP 2000-85: Une solution du mouvement de la lune couvrant la période historique. *Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes*, SO21.
- Chelton D.B., Ries, J.C., Haines, B.J., Fu, L.L. y P.S. Callahan, 2001. Satellite altimetry. En: Fu, L.L y A. Cazenave (Eds.), *Satellite altimetry and Earth Sciences, Int. Geophys. Ser.*, 69, 1-131.
- Chen, P. y G. Mellor, 1999. Determination of tidal boundary forcing using tide station data. En: Mooersm C.N.K. (Ed.), *Coastal Ocean Prediction*, 56, 329-351. CRC Press, Boca Raton, FL.
- Chen, X., Ducarme, B., Sun, H. y J. Xu, 2008. Loading effect of a shelf-consistent equilibrium ocean pole tide on the gravimetric parameters of the gravity pole tides at superconducting gravimeter stations. *J. Geodyn.*, 45, 201-207. doi:10.1016/j.jog.2007.11.003.
- Chow, V.T., 1959. Open Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York, USA, 680pp.
- Chua, B.S. y A.F. Bennett, 2001. An inverse ocean modeling system. *Ocean Modelling*, 3, 137-165.
- Clarke, A.J. y D.S. Battisti, 1981. The effect of continental shelves on tides. *Deep Sea Res.*, 28A (7), 665-682.
- Cohn, S.E., 1997. An introduction to estimation theory. *J. Meteor. Soc. Japan*, 257-288.
- Courant, R., Friedrichs, K.O. y H. Lewy, 1928. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32-74.
- Cressie, N., 1993. Statistics for spatial data. Wiley, New York
- Crossley, D., 2004. Preface to the Global Geodynamics Project. *J. Geodyn.*, 38 (3-5), 225-236.
- Crossley, D., Hinderer, J., Casula, G., Francis, O., Hsu, H.T., Imanishi, Y., Jentzsch, G., Kaarianen, J., Merriam, J., Meurers, B., Neumeyer, J., Richter, B., Shibuya, K., Sato, T., y T. van Dam, 1999. Network of superconducting gravimeters benefits several disciplines. *EOS*, 80, 121-126.
- Crossley, D., Hinderer, J. y J.P. Boy, 2005. Time variation of the European gravity field from superconducting gravimeters. *Geophys. J. Int.* 161, 257-264.
- Dach, R. y R. Dietrich, 2001. The ocean loading effect in the GPS analysis: A case study in the Antarctic Peninsula region. *Marine Geod.*, 24, 13-25.
- Dahlen, F.A., 1968. The normal modes of a rotating, elliptical earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 16, 329-367.
- Dahlen, F.A. y M.L. Smith, 1975. The influence of rotation on the free oscillations of the Earth. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 279 (1292), 583-624.
- Dahlen, F.A. y J. Tromp, 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton Univ. Press., Princeton.
- Daley, R. 1991. Atmospheric data analysis. Cambridge Univ. Press., New York, 457pp.
- Dañobeitia, J.J., 1987. Reconocimiento geofísico de estructuras submarinas situadas al norte y sur del Archipiélago Canario. *Rev. Soc. Geológica España*, 1 (1-2), 143-155.
- Dañobeitia, J.J y B.J. Collette, 1989. Estudio mediante sísmica de reflexión de un grupo de estructuras submarinas situadas al Norte y Sur del archipiélago Canario. *Acta Geológica Hispánica*, 24 (2), 147-163.
- Das, S.K. y R.W. Lardner, 1991. On the estimation of parameters of hydraulic models by assimilation of periodic tidal data. *J. Geophys. Res.*, 96, 15187-15196.
- Das, S.K. y R.W. Lardner, 1992. Variational parameter estimation for a two dimensional numerical tidal model. *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 15, 313-327.
- Davies, A.M., 1993. Numerical problems in simulating tidal flows with a friction velocity dependent eddy viscosity and the influence of stratification. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 16, 105-131.
- Davies, A.M. y J.N. Aldridge, 1993. A numerical model study of parameters influencing tidal currents in the Irish Sea. *J. Geophys. Res.*, 98 (C4), 7049-7067.
- Davies, A.M., Jones, J.E. y J. Xing, 1997. Review of recent developments in tidal hydrodynamic modeling. I: Spectral methods. *J. Hydr. Eng.*, 123 (4), 278-292.
- Defant, A., 1961. *Phys. Oceanography*, 2, Pergamon Press, Oxford, 598pp.
- Defraigne, P., Dehant, V. y J. Hinderer, 1994. Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *J. Geophys. Res.*, 99 (B5), 9203-9213.
- Dehant, V., 1986. Body tides for an elliptical rotating Earth with an inelastic mantle. En: R. Vieira. (Ed.), *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, Madrid 1985, 367-377. CSIC.
- Dehant, V., 1987. Tidal parameters for an inelastic Earth. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 49, 97-116.
- Dehant, V., 1997. Report of the Working Group on theoretical tidal model. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 127, 9716-9728.

- Dehant, V. y J. Zschau, 1989. The effect of mantle inelasticity on tidal gravity: a comparison between the spherical and the elliptical earth model. *Geophys. J. Int.*, 97, 549-555.
- Dehant, V., Defraigne, P. y J.M. Wahr, 1999. Tides for a convective Earth. *J. Geophys. Res.*, 104 (B1), 1035-1058.
- De Mey, P., 1992. Synoptic estimates of an eddy field in the North Atlantic Current. *Oceanol. Acta*, 15 (5), 537-543.
- De Mey, P. y A.R. Robinson, 1987. Assimilation of altimeter eddy fields in a limited area quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, 17, 2280-2293.
- Denis, C., 1977. Static and dynamic effects on theoretical love numbers. *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 709-729.
- Desai, S.D. y J.M. Wahr, 1995. Empirical ocean tide models estimated from TOPEX/POSEIDON altimetry. *J. Geophys. Res.*, 100 (12), 25205-25228.
- Desai, S.D. y D.-N. Yuan, 2006. Application of the convolution formalism to the ocean tide potential: Results from the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE). *J. Geophys. Res.*, 111, C06023, doi:10.1029/2005JC003361.
- Dombrowsky, E. y P. De Mey, 1992. Continuous assimilation in an open domain of the Northeast Atlantic, 1. Methodology and application to AttenA-88. *J. Geophys. Res.*, 97, 9719-9734.
- Ducarme, B., Venedikov, A.P., Arnos, J. y R. Vieira, 2004. Determination of the long period tidal waves in the GGP superconducting gravity data. *J. Geodyn.*, 38 (3-5), 307-324. doi:10.1016/j.jog.2004.07.004.
- Ducarme, B., Venedikov, A.P., Arnos, J., Chen, X.D., Sun, H.P. y R. Vieira, 2006. Global analysis of the GGP superconducting gravimeters network for the estimation of the pole tide gravimetric amplitude factor. *J. Geodyn.*, 41, 334-344. doi:10.1016/j.jog.2005.08.007.
- Dushaw, B.D., Egbert, G.D., Worcester, D.F., Cornuelle, B.D., Howe, B.M. y K. Metzger, 1997. A TOPEX/POSEIDON global tidal model (TPXO.2) and barotropic tidal currents determined from long-range acoustic transmissions. *Prog. Oceanogr.*, 40, 337-367.
- Dressler, R., 1980. Hydrodynamisch-numerische Untersuchungen der M2-Gezeit und einiger Tsunamis im europäischen Mittelmeer. *Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Univ. Hamburg*, 23, 1-30.
- Dziewonski, A. y D.L. Anderson, 1981. Preliminary Reference Earth Model. *Phys. Earth Planet. Int.*, 25, 297-356.
- Eanes, R.J., 1994. Diurnal and semi-diurnal tides from TOPEX/POSEIDON altimetry (Abst.). *EOS Transactions AGU*, 75 (16), Springer Meeting Supplement, p. 108.
- Eanes, R. y S. Bettadpur, 1996. The CSR3.0 global ocean tide model: Diurnal and semidiurnal ocean tides from TOPEX/POSEIDON altimetry. *CSR-TM-96-05, Univ. of Texas, Center for Space Res., Austin, Texas*.
- ECMWF, 1991. European Center for Medium-Range Forecasts Model, ECMWF research manual. *Tech. Rep.*
- Egbert, G.D., 1997. Tidal data inversion: Interpolation and inference. *Prog. Oceanogr.*, 40, 53-80.
- Egbert, G.D., Bennett, A.F. y M. Foreman, 1994. TOPEX/POSEIDON tides estimated using global inverse model. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24821-24852.
- Egbert, G.D. y A.F. Bennett, 1996. Data assimilations methods for ocean tides. En: P. Malanotte-Rizzoli (Ed.), *Modern approaches to data assimilation in ocean modelling*, 147-179. Elsevier.
- Egbert, G.D. y R.D. Ray, 2000. Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data. *Nature*, 405, 775-778.
- Egbert, G.D. y S.Y. Erofeeva, 2002. Efficient inverse modelling of barotropic ocean tides. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 19 (2), 183-204.
- Egbert, G.D. y R.D. Ray, 2003. Deviation of long-period tides from equilibrium: kinematics and geostrophy. *J. Phys. Oceanography*, 33, 822-840.
- Egbert, G.D., Ray, R.D. y B.G. Bills, 2004. Numerical modelling of the global semidiurnal tide in the present day and in the last glacial maximum. *J. Geophys. Res.*, 109, C03003.
- Egbert, G.D. y S.Y. Erofeeva, 2006. OSU Tidal Inversion Software Documentation: OTIS version 3.2. *Oregon State University, College of Oceanic and Atmospheric Sciences, Corvallis, Oregon*.
- Elósegui, P., Davis, J.L., Mitrovica, J.X., Bennett, R.A. y B.P. Wernicke, 2003. Crustal loading near Great Salt Lake, Utah. *Geophys. Res. Lett.*, 30, 1111, 4pp, doi:10.1029/2002GL016579.
- Endo, T. y S. Okubo, 1984. A correction to "Partial derivative of Love numbers". *Bull. Geod.*, 58, 73-74.
- ETOPO5, 1988. Data Announcement 88-MGG-02, Digital relief of the Surface of the Earth. *NOAA, National Geophysical Data Center, Boulder, Colorado*.
- ETOPO2, 2001. Global Gridded 2-minute Database, *National Geophys. Data Center, National Oceanic & Atmos. Administration, U.S. Dept. Commerce*, <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo2.html>.
- Fairbridge, R.W., 1966. The Encyclopedia of Oceanography. *New York: Van Nostrand Reinhold Co.*
- Faller, J.E., Rinker, R.L. y M.A. Zumberge, 1979. Plans for the development of a portable absolute gravimeter with a few parts in 10 to the 9 accuracy. *Tectonophysics*, 52, 107.
- Farrell, W.E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10, 761-797.

- Farrell, W.E., 1972(b). Global calculations of tidal loading. *Nature Phys. Sci.*, 238, 43-44.
- Farrell, W.E., 1973. Earth tides, ocean tides and tidal loading. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 274, 253-259.
- Fanjul, E.A., Pérez, B. e I. Rodríguez, 1997. A description of tides in the eastern north Atlantic. *Prog. Oceanog.*, 40, 217-244.
- Fanjul, E.A., Gómez, B.G., Carretero, J.C. e I.R.S. Arevalo, 1998. Tide and surge dynamics along the Iberian Atlantic coast. *Oceanol. Acta*, 21 (2), 131-143.
- Fe Marqués, J.M. (2005). Aplicación del método de volúmenes finitos a la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con incorporación de los esfuerzos debidos a turbulencia. *PhD. Tesis, Univer. da Coruña*, 226pp.
- Fenoglio, M.L., 2001. Analysis and representation of regional sea-level variability from altimetry and atmospheric-oceanic data. *Geophys. J. Int.*, 145, 1-18.
- Fernandes, M.J., Barbosa, S. y C. Lázaro, 2006. Impact of altimeter data processing on sea level studies. *Sensors*, 6, 131-163.
- Fernández, J., Fernández, M., Miguelsanz, L. y A.G. Camacho, 2008. On the interpretation of gravity tide residuals in the Iberian Peninsula. *J. Geodyn.*, 45 (1), 18-31. doi:10.1016/j.jog.2007.03.006.
- Flather, R.A., 1988. A numerical model investigation of tides and diurnal period continental shelf waves along Vancouver Islands. *J. Phys. Oceanog.*, 18, 115-139.
- Florsch, N., Hinderer, J. y H. Legros, 1995. Generalized and Bayesian inversions of the FCN parameters from gravity data. *XX EGS General Assembly, Hamburg*.
- Florsch, N. y J. Hinderer, 1998. Estimation of the Free Core Nutation Q factor from tidal analysis. En: *Ducarme, B. y P. Paquet (Eds.), Ser. Geophys., Bruxelles, Proc. 13<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 315-322. *Obs. Roy. Belgique*.
- Florsch, N. y J. Hinderer, 2000. Bayesian estimation of the Free Core Nutation parameters from the analysis of precise tidal gravity data. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 117, 21-35.
- Foreman, M.G.G., 1977. Manual of tidal heights analysis and prediction. *Pacific Marine Sci., Rept. (77-10)*, 58 *Inst. Of Ocean Sci., Sidney, B.C., Canada*.
- Foreman, M.G.G., 1984. A two dimensional dispersion analysis of selected methods for solving the linearized shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 56, 287-323.
- Foreman, M.G.G. y R.E. Thomson, 1997. Three-dimensional model simulations of tides and buoyancy currents along the West Coast of Vancouver Island. *J. Phys. Oceanog.*, 27, 1300-1325.
- Fortunato, A.B., Ferreira, J.S. y A. Oliveira, 2000. A tidal model of the Iberian Atlantic shelf: first results. *Thalassas*, 16, 41-47.
- Fortunato, A.B., Pinto, L., Oliveira, A. y J.S. Ferreira, 2002. Tidally generated shelf waves off the western Iberian coast. *Cont. Shelf Res.*, 22, 1935-1950.
- Francis, O. y V. Dehant, 1987. Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimations. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 100, 6962-6986.
- Francis, O. y P. Mazzega, 1990. Global charts of ocean tide loading effects. *J. Geophys. Res.*, 95 (C7), 11411-11424.
- Francis, O. y P. Melchior, 1996. Tidal loading in south Western Europe: A test area. *Geophys. Res. Lett.*, 23 (17), 2251-2254.
- Francis, O. y T. van Dam, Analysis of results of the International Comparison of Absolute Gravimeters in Walferdange (Luxembourg) of November 2003. *Cahiers Centre Européen de Géodyn. Séismologie*, 26, 1-23.
- Fu, L.L., Christensen, E.J., Yamarone, C.A., Lefebvre, M., Ménard, Y., Dorrer, M. y P. Escudier, 1994. TOPEX/POSEIDON mission overview. *J. Geophys. Res.*, 99, 24369-24381.
- Fu, L.L. y A. Cazenave (Eds.), 2001. Satellite altimetry and Earth Sciences. A handbook of Techniques and Applications. *Int. Geophys. Ser.*, 69.
- Fullea, J., Fernández, M. y H. Zeyen, 2006. Lithospheric structure in the Atlantic-Mediterranean transition zone (southern Spain, northern Morocco): a simple approach from regional elevation and geoid data. *C. R. Geoscience*, 338, 140-151.
- García, M. J., Ruíz, C. y A. Esteban, 1992. Niveles medios y constantes armónicas en los puertos de la costa Española. *Informe Técnico del IEO (128)*, 82pp.
- García, M.J., Pérez, B., Fraile, M.A. y J.M. Millán, 2000. Sea level variability along the Spanish Coast, 1990-1999. *10<sup>th</sup> General Assembly WEGENER Project (WEGENER 2000), Extended Abstract Book, San Fernando*.
- García, J., Pérez, B., Fraile, M.A. y J.G. Millán, 2000. Sea level variability along the Spanish Coast, 1990-1999. *10th General Assembly WEGENER Project (WEGENER 2000), Extended Abstract Book, San Fernando. Boletín n° 3/200 del Real Observatorio de la Armada, San Fernando, España*.
- García-Lafuente, J., Castillejo, F.F. y M.J. García, 1987. Resultados de la red mareográfica en el Estrecho de Gibraltar. *Rev. Geofís.*, 43, 37-56.

- García-Lafuente, J., Almazán, J.L., Castillejo, F., Khribeche, A. y A. Hakimi, 1990. Sea level in the Strait of Gibraltar: Tides. *Int. Hydrog. Rev.*, 47, 111-130.
- García-Lafuente, J., Vargas, J.M., Plaza, F. y T. Sarhan, 2000. Tide at the eastern section of the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 105 (C6), 14197-14213.
- Gaspar, P., Ogor, F., Le Traen, P. y O. Zanife, 1994. Estimating the sea state bias of TOPEX and POSEIDON altimeters from crossover differences. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24981-24994.
- Gaspar, P., Ogor, F. y C. Escoubes, 1996. Nouvelles calibration et analysis du bias d'état de mer des altimètres TOPEX et Poseidon. *Techn. note 96/018 CNES Contract 95/1523*.
- Gelb, A. (Ed.), 1974. Applied Optimal Estimation. *The M.I.T. Press, Cambridge, M. A.*, 374pp.
- Gjevik, B. y T. Straume, 1989. Model simulation of the M2 and the K1 tide in the Nordic Seas and the Arctic Ocean. *Tellus*, 41A, 73-96.
- Gil, E., 2002. Variaciones temporales del nivel del mar: Aplicaciones geodésicas, geofísicas y oceanográficas. *PhD. Tesis, Univ. Complutense de Madrid*, 475pp.
- Gilbert, F. y MacDonald, 1960. Free Oscillations of the Earth. I. Toroidal Oscillations, *J. Geophys. Res.*, 65 (2), 675-693.
- Gilbert, F. y A.M. Dziewonski, 1975. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Phil. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, 278, 187-269.
- Gilbert, J.C. y C. LeMaréchal, 1989. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Math. Programming*, 45, 407-435.
- Gill, A.E., 1982. Atmosphere-Ocean Dynamics. *Acad. Press, New York*, 662pp.
- Goad, C.C., 1980. Gravimetric tidal loading from integrated Green's functions. *J. Geophys. Res.*, 85, 2679-2683.
- Godin, G., 1972. The analysis of tides. *Univ. Toronto Press, Toronto*, 264pp.
- Golub, G.H. y C.F. Van Loan, 1996. Matrix Computations. *Johns Hopkins Univ. Press*, (3<sup>rd</sup> Ed.), Maryland.
- Gómez-Ortiz, D., Tejero, R., Ruiz, J., Babín-Vich, R., y J. González-Casado, 2005. Estimating the effective elastic thickness of the lithosphere of the Iberian Peninsula based on multitaper spectral analysis. *Geophys. J. Int.*, 160 (3), 729-735.
- González, M., García, M.A., Espino, M. y A. Sánchez-Arcilla, 1995. Un modelo numérico en elementos finitos para la corriente inducida por la marea. Aplicaciones al Estrecho de Gibraltar. *Rev. Int. Métodos Num. Calc. Diseño Ing.*, 11, 383-400.
- Gordoev, R.G., Kagan, B.A. y E.V. Polyakov, 1977. The effects of loading and self-attraction on global ocean tides: the model and the results of a numerical experiment. *J. Phys. Oceanog.*, 7, 161-170.
- Gotlib, V.Y. y B.A. Kagan, 1982. Numerical simulation of the tides in the world ocean: 2. Experiments on the sensitivity of the solution to choice of the shelf effect parameterization and to variations in shelf parameters. *Dtsch. Hydrog. Z.*, 35, 1-14.
- Grace, S.F., 1931. Historical review of dynamical explanations of the tides in the Mediterranean Sea, the Baltic Sea, the Gulf of Mexico and the Arctic Ocean. *Publ. Sci. Assoc. d'Oceanog. Phys.*, 1, 15-26.
- Grafarend E.W., Engels, J. y P. Varga, 1997. The space-time gravitational field of a deformable body. *J. Geod.*, 72, 11-30. doi: 10.1007/s00190-004-0388-z.
- Gross, T.F. y F.E. Werner, 1994. Residual circulations due to bottom roughness variability under tidal flows. *J. Phys. Oceanog.*, 24, 1494-1502.
- Groves, G.W. y R.W. Reynolds, 1975. An orthogonalized convolution method of tide prediction. *J. Geophys. Res.*, 80, 4131-4138.
- Guo, J.Y., Li, Y.B., Huang, Y., Deng, H.T., Xu, S.Q. y J.S. Ning, 2004. Green's function of the deformation of the Earth as a result of atmospheric loading. *Geophys. J. Int.*, 159, 53-68.
- Guoying, L. y H. Houtze, 1986. Response of visco-elastic layered spherical Earth under the surface load. *En: R. Vieira (Ed.), Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 393-413. CSIC.
- Gutenberg, B., 1959. The asthenosphere low velocity layer. *Ann. Geofis., Rome*, 12, 439-460.
- Haas, R., y H. Schuh, 1997. Determination of Tidal Parameters by VLBI. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 127, 9778-9786.
- Haas, R. y H. Schuh, 1998. Ocean Loading Observed by Geodetic VLBI. *En: Ducarme, B. y P. Paquet (Eds.), Ser. Geophys., Bruxelles, Proc. 13<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 111-120. Obs. Roy. Belgique.
- Hansen, W., 1948. Die Ermittlung der gezeiten beliebig gestalteter meeresgebiete mit hilfe des randwertverfahrens. *Deutsche Hydr. Zeit*, 1.
- Hansen, W., 1966. Die Reproduktion der Bewegungsvorgänge im Meere mit Hilfe Hydrodynamisch-numerischer Verfahren. *Mitteilungen des Int. Meerekunde der Univ. Hamburg*.
- Harkrider, D.G., 1970. Surface waves in multilayered elastic media, 2, Higher mode spectra and spectral ratios from point sources in plane layered Earth models. *Bull. Seismol. Amer.*, 60, 1937.

- Hartmann, T. y Wenzel, H.G., 1995. The HW95 Tidal Potential Catalogue. *Geophys. Res. Lett.*, 22 (24), 3553-3556.
- Hayne, G.S., Hancock, D.W., Purdy, C.L. y P.S. Callahan, 1994. The corrections for significant wave height and attitude effects in the TOPEX radar altimeter. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24941-24955.
- Heiskanen, W.A. y Moritz, H., 1967. Physical Geodesy. *W.H. Freeman, San Francisco*, 364 pp.
- Hendershott, M.C., 1972. The effects of solid Earth deformation on global ocean tides. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 29, 389-402.
- Hendershott, M.C., 1981. Long waves and ocean tides. *En: Warren, B. y C. Wunsch (Eds.), Evolution of Physical Oceanography*, 292-341. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Henderson, F.M., 1996. Open Channel Flow. *The Macmillan Co., New York*, 1966.
- Hinderer, J., Crossley, J. y H. Xu., 1993. The accuracy of tidal gravimetric factors and nearly diurnal free wobble resonance parameters in superconducting gravimetry. *En: H.T. Hsu (Ed.), Proc. 12<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Beijing, 4-8 August 1993*, 289-297. *Sci. Press, Beijing*.
- Hinderer, J. y D. Crossley, 2000. Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics. *Surv. Geophys.*, 21, 1-45.
- Hinderer, J. y D. Crossley, 2004. Scientific achievements from the first phase (1997-2003) of the Global Geodynamic Project using a worldwide network of superconducting gravimeters. *J. Geodyn.*, 38, 237-262.
- Hirose, N., Fukumori, I. Y J.H. Yoon, 1999. Assimilation of TOPEX/POSEIDON data with a reduced gravity model of the Japan Sea. *J. Oceanog.*, 55, 53-64.
- Hobson, E.W., 1931. Spherical and ellipsoidal harmonics. *Cambridge Univ. Press*.
- Houze, X. y M. Weijian, 1987. Effect of different Earth models on loading tidal corrections. *Earthquake Res. in China*, 1 (1), 123-134.
- Imel, D., 1994. Evaluation of the TOPEX/Poseidon dual-frequency ionosphere correction. *J. Geophys. Res.*, 99, 24895-24906.
- IOC, IHO, BODC, 2003. Centenary edition of the GEBCO digital atlas. *Publ.in CD-ROM on behalf of the Intergovernmental Hydrographic Organization as part of the General Bathymetry Chart of the Oceans, British Oceanog. Data Centre, Liverpool*.
- Izquierdo, A., Tejedor, L., Sein, D.V., Backhaus, J.O., Brandt, P., Rubino, A. y B.A. Kagan, 2001. Control variability and the internal bore evolution in the strait of Gibraltar: A 2-D two layer model study. *Estuarine, Coastal and Shelf Sci.*, 53, 637-651.
- Jazwinski, A.H., 1970. Stochastic processes and filtering theory. *Acad. Press, New York*, 376pp.
- Jentzsch, G., 1997. Earth tides and ocean tidal loading. *En: Wilhelm, H., Zürn, W. y H.G. Wenzel (Eds.), Tidal Phenomena, Lecture Notes in Earth Sciences*, 66, 145-172. *Springer, Berlin Heidelberg New York*.
- Jentzsch, G., Kundsén, P. y M. Ramatschi, 2000. Ocean tide loading affecting precise geodetic observations on Greenland: error account of surface deformations by tidal gravity measurements. *Phys. Chem. Earth (A)*, 25 (4), 401-407.
- Jobert, G., 1960. Perturbation des marées terrestres. *Ann. Geophys.*, 16, 1.
- Kalman, R. y R. Bucy, 1961. New results in linear prediction and filtering theory. *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, 83D, 95-108.
- Kaula, W.M., 1963. Elastic models of the mantle corresponding to variations in the external gravity field. *J. Geophys. Res.*, Vol., 68 (17), 4967.
- Kennet, B.L.N., 2006. On seismological reference models and the perceived nature of heterogeneity. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 159, 129-139.
- Khan, S.A., 2005. Surface deformations analyzed using GPS time series. *Danish National Space Center, Sci. Rept. (1), Copenhagen*, ISBN: 97-8879-1694-004. ISBN: 87-91694-00-0.
- Kudryavtsev, S.M., 2004. Improved harmonic development of the Earth tide generating potential. *J. Geod.*, 77, 229-838.
- Khan, S.A. y H.G. Scherneck, 2003. The M2 ocean tide loading wave in Alaska: vertical and horizontal displacements, modelled and observed. *J. Geod.*, 77, 117-127. doi:10.1007/s00190-003-0392-y.
- Kantha, L.H., 1995. Barotropic tides in the global oceans from a nonlinear tidal model assimilating altimetric tides: 1. Model description and results. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25283-25308.
- Khanta, L.H., Tierney, C., Lopez, J.W., Desai, S.D., Parke, M. y L. Drexler, 1995. Barotropic tides in the global oceans from a nonlinear tidal model assimilating altimetric tides: 2. Altimetric and geophysical implications. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25309-25317.
- Kim, C.K. y Lee, J.S., 1994. A three-dimensional PC-based hydrodynamic model using an ADI scheme. *Coastal Engineering, Elsevier*, 23, 271-287.
- Kimeldorf, G. y G. Wahba, 1971. Some results on Tchebycheffian spline functions. *J. Math. Anal. Applic.*, 33, 82-95.

- Kinder, T. y H. Bryden, 1987. 1985-1986 Gibraltar Experiment: Data collection and preliminary results. *EOS*, 68, 786-787.
- Kinder, T. y H. Bryden, 1988. Gibraltar Experiment: Summary of the field program and initial results of the Gibraltar experiment. *Tech. Rep. Whoi-88-30*, Woods Hole Oceanographic Institution.
- King, M.A., Penna, N.T. y P.J. Clarke, 2005. Validation of ocean tide models around Antarctica using onshore GPS and gravity data. *J. Geophys. Res.*, 110, B08401, doi:10.1029/2004JB003390.
- King, M.A. y L. Padman, 2005. Accuracy assessment of ocean tide models around Antarctica. *Geophys. Res. Lett.*, 32, L23608, doi:10.1029/2005GL023901.
- Kivman, G.A. 1997. Assimilating data into open ocean tidal models. *Surv. Geophys.*, 18, 619-643.
- Kjerfve, B. y B. Knoppers, 1991. Tidal choking in a coastal lagoon. En: *Tidal Hydrodynamics*, B. Parker (Ed.), John Wiley & Sons, New York, 169-179.
- Knudsen, 1993. P. Knudsen, Altimetry for Geodesy and Oceanography. In: *Geodesy and Geophysics. Lecture notes for the NKG Autumn School 1992J*. Kakkuri, Editor, Publications of the Finnish Geodetic Institute, No. 115 (1993) Helsinki.
- Koblinsky, C.J., Ray, R.D., Beckeley, B.D., Wang, Y.M., Tsaoussi, L., Brenner, A. Y R. Williamson, 1999. *NASA ocean altimeter Pathfinder project report 1: Data processing handbook*, NASA/TM-1998-208605.
- Kolar, R.L., Gray, W.G., Westerink, J.J. y R.A. Luettich, 1994. Shallow water modelling in spherical coordinates: Equation formulation, numerical implementation, and application. *J. Hydraulic Res.*, 32 (1), 3-24.
- Kolar, R.L., Gray, W.G. y J.J. Westerink, 1994(c). Normal flow boundary conditions in shallow water models influence on mass conservation and accuracy. *Computational Methods in Water Resources X*, 2, Peters et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1081-1088.
- Kopaev, A. y F. Kuznetsov, 2000. Modelled and observed anomalies of tidal gravity factors. *Phys. Chem. Earth, Part A: Solid Earth&Geodesy*, 25 (4), 395-399. doi: 10.1016/S1464-1895(00)00062-4
- Kowalik, Z., 1994. Modeling of topographically amplified diurnal tides in the Nordic Seas. *J. Phys. Oceanogr.*, 24, 1717-1731.
- Kowalik, Z. e I. Polyakov, 1998. Tides in the Sea of Okhotsk. *Amer. Meteor. Soc.*, 1389-1409.
- Krohn, J. 1984. A global ocean tide model with high resolution in shelf areas. *Marine Geophysical Researches*, 7, 231-246.
- Kuo, J.T., 1969. Static response of a multilayered medium under inclined surface loads. *J. Geophys. Res.*, 74, 3195.
- Kuo, J.T., 1991. Synoptic prediction of tides and currents everywhere in the ocean water. En: *B.B. Parker (Ed.), Tidal Hydrodynamics*, 61-76. Wiley&Sons, New York.
- Kurapov, A.L., Allen, J.S., Egbert, G.D., Miller, R.N., Kosro, P.M., Levine, M. y T. Boyd, 2005. Distant effect of assimilation of moored currents into a model of coastal wind-driven circulation of Oregon. *J. Geophys. Res.*, 100, C02022, doi:10.1029/2003JC002195.
- Lambeck, K., 1988. Geophysical Geodesy: The slow deformations of the Earth. *Oxford Univ. Press.*, New York, 718p.
- Lambeck, K., Johnston, P., Smither, C. y M. Nakada, 1990. Holocene glacial rebound and sea level change in northwestern Europe. *Geophys. J. Int.*, 103, 451-468.
- Lambert, A., Pagiatakis, S.D., Billyard, A.P. y H. Dragert, 1998. Improved ocean tide loading corrections for gravity and displacement: Canada and northern United States. *J. Geophys. Res.*, 103 (B12), 30231-30244.
- Lambert, A., Courtier, N. y T.S. James, 2006. Long-term monitoring by absolute gravimetry: Tides to postglacial rebound. *J. Geodyn.*, 41, 307-317.
- Lanzano, P., 1982. Load numbers, solid Earth tides, and liquid core dynamics. *NRL, Rept.*, 6624.
- Lardner, R.W., Al-Rabeh y A.H. Gunay, 1993. Optimal estimation of parameters for a two-dimensional hydrodynamical model of the Arabian Gulf. *J. Geophys. Res.*, 98, 18229-18242.
- Larsen, J. C., 1977. Cotidal charts for the Pacific Ocean near Hawaii using f-plane solutions. *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 100-109.
- Le Cann, B., 1990. Barotropic tidal dynamics of the Bay of Biscay shelf: observations, numerical modelling and physical interpretation. *Cont. Shelf Res.*, 10 (8), 723-758.
- Le Dimet, F. y O. Talagrand, 1986. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus. Ser. A*, 38A, 97-110.
- Leendertse, J.J., 1967. Aspects of a computational model for long-period water wave propagation. *Memorandum RM5294-PR*, Rand Corporation, Santa Monica, California.
- Lefèvre, F., 2000. Modélisation des marées océaniques à l'échelle globale: assimilation de données in situ et altimétriques. *PhD. Tesis*, Univ. Toulouse III.

- Lefèvre, F., Lyard, F.H. y C. Le Provost, 2000. FES98: A new global tide finite element solution independent of altimetry. *Geophys. Res. Lett.*, 27 (17), 2717-2720.
- Lefèvre, F., Lyard, F.H., Le Provost, C. y E.J.O. Schrama, 2002. FES99: a global tide finite element solution assimilating tide gauge and altimetric information. *J. Atmos. Oceanogr. Technol.*, 19, 1345-1356.
- Le Meur, E. y P. Huybrechts, 1996. A comparison of different ways of dealing with isostasy: examples from modelling the Antarctic ice sheet during the last glacial cycle. *Ann. Glaciol.*, 23, 309-317.
- Le Meur, E. y P. Huybrechts, 1998. Present day uplift patterns over Greenland from coupled ice-sheet/visco-elastic earth model. *Geophys. Res. Lett.*, 25, 3951-3954.
- Le Meur, E. y R.C.A. Hindmarsh, 2000. A comparison of two spectral approaches for computing the Earth response to surface loads. *Geophys. J. Int.*, 141, 282-298.
- Le Provost, C., 2001. Ocean tides. En: Fu, LL. y A. Cazenave (Eds.), *Satellite altimetry and Earth Sciences, Int. Geophys. Ser.*, 69, 267-303.
- Le Provost, C. y P. Vincent, 1986. Some test of predictions for a finite element model of ocean tides. *J. Comput. Phys.*, 65, 273-291.
- Le Provost, C., Genco, M.L., Lyard, F., Vincent, P. y P. Canceil, 1994. Spectroscopy of the World ocean tides from a finite-element hydrodynamic model. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24777-24797.
- Le Provost, C., Bennett, A. y D. Cartwright, 1995. Ocean tide for and from TOPEX/POSEIDON. *Science.*, 267, 639-642.
- Le Provost, C., Lyard, F.H., Molines, J.M., Genco, M.L. y F. Rabilloud, 1998. A hydrodynamic ocean tide model improved by assimilating a satellite altimeter-derived data set. *J. Geophys. Res.*, 103, 5513-5529.
- Llambias, E.J., 2001. Geología de los cuerpos ígneos. *Inst. Sup. Correlación Geológica, ISSN 1514-4186*.
- Llanes, P., 2006. Estructura de la litosfera en el entorno de las Islas Canarias a partir del análisis gravimétrico e isostático: Implicaciones geodinámicas. *PhD. Tesis, Univ. Complutense de Madrid, 195pp*.
- Llubes, M., 1998. Sur les mares de charges océaniques es leur observation par gravimétrie et interférométrie radar. *PhD. Tesis, Toulouse*.
- Llubes, M. y P. Mazzega, 1997. Testing recent global ocean tide models with loading gravimetric data. *Prog. Oceanogr.*, 40, 369-383.
- Llubes, M. et al., 2008. Multi-technique monitoring of ocean tide loading in northern France. *C. R. Geoscience*, 340, 379-389.
- Logutov, O.G. y P.F.J. Lermusiaux, 2008. Inverse barotropic tidal estimation for regional ocean applications. *Ocean Modelling*, 25, 17-34.
- Longman, I.M., 1962. A Green's functions for determining the deformation of the Earth under surface mass loads (Theory). *J. Geophys. Res.*, 67 (2), 845-850.
- Longman, I.M., 1963. A Green's functions for determining the deformation of the Earth under surface mass loads (Computations and Numerical Results). *J. Geophys. Res.*, 68 (2), 485-496.
- López Casado, C., Sanz de Galdeano, C., Molina Palacios, S. y J. Henares Romero, 2001. The structure of the Alboran Sea: an interpretation from seismological and geological data. *Tectonophysics*, 338, 79-95.
- Love, A.E.H., 1909. The yielding of the Earth to disturbances forces. *Proc. R. Soc. London*, 82, 73-88.
- Love, A.E.H., 1911. Some problems of geodynamics. *Dover Publ., New York. (Cambridge Univ. Press, Cambridge)*
- Love, A.E.H., 1929. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* 228, 377.
- Love, A.E.H., 1944. Treatise on the mathematical theory of elasticity. 4<sup>th</sup> Ed., *Cambridge Univ. Press., New York*.
- Lozano, C.J. y J. Candela, 1995. The M<sub>2</sub> tide in the Mediterranean Sea: dynamic analysis and data assimilation. *Oceanol. Acta*, 18 (4), 419-441.
- Lu, X. y J. Zhang, 2006. Numerical study on spatially bottom friction coefficient of a 2D tidal model with adjoint method. *Cont. shelf Res.*, 26, 1905-1923.
- Lueck, R. G., and Y. Lu, 1997: The logarithmic layer in a tidal channel. *Contin. Shelf Res.*, 17, 1785-1801.
- Luenberger, D.G., 1969. Optimization by vector space methods. *John Wiley, New York*.
- Luetich, R.A. y J.J. Westerink, 1995. Continental Shelf Scale Convergence Studies with a Barotropic Tidal Model. *Quantitative Skill Assessment for Coastal Ocean Models. Coastal and Estuarine Studies*, 47, 349-371.
- Lyard, F., Lefevre, F., Letellier, T. y O. Francis, 2004. Modelling the global ocean tides: modern insights from FES2004. *Ocean Dynamics*, 56, 394-415.
- Lyard, F., Lefevre, F., Letellier, T. y O. Francis, 2006. Modelling the global ocean tides: modern insights from FES2004. *Ocean Dyn.*, 56, 394-415. doi 10.1007/s10236-006-0086-x.
- Lynch, D.R., 1983. Progress in hydrodynamic modelling, review of U.S. contributions, 1979-1982. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 21 (3), 741-754.

- Ma, X.C., Shum, C.K., Eanes, R.J. y B.D. Tapley, 1994. Determination of ocean tides from the first year of TOPEX/POSIDON altimeter measurements. *J. Geophys. Res.*, 99, 24809-24820.
- Maas, L.R. y A. Doelman, 2003. Chaotic tides. *J. Phys. Oceanogr.*, 32, 870-890.
- Madsen, P.A., Rugbjerg, M. e I.R. Warren, 1988. Subgrid Modelling in Depth Integrated Flows. *Proc. 21<sup>st</sup> Coastal Engineering Conference, ASCE, New York, N.Y., I*, 505-511.
- Mangiarotti, S., 2007. Coastal sea level trends from TOPEX-Poseidon satellite altimetry and tide gauge data in the Mediterranean Sea during 1990s. *Geophys. J. Int.*, 170, 132-144.
- Marchuk, G.I. y B.A. Kagan, 1989. Dynamics of ocean tides. (trans. by V. Divid, N. Protsenko e Y. Rajabov). *Dordrecht: Kluwer Acad.*
- Marcos, M., Wöppelmann, G., Bosch, W. y R. Savcenko, 2007. Decadal sea level trends in the Bay of Biscay from tide gauges, GPS and TOPEX. *J. Marine Systems*, 68, 529-536.
- Marquardt, D., 1963. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11 (2), 431-441.
- Martín, P.J., Smith, S.R., Posey, P.G., Dawson, G.M. y S.H. Riedlinger, 2009. Use of Oregon State University Tidal Inversion Software (OTIS) to generate improved tidal prediction in the East-Asian seas. *NSR Tech. Rept., Naval Research Laboratory, NRL/MR/730-09-9176*.
- Martínez, A., Pérez, E., Bruno, M. y G. Rodríguez, 1997. Análisis de los niveles del mar y de las corrientes de marea alrededor de la isla de Gran Canaria. *Bol. Inst. Esp. Oceanogr.*, 13 (1-2), 3-12.
- Mathews, P.M., 1998. Tidal models. *En: Ducarme, B. y P. Paquet, P. (Eds.), Ser. Geophys., Bruxelles, Proc. 13<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 253-259. *Obs. Roy. Belgique*.
- Mathews, P.M., 2001. Love numbers and gravimetric factor for diurnal tides. *Proc. 14<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, J. Geod. Soc. Japan*, 47 (1), 231-236.
- Matsumoto, K., Ooe, M., Sato, T. y J. Segewa, 1995. Ocean tide model obtained from TOPEX/POSEIDON altimetry data. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25319-25330.
- Matsumoto, K., Takanezawa, T. y M. Ooe, 2000. Ocean tide models developed by assimilating TOPEX/POSEIDON altimeter data into hydrodynamical model: A global model and a regional model around Japan. *J. Oceanogr.*, 56, 567-581.
- Matsumoto, K., Sato, T., Takanezawa, T. y M. Ooe, 2001. GOTIC2: A program for computation of oceanic tidal loading effect. *J. Geot. Soc. of Japan*, 47, NO. 1, 243-248.
- Mazzega, P., 1985.  $M_2$  model of the global ocean tide derived from SEASAT altimeter. *Mar. Geod.*, 9, 335-363.
- McCarthy, D.D. (Ed.), 1992. IERS Standards (1992). *IERS Techn. Note 13, Observatoire de Paris, Julio 1992*.
- McCarthy, D.D. y Petit G. (Eds.), 2003. IERS Conventions 2003. *IERS Techn. Note 32, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main*.
- McInerney, D.J., 2005. A triangular grid finite difference model for wind-induced circulation in shallow lakes. *PhD. Tesis, Univ. Adelaide*, 139pp.
- McIntosh, P.C. y A.F. Bennett, 1984. Open ocean modeling as an inverse problem:  $M_2$  tides in Bass Strait. *J. Phys. Oceanogr.*, 14, 601-614.
- McLaughlin, D., 1995. Recent developments in hydrologic data assimilation. *Rev. Geophys.*, 33, 977-984.
- Medialdea, T., 2004. Estructura y evolución tectónica del Golfo de Cádiz. *PhD. Tesis, Univ. Complutense de Madrid*.
- Melachroinos, S.A., Biancale, R., Llubes, M., Perosanz, E., Lyard, F., Vergnolle, M., Bouin, M.N., Masson, F., Nicolas, J., Morel, L. y S. Durand, 2008. Ocean tide loading (OTL) displacements from global and local grids: comparison to GPS estimates over the shelf of Brittany, France. *J. Geod.*, 82, 357-371. doi:10.1007/s001190-007-0185-6.
- Melchior, P., 1983. The Tides of the Planet Earth. *Pergamon Press, Oxford*.
- Melchior, P., 1994. A new data bank for tidal gravity measurements (DB 92). *Phys. Earth Planet. Inter.*, 82, 125-155.
- Melchior, P., 1995. A continuing discussion about the correlation of tidal gravity anomalies and heat flow densities. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 88, 223-256.
- Melchior, P. Moens, M. y B. Ducarme, 1980. Computations of tidal gravity loading and attraction effects. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 4 (5), 95-133.
- Melchior, P. y M. De Becker, 1983. A discussion of world-wide measurements of tidal gravity with respect to oceanic interactions, lithosphere heterogeneities, Earth's flattening and inertial forces. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 31, 27-53.



- Melchior, P., Ducarme, B., Van Ruymbeke, M., Poitevin, C. y M. De Becker, 1984. Interactions between oceanic and gravity tides, as analysed from world-wide Earth tide observations and ocean models. *Marine Geod. Res.*, 7, 77-91.
- Melchior, P. y O. Francis, 1996. Comparison of recent ocean tide models using ground based tidal gravity measurements. *Marine Geod.*, 19, 291-330.
- Merriam, J.B., 1980. The series computation of the gravitational perturbation due to an ocean tide. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 23, 81-86.
- Metivier, L., Greff-Lefftz, M. y M. Diament, 2005. A new approach to computing accurate gravity time variations for a realistic Earth model with lateral heterogeneities. *Geophys. J. Int.*, Vol., 162, 570-574.
- Milne, G.A. y J. Mitrovica, 1998. Postglacial sea-level change on a rotating Earth. *Geophys. J. Int.*, 133, 1-19.
- Mitrovica, J.X., Davis, J.L. e I.I. Shapiro, 1994. A spectral formalism for computing three-dimensional deformations due to surface loads. 1. Theory. *J. Geophys. Res.*, Vol., 99, 7057-7073.
- Mittelstaedt, E., 1991. The ocean boundary along the African coast. Circulation and oceanographic properties at the sea surface. *Prog. Oceanog.*, 26, 307-455.
- Moe, H. y A.O.B. Gjevik, 2002. A high resolution tidal model for the area around The Lofoten Islands, northern Norway. *Cont. Shelf Res.*, 22, 485-504.
- Molodenskii, M.S., 1953. Elastic tides, free nutation, and some questions of the earth structure (in Russian). *Tr. Geofiz. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 19 (146), 1-42.
- Montero, P., 1999. Estudio de la hidrodinámica de la ría de Vigo mediante un modelo de volúmenes finitos. *PhD. Tesis (1999), Univ. Santiago de Compostela*. 174pp.
- Montesinos, F.G., 2002. Inversión gravimétrica 3D por técnicas de evolución, Aplicación a la isla de Fuerteventura. *PhD. Tesis (1999), Univ. Complutense de Madrid., Cabildo de Fuerteventura (ed), Spain*.
- Moore, A.M., 1991. Data assimilation in a quasi-geostrophic open ocean model of the Gulf Stream region using the adjoint method. *J. Phys. Oceanog.*, 21, p. 398-427.
- Moritz, H., 1980. Advanced physical geodesy. *Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe*.
- Moritz, H. y Muller, I.I., 1988. Earth Rotation, Theory and Observation. *The Ungar Publ. Company*.
- Morrow, R. y P. De Mey, 1995. Adjoint assimilation of altimetric, surface drifter, and hydrographic data in a quasi-geostrophic model of the Azores Current. *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25007-25025.
- Mukai, A., Takemoto, S. T. Yamamoto, 2004. Fluid core resonance revealed from a laser extensometer at the Rokko-Takao station, Kobe, Japan. *Geophys. J. Int.*, 156 (1), 22-28.
- Munk, W.H. y D.E. Cartwright, 1966. Tidal spectroscopy and predictions. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 259 (1105), 533-581.
- Munk, W.H. y G.J. MacDonald, 1960. The rotation of the Earth: A geophysical discussion. *1st ed.*, 323 pp., *Cambridge Univ. Press., New York*.
- Nagasawa, K., (1979). Theoretical study on Earth Tides by assuming the Earth as a Visco-elastic body.
- Nerem, R.S. et al., 1994. Gravity model development for TOPEX/POSEIDON: Joint Gravity Models 1 and 2. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24421-24448.
- Neumeyer, J., del Pino, J., Dierks, O., Sun, H.P. y H. Pflug, 2005. Improvement of ocean loading correction on gravity data with additional tide gauge measurements. *J. Geodyn.*, 40, 104-111.
- Niebauer, T.M., Faller, J.E., Godwin, H.M., Hall, J.L. y R.L. Barager, 1986. Frequency stability measurements on polarization stabilized He-Ne Lasers. *Appl. Opt.*, 1285-1295.
- Niebauer, T.M., Sasagawa, G.S., Faller, J.E., Hilt, R. y F. Klopping, 1995. A New Generation of Absolute Gravimeters. *Metrologia*, 32 (3).
- Nishimura, G., 1932. On the deformation of a semi-infinite elastic body having a surface layer due to surface loading. *Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ.*, 10, 1.
- Nowick, A.S. y B.S. Berry, 1972. Anelastic relaxation in Crystalline Solids. *Acad. Press, London*.
- Okubo, S. y M. Saito, 1983. Partial derivative of Love numbers. *Bull. Geod.*, 57 (2), 167-179.
- Okubo, S. y D. Tsuji, 2001. Complex Green's function for diurnal y semidiurnal loading problems. *J. Geodetic Soc. Japan*, 47 (1), 225-230.
- OSPAR Commission, 2000. OSPAR Commission for the Protection of the Marine Environment of the North-East Atlantic. Quality Status Report 2000. Region IV Bay of Biscay and Iberian Coast. *Published by OSPAR Commission, London 2000. ISBN 0 946956 50 2*.
- Padman, L., Fricker, H.A., Coleman, R., Howard, S. y L. Erofeeva, 2002. A new tide model for the Antarctic Ice Shelves and Seas. *Ann. Glaciol.*, 34, 1-14.
- Padman, L., Erofeeva, S. e I. Joughin, 2003. Tides of the Ross Sea and Ross Ice Shelf cavity. *Antarctic Sci.*, 15 (1), 31-40.

- Pagiatakis, S.D., 1988. Ocean tide loading on a self-gravitating, compressible, layered, anisotropic, viscoelastic and rotating Earth with solid inner core and fluid outer core. *Surv. Engineering, Univ. New Brunswick. Tech. Rep.* 139.
- Pagiatakis, S.D., 1990. The response of a realistic Earth to ocean tide loading. *Geophys. J. Int.*, 103, 541-560.
- Pairaud, I.L., Lyard, F., Auclair, F., Letellier, T. y P. Marsaleix, 2008. Dynamics of semi-diurnal and quarter-diurnal internal tides in the Bay of Biscay. Part 1: Barotropic tides. *Cont. Shelf Res.*, 28, 1294-1315.
- Paiva, A.M., Chassignet, E.P. y A.J. Mariano, 2000. Numerical simulations of the North Atlantic subtropical gyre: sensitivity to boundary conditions. *Dyn. Atmos. Oceans*, 32, 209-237.
- Pálinkáš, V., 2006. Precise tidal measurements by spring gravimeters at the station Pecný. *J. of Geodyn.*, 41, 14-22.
- Parke, M.E., 1982.  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $N_2$  models of the global ocean tide on an elastic earth plus surface potential and spherical harmonic decompositions for  $M_2$ ,  $S_2$  and  $K_1$ . *Mar. Geod.*, 6, 35-81.
- Parke, M.E. y M.C. Hendershoot, 1980.  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  models for the global ocean tide on an elastic earth. *Marine Geodesy*, 3, 379-408.
- Parke, M.E., Stewart, R.H., Farless, D.L. y D.E. Cartwright, 1987. On the choice of orbits for an altimetric satellite to study ocean circulation and tides. *J. Geophys. Res.*, 92 (C11), 11693-11707.
- Parker, R.L., 1975. Understanding Inverse Theory. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 5, 35-64.
- Parker, B.B., 1991. The relative importance of the various nonlinear mechanisms in a wide range of tidal interactions (Rev.). En: B.B. Parker (Ed.), *Tidal Hydrodynamics*, 237-268. John Wiley and Sons.
- Parker, R.L., 1994. Geophysical Inverse Theory. Princeton Univ. Press., 386pp.
- Parker, R.L., Shure, L. Y J.A. Hildebran, 1987. The application of inverse theory to seamount magnetism. *Rev. Geophys.*, 25 (1), 17-40.
- Parzen, E., 1970. Statistical inference on time series by rkhs methods. En R. Pyke, ed., 'Proceedings 12th Biennial Seminar', Canadian Mathematical Congress, Montreal. 1-37.
- Pascual, J.R., 1987. La marea vertical y horizontal  $M_2$  en la ría de Arosa (Galicia, NW de España). *Rev. Geofís.*, 43, 57-64.
- Pedlosky, J., 1987. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York, 2d ed., 710pp.
- Pekeris, C.L. y H. Jarosch, 1958. The Free Oscillations of the Earth. En: *Contributions in Geophysics: In Honor of Beno Gutenberg*. London, Pergamon Press.
- Pekeris, C.L. e Y. Accad, 1961. Solution of Laplace's equations for the  $M_2$  tide in the world ocean. *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 265, 413-436.
- Peltier, W.R., 1974. The impulse response of a Maxwell earth. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 12, 649-669.
- Peltier, W.R., 1981. Ice Age Geodynamics. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 9, 199-225.
- Peltier, W.R., 1982. Dynamics of the Ice Age Earth. *Adv. Geophys.*, 24, 1-146.
- Penna, N.T. y T.F. Baker, 2002. Ocean tide loading considerations for GPS processing around Australia. *Geomatics Res. Australasia* (77), 1-26.
- Pérez, B., Álvarez, Lopez, J.D. e I. Rodríguez, 2002. IVg - Sea level monitoring and forecasting activities of Puertos del Estado. *IOC Workshop Rept. (176). Annex. IVg*, 35-38.
- Pretov, L. y C.P.Ma, 2003. Study of harmonic site position variations determined by very long baseline interferometry. *J. Geophys. Res.*, 108 (B4), 2190. doi:10.1029/2002JB001801.
- Pichon, A. y S. Correard, 2006. Internal tides modelling in the bay of Biscay. Comparisons with observations. *Sci. Mar.*, 70S1, 65-88.
- Picot, N., Case, K., Desai, S. y P. Vincent, 2003. AVISO and PODAAC User Handbook, IGDR and GDR Jason Products. *SMM-MU-M5-OP-13184-CN (AVISO), JPL D-21352 (PODAAC)*.
- Pinheiro, L.M., Wilson, R.C.L., Pena dos Reis, R., Whitmarsh, R.B. y A. Ribeiro, 1996. 1. The Western Iberia Margin: A Geophysical and Geological Overview. *Proc. Ocean Drilling Program, Scientific Results*, 149.
- Plag, H.P., 1985. Temporal variations of ocean tide. En: R. Vieira Sc. (Ed.), *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 595-608. CSIC.
- Plag, H.P. y T. van Dam, 2002. Solid Earth deformations and gravitational changes due to surface loading: Status and scientific problems. *IERS Workshop on Combination Res. Global Geophys. Fluids*.
- Pugh, D.T., 1987. Tides, Surges and Mean Sea-Level. A Handbook for Engineers and Scientists. John Wiley & Sons, New York, 472
- Ranalli, G., 1995. Rheology of the Earth. Chapman & Hall.
- Ratsimandresy, A.W., Sotillo, M.G., Álvarez, E., Carretero, J.C., Pérez, B. y H. Hajji, 2007. A 44-year (1958-2001) sea level residual forecast over the Mediterranean Basin. *J. Phys. Chem. Earth*, doi:10.1016/j.pce.2007.02.002.
- Ray, R.D., 1993. Global ocean tide models on the eve of TOPEX/POSEIDON. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 31 (2), 355-364.
- Ray, R.D., 1997. Spectral analysis of highly aliased sea-level signals. *J. Geophys. Res.*, 103, 24991-25003.

- Ray, R.D., 1998. Ocean self-attraction and loading in numerical tidal models. *Mar. Geod.*, 21, 181-192.
- Ray, R.D., 1999. A global ocean tide model from TOPEX/POSEIDON altimetry: GOT99.2. *NASA Tech. Memo* 209478, 58pp., Sept, 1999.
- Ray, R.D. y B.V. Sánchez, 1989. Radial deformation of the Earth by oceanic tidal loading. *NASA Techn. Memorandum* 100743, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 52 p.
- Ray, R.D. y D.E. Cartwright, 1994. Satellite altimeter observations of the M<sub>f</sub> and M<sub>m</sub> ocean tides, with simultaneous orbit corrections. *En: Gravimetry and Space Tech. Applied to Geodyn. and Ocean Dyn., Geophys. Monogr. Ser.*, 82. Ed. B.E. Schutz et al., 69-78.
- Ray, R.D., Eanes, R.J. y B.F. Chao, 1996. Detection of tidal dissipation in the solid Earth by satellite tracking and altimetry. *Nature*, 381, 595-597.
- Ray, R.D., Eanes, R.J., Egbert, G.D. y N.K. Pavlis, 2001. Error spectrum for the global M<sub>2</sub> ocean tide. *Geophys. Res. Lett.*, 28, 21-24.
- Ray, R.D. y G.D. Egbert, 2008. Tide corrections for coastal altimetry: Status and prospects. *IEEE International Geoscience & Remote Sensing Symposium, July 6-11, 2008, Boston, Massachusetts, U.S.A.*
- REDMAR, 2004, 2005. Red de Mareógrafos del Puertos del Estado, Informe anual 2004 (2005). *Área de medio físico y tecnología de las infraestructuras. Dirección de planificación y desarrollo portuario. Puertos del Estado.*
- Reichle, R.H., 2008. Data assimilation methods in the Earth Sciences. *Adv. Water Resources*, doi:10.1016/j.advwatres.2008.01.001.
- Reid, R.O., 1990. Tide and storm surges. *En: J.B. Herbich (Ed.), Handbook of Coastal and Ocean Engineering*, 11, 534-590.
- Riba, O., 1983. Las Islas Baleares en el marco geológico de la cuenca Mediterránea occidental durante el terciario. *En: El Terciario de las Baleares. Guía de las Excursiones del X congreso Nacional de Sedimentología. Menoría.*
- Riccardi, U., Berrino, G. y G. Corrado, 2002. Changes in instrumental sensitivity of some feedback systems used in LaCoste-Romberg gravimeters. *Metrologia*, 39, 509-515.
- Richter, B. y H.G. Wenzel, 1992. Precise instrumental phase lag determination by step response method. *Bull. d'Inf. Marées Terr.*, 111, 8032-8052.
- Robert, A., Henderson, J. y C. Turnbull, 1972. An implicit time integration scheme for baroclinic models of atmosphere. *Monthly Weather Rev.*, 100, 329-335.
- Robertson, R., Padman, L. y G.D. Egbert, 1998. Tides in the Weddell Sea. *Antarctic Res. Ser.*, 75, 341-369.
- Robinson, A.R. y P.F.J. Lermusiaux, 2001. Data assimilation in Models. *Encyclopaedia of Ocean Sciences, Acad. Press Ltd., London*, 623-634.
- Rodríguez-Velasco, 1999. Estudios sobre geoides terrestres y marinos. *PhD. Tesis, Univ. Complutense de Madrid.*
- Roed, L.P. y C.K. Cooper, 1986. Open boundary conditions in numerical ocean models. *En: J.J. O'Brien (Ed.), Adv. Phys. Oceanog. Numer. Modelling*, 186, NATO ASI Ser. C., 411-436.
- Rummel, R., 1993. Principle of satellite altimetry and elimination of radial orbit errors. *En: Springer Verlag (Ed.), Satellite altimetry in Geod. & Oceanog.*, 189-241.
- Rydelek, P.A., Zürn, W. Y J. Hinderer, 1991. On tidal gravity, heat flow and lateral heterogeneities. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 68, 215-229.
- Saastamoinen, J., 1972. Atmospheric correction for the troposphere and stratosphere in radio ranging of satellites. *En: Heriksen, S.W., Mansini, A. y B.H. Chovitz (Eds.), The use of artificial satellites for geodesy*, 247-251.
- Sánchez, P. y J.R. Pascual, 1988. Primeras experiencias en la modelización del Estrecho de Gibraltar. *En: Almazán, J.L., Bryden, H.L., Zinder, T.H. y G. Parrilla (Eds.), Seminario sobre la oceanografía física del Estrecho de Gibraltar. Escuela Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid*, 251-28.
- Sánchez, B.V., Ray, R.D. y D.E. Cartwright, 1992. A Proudman-function expansion of the M<sub>2</sub> tide in the Mediterranean Sea from satellite altimetry and coastal gauges. *Oceanol. Acta*, 15, 325-337.
- Sannino, G., A. Bargagli, y V. Artale, 2002. Numerical modeling of the mean exchange through the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 107 (C8), 3094, doi:10.1029/2001JC000929.
- Sannino, G., Bargagli, A. y V. Artale, 2004. Numerical modeling of the semidiurnal tidal Exchange through the strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 109, C05011.
- Sasaki, Y., 1970. Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Mon. Wea. Rev.* 98, 875-883.
- Sasao, T., Okubo, S. y M. Saito, 1980. Nutation and Earth Rotation. *En: Fedorov, Smith y Bender (Eds.), Proc. IAU Symp.* (78).
- Sato, T., Miura, S., Ohta, Y., Fujimoto, H., Sun, W., Larsen, C.F., Heavner, M., Kaufman, A.M. Freymueller, J.T., 2008. Earth tides observed by gravity and GPS in southeastern Alaska. *J. Geodyn.*, 46, 78-89.
- Sauvaget, P., David, E. y C.G. Soares, 2000. Modelling tidal currents on the coast of Portugal. *Coastal Engineering*, 40, 393-409.

- Savcenko, R. y W. Bosch, 2008. EOT08a – a new global ocean tide model derived by empirical analysis of multi-mission altimetry data. *Geophys. Res. Abst.*, 10, EGU2008-A-07470, 2008.
- Savcenko, R. y W. Bosch, 2008(b). EOT08a – empirical ocean tide model from multi-mission satellite altimetry. *DGFI Report* (81).
- Scharroo, R., Wakker, K.F. y G.J. Mets, 1994. The orbit determination accuracy from the ERS-1 mission. *Proc. 2<sup>nd</sup> ERS-1 Symposium: Space at the Service of our Environment, Eur. Space Spec. Publ., ESA-SP 361*, 735-740.
- Schenewerk, M.S., Marshall, J. y W. Dillinger, 2001. Vertical ocean loading deformations derived from a Global GPS Network. *J. Geodetic Soc. Japan*, 47 (1), 237-242.
- Scherneck, H. G., 1991. A parametrized solid Earth tide model and ocean tide loading effects for global geodetic base-line measurements, *Geophys. J. Int.*, 106, 677–694.
- Scherneck, H.G., 1996. Local site displacement due to ocean loading. *McCarthy D.D. (ed.). IERS Conventions IERS Techn. Notes* 21, 52-56.
- Scherneck, H.G., 2000. Ocean Loading Tides For, In, and From VLBI. *IVS 2000 General Meeting Proc.*
- Scherneck H-G, Haas R. y F.H. Webb, 1999. Ocean Loading Tides in Space Techniques and Implications for Mass Centre Variations. *En: Jonsson, B. (Ed.), Proc. 13<sup>th</sup> general meeting of the nordic geodetic comission, Gäule, Sweden*, 25–29. *LMV rapport: 12, National Land Surv. Sweden*, 1998.
- Schlax, M.G. y D.B. Chelton, 1994. Aliased tidal errors in TOPEX/POSEIDON sea surface height data. *J. Geophys. Res.*, 99, 24761-24776.
- Schrama, E.J.O., 2005. Three algorithms for the computation of tidal loading and their numerical accuracy. *J. Geod.*, 78, 707-714.
- Schrama, E.J.O. y R. Ray, 1994. A preliminary tidal analysis of TOPEX/POSEIDON altimetry. *J. Geophys. Res.*, 75, 24799-24808.
- Schuh, H. y L. Moehlmann, 1989. Ocean loading station displacements observed by VLBI. *Geophys. Res. Lett.*, 16, 1105-1108.
- Schuh, H. y R. Haas, 1998. Earth tides in VLBI observations. *En: B. Ducarme, B. y P. Paquet, P. (Eds.), Proc. Int. Symp. Earth Tides, Brussels, Belgium*, 101–110.
- Schwiderski, E.W., 1978. Global ocean tides. Part I: a detailed hydrodynamical interpolation method. *NSWC Tech. Rept., Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, VA*.
- Schwiderski, E.W., 1980. Ocean tides, part I: Global ocean tidal equations. *Marine Geod.*, 3, 161-217.
- Schwiderski, E.W., 1980(b). Ocean tides, part II: A hydrographical interpolation model. *Marine Geod.*, 3, 219-255.
- Schwiderski, E.W., 1980(c). On charting Global Ocean Tides. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 18 (1), 243-263.
- Schwiderski, E.W., 1983. Atlas of ocean tidal maps and charts I: the semidiurnal principal lunar tide  $M_2$ . *Marine Geod.*, 6, 219-265.
- Schwiderski, E.W., 1984. Combined hydrodynamical and empirical modeling of ocean tides. *Marine Geophys. Res.*, 7, 215-229.
- SCOR, 1975. Report of SCOR working group 27. An intercomparison of open sea tidal pressure sensors. *Unesco Techn. Paper in Marine Sci.*, 21, Unesco, Paris.
- Sebastião, P., Guedes Soares, C. y E. Álvarez, 2008. 44 years hindcast of sea level in the Atlantic Coast of Europe. *Coastal Engineering*, 55 (11), 843-848.
- Sevilla, M.J., 1989. Teoría de Mareas Terrestres. *V Curso de Geod. Superior. Cursos y Seminarios del Instituto de Astronomía y Geodesia* (4), 87-202.
- Shum, C.K., Woodworth, P.L., Andersen, O.B., Egbert, G.D., Francis, O., King, C., Klosko, S.M., Le Provost, C., Li, X., Molines, J.M., Parke, M.E., Ray, R.D., Schlax, M.L., Stammer, D., Tierney, C.C., Vincent, P. y C.I. Wunch, 1997. Accuracy assessment of recent ocean tide models. *J. Geophys. Res.*, 102 (C11), 25173-25194.
- Slichter, L.B. y M. Caputo, 1960. Deformation of an earth model by surface pressures. *J. Geophys. Res.*, 65, 4151-4156.
- Smagorinsky, J., 1963. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91pp.
- Smith, A.J.E., 1999. Application of Satellite Altimetry for Global Ocean Tide Modeling. *PhD. Tesis, Delf Univ. press, Delf, The Netherlands*, 182pp.
- Smith, A.E.J., Hesper, E.T., Kuijper, D.C., Mets, G.J., Visser, P.N.A.M., Ambrosius, B.A.C. y K.F. Wakker, 1994. TOPEX/POSEIDON data analysis study. *Final Rept., ESOC control 10261/92/D/CS, Fac. Aerospace Engineering, Delf Univ. Tecnology, Delf, The Netherlands*.
- Smith, W.H.F. y D.T. Sandwell, 1997. Global sea floor topography from satellite altimetry and ship depth soundings. *Science*, 227, 1956-1962.

- Smithson, M.J. 1992. IAPSO, Publication Scientifique (35), 1992. Pelagic Tidal Constant 3. *Publ. by The Int. Assoc. Phys. Sci. of the Ocean (IAPSO) of the Int. Union of Geod. and Geophys.*
- Somigliana-Bacchialoni, R.; Spallanzani, G., 1976. Tidal wave propagation prediction in shallow waters by numerical methods. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 1, 163-180.
- Sovers, O.J., 1995. Vertical ocean loading amplitudes, from VLBI measurements. *Geophys. Res. Lett.*, 21 (5), 357-360.
- Stoneley, R., 1926. The elastic yielding of the Earth. *Mon. Notic. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl.*, 1, 356.
- Sun, H.P., 1995. Static deformation and gravity changes at the Earth's surface due to the atmospheric pressure. *PhD. Tesis, Univ. Chatolique Louvain La Neuve, Belgique*, 280pp.
- Sun, W. y L.E. Sjöberg, 1998. Gravitational potential changes of a spherically symmetric Earth model caused by a surface load. *Phys. Chem. Earth*, 23 (1), 47-52.
- Sun, H.P., Hsu, H.T., Jentzsch, G. y J. Xu, 2002. Tidal gravity observations obtained with a superconducting gravimeter at Wuhan/China and its application to geodynamics. *J. Geodyn.*, 33, 187-198.
- Sun, H.P., Ducarme, B., Houze, X., Leslie, V. y X. Jianpiao, 2005. Adaptability of ocean and earth tidal models based on global observations of the superconducting gravimeters. *Sci. China Ser. The Earth Science*, 48 (11), 1859-1869.
- Suriñach, E., y R.E. Chávez, 1996. A 3D Gravimetric Crustal Model for the northeastern region of the Iberian Peninsula. *Geophys. Res. Lett.*, 23 (18), 2457-2460.
- Swarztrauber, P.N., 1979. On the spectral approximation of discrete scalar and vector functions on the sphere. *HAM J. Numer. Anal.*, 16, 934-949.
- Swinbank, R., Shutyaev, V. y W.A. Lahoz, 2003. Data assimilation for the Earth system. *NATO Sci. Ser. IV* (26), Kluwer Acad. Publishers, Boston, 377pp.
- Taboada, R., 2006. Modelos de aguas poco profundas obtenidos mediante la técnica de desarrollos asintóticos. *PhD. Tesis, Universidade Da Coruña*. 466pp.
- Takeuchi, H., 1950. On the earth tide of the compressible earth of variable density and elasticity. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 31, 651-689.
- Takeuchi, H., Saito, N. y N. Kobayashi, 1962. Statistical deformations and free oscillations of a model earth. *J. Geophys. Res.*, 67, 1141-1154.
- Talagrand, O. y P. Courtier, 1987. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation, I, Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113, 1311-1328.
- Tamura, Y. 1987. A harmonic development of the tide-generating potential. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 99, 6813-6855.
- Tamura, Y., Sato, T., Fukuda, Y. y T. Higashi, 2005. Scale factor calibration of a superconducting gravimeter at Esashi station, using absolute gravity measurement. *J. Geod.*, 78, 481-488.
- Tapley, B.D., Ries, J.C., Davis, G.W., Eanes, R.J., Schutz, B.E., Shum, C.K., Watkins, M.M., Marshall, J.A., Nerem, R.S., Putney, B.H., Klosko, S.M., Luthcke, S.B., Pavlis, D., Williamson, R.G. y N.P. Zelensky, 1994. Precision orbit determination for TOPEX/POSEIDON. *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24383-24404.
- Tapley, B.D., et al., 1996. The Joint Gravity Model 3. *J. Geophys. Res.*, 101 (B12), 28029-28049.
- Tapley, B.D., Bettadpur, S., Watkins, M. y C. Reigber, 2004. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results. *Geophys. Res. Lett.*, 31, L09607, doi:10.1029/2004GL19920.
- Tarantola, A., 1987. Inverse problem theory: Methods for data fitting and model parameter estimation. *Elsevier, New Cork*, 613pp.
- Tarantola, A. y B. Valette, 1982. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20 (2), 219-232.
- Tejedor, L., Izquierdo, A., Sein, D.V. y B.A. Kagan, 1998. Tides and tidal energetics of the Strait of Gibraltar: a modelling approach. *Tectonophysics*, 294, 333-347.
- Tejedor, L., Izquierdo, A., Kagan, B.A. y D.V. Sein, 1999. Simulation of semidiurnal tides in the Strait of Gibraltar. *J. Geophys. Res.*, 104 (C6), 13541-13557.
- Tejera, A., 1996. Estudio de estructuras oceanográficas mesoescalares en la cuenca canaria mediante los altímetros de los satélites GEOSAT, ERS-1 y TOPEX/Poseidon. *PhD. Tesis, Univ. Palmas de Gran Canaria*.
- Terazawa, K., 1916. On periodic disturbance of level arising from the load of neighbouring oceanic tides. *Proc. Lond. Phil. Soc.*, 217, 35-50.
- Thacker, W.C. y R.B. Long, 1988. Fitting dynamics to data. *J. Geophys. Res.*, 93, 1227-1240.
- Thomas, I.D., King, M.A. y P.J. Clarke, 2007. A comparison of GPS, VLBI and model estimates of ocean tide loading displacements. *J. Geod.*, 81, 359-368.
- Timofeev, V.Y., van Ruymbeke, M., Woppelmann, G., Evaraerts, M., Zapreeva, E.A., Gornov, P.Y. y B. Ducarme, 2006. Tidal gravity observations in Eastern Liberia and along the Atlantic coast of France. *J. Geodyn.*, 41, 30-38.

- de Toro, C., 1989. Determinación y evaluación de las variaciones periódicas de la gravedad y de las desviaciones de la vertical en la Península Ibérica producidas por las mareas oceánicas. *PhD. Tesis, Univ. Compl. Madrid*, 378pp.
- de Toro, C., Vieira, R. y M.J. Sevilla, 1993. Ocean tide models of  $M_2$  and  $S_2$  constituents for the Western and Central Mediterranean Sea. *Mare Nostrum 3. DIIAR, Politecnico di Milano*, 102-125.
- de Toro, C., Vieira, R., Hernandez, C., Venediov, A.P. y J. Arnosó, 1995. Tidal models of the Mediterranean Sea. *Proc. 12<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 511-528. *Sci. Press, Beijing, China*.
- Tromp, J. y J.X. Mitrovica, 1999. Surface loading of a viscoelastic Earth: I. General theory. *Geophys. J. Int.*, 137, 847-855.
- Tsimplis, M., Proctor, R. y R. Flather, 1995. A two dimensional tidal model for the Mediterranean Sea. *J. Geophys. Res.*, 100 (C8), 16233-16239.
- Tuckey, B.J., Gibbs, M.T., Knight, B.R., y P.A. Gillespie, 2006. Tidal circulation in Tasman and Golden Bays: implications for river plume behavior. *New Zeland J. Marine and Freshwater Res.*, 40, 305-324.
- Ullman, D.S. y E.W. Robert, 1998. Model parameter estimation from data assimilation modelling: temporal and spatial variability of the bottom drag coefficient. *J. Geophys. Res.*, 103, 5531-5549.
- Urschl, C., Gurtner, W., Hugentobler, U., Schaer, S. y G. Beutler, 2005. Validation of GNSS orbits using SLR observations. *Adv. Space Res.*, 36 (3), 412-417.
- van Camp, M. y P. Vauterin, 2005. Tsoft: graphical and interactive software for the analysis of time series and Earth tides. *Computers & Geosciences*, 31(5), 631-640.
- van Dam, T., Plag, H.P., Francis, O. y P. Gegout, 2003. GGFC Special Bureau for Loading: Current status and plans. *IERS Techn. Note 30, Richter (ed.)*, ISBN 3-89888-877-0, 180-198.
- van der Wall, W., 2003. Geoid Anomalies due to Low-Viscosity Zones in Glacial Isostatic Adjustment Modeling. *PhD. Thesis, Delft Univer. Technol., The Netherlands*, 91pp.
- van Ruymbeke, M., 1985. Transformation of nine LaCoste-Romberg gravimeters in feedback system. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 93, 6202-6228.
- van Ruymbeke, M., Somerhausen, A., Blanchot, G., Claes, A. y N. Grammatica, 1995. New developments with gravimeters. *En: Proceedings of 12<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Beijing, August 4-7, 1993. Sciences Press, Beijing/New York*, 89-102.
- Vargas, J.M., 2004. Fluctuaciones Subinerciales y Estado Hidráulico del Intercambio a través del Estrecho de Gibraltar. *PhD. Tesis, Univ. De Sevilla*, 233pp.
- Venedikov, A.P., Arnosó, J. y R. Vieira, 2001. Program VAV/2000 for tidal analysis of unevenly spaced data with irregular drift and colored noise. *J. Geodetic. Soc. Japan*, 47 (1), 281-286.
- Venedikov, A.P., Arnosó, J. y R. Vieira, 2003. VAV: a program for tidal data processing. *Comput. Geosci.*, 29, 487-502.
- Venedikov, A.P., Arnosó, J. y R. Vieira, 2005. New version of program VAV for tidal data processing. *Comput. Geosci.*, 31, 667-669.
- Venedikov, A.P., Arnosó, J., Cai, W., Vieira, R., Tan, S. y Vélez, E.J., 2005. Separation of long-term thermal effects from strain measurements in the Geodynamics Laboratory of Lanzarote. *J. Geodyn.*, 41, 213-220. doi:10.1016/j.jog.2005.08.029.
- Vieira, R., 1978. Mareas Terrestres. *Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM), Madrid, Publ. (101)*.
- Vieira, R., 1981. La microrred de mareas gravimétricas del Sistema Central. *Univ. Complutense de Madrid, Fac. Matemáticas, Madrid, Seminario de Astronomía y Geodesia, Publ. (118)*, 97-100.
- Vieira, R., 1984. Investigaciones sobre mareas terrestres en la Península Ibérica. Aplicaciones geodésicas, geofísicas y oceanográficas. *PhD. Tesis, Univ. Complutense de Madrid*.
- Vieira, R. y Torroja, 1983. A possible contribution of the gravimetric tides to study of discontinuities of the Earth crust. *En: J.T. Kuo (Ed.), Proc. 9<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, New York City, August 17-22, 1981*, 669-672. *E. Schweizerbart'she Verlag*.
- Vieira, R., de Toro, C. y P.K. Sukhwani, 1983. Ocean effects on gravity tides in the Iberian Peninsula. *En: J.T. Kuo (Ed.), Proc. 9<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, New York City, August 17-22, 1981*, 431-436. *E. Schweizerbart'she Verlag*.
- Vieira, R., de Toro, C. y E. Megias, 1986. Ocean Tides in the Nearby of the Iberian Peninsula. Part I:  $M_2$  Iberian Map. *En: R. Vieira Sc. (Ed.), Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 679-696, CSIC.
- Vieira, R., de Toro, C. y J. Fernández, 1986(b). Ocean Tides in the Nearby of the Iberian Peninsula. Part II:  $S_2$  Iberian Map. *En: R. Vieira Sc. (Ed.), Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 697-707. CSIC.
- Vieira, R., Torroja, J.M. y C. de Toro, 1986(c). A general discussion about normalization of gravimeters in the Iberian gravity tide profile. *En: R. Vieira (Ed.), Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 165-175. CSIC.
- Vieira, R. y A.G. Camacho, 1988. Cálculo de la corrección de marea en la Península Ibérica. *Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM), Madrid, Publ. (161)*.

- Vieira, R., Van Ruymbeke, M., Fernández, J., Toro, C., 1991(a). The Lanzarote Underground Laboratory. *Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie* 4, 71-86.
- Vieira, R., Fernandez, J., de Toro, C. y A.G. Camacho, 1991(b). Structural and oceanic effects in the gravimetric tides observations in Lanzarote (Canary Islands). *En: J. Kakkuri Sc. (Ed.), Proc. 11<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Helsinki 1989*, 217-230. *Schweizerbart'sche Verlag. Stuttgart*.
- Vieira, R. y C. de Toro, 1992. Ocean Tide charts in the Mediterranean Sea. *Mare Nostrum* 2. *Ed. by M.J. Sevilla. Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid*, 55-74.
- Vieira, R., Camacho, A.G., Toro, C. and F.G. Montesinos, 1992. A calibration gravimetric lines between Madrid and Valle de los Caídos stations. *Comptes Rendus J.L.G. Conseil Europe*, 73, 18-25.
- Vieira, R. Camacho, A.G., Toro, C., Montesinos, F.G., Arnoso, J. and J. Makinen, 1994. Línea de calibración Madrid-Valle. Observaciones de gravedad absolutas. *Conf. Inter. Geod. & Cartografía. Maracaibo (Venezuela)*, I, 275-286, ISBN: 84-87.488-05-6.
- Vieira, R., Camacho, A.G., y E. Ortiz, 2002. Global adjustment for the gravity calibration line Madrid-Valle de los Caídos. *Física de la Tierra*, 14, 127-159. ISSN: 0214-4557.
- Vincent, P. y C. Le Provost, 1988. Semidiurnal tides in the Northeast Atlantic from finite element numerical model. *J. Geophys. Res.*, 93 (C1), 543-555.
- Vincent P. y Canceil P., 1993. Barotropic tides in the Mediterranean Sea from a finite element numerical model. *Int. Geoid service bulletin*, 84-90, DIIAR. Politecnico Milano. Italy.
- Wahba, G., 1990. Spline Models for Observational Data. *SIAM. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 59.
- Wahba, G. y J. Wendelberger, 1980. Some new mathematical methods for variational objective analysis using splines and cross validation. *Monthly Weather Rev.*, 108, 1122-1143.
- Wahr, J.M., 1981. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 64, 677-703.
- Wahr, J.M., 1981(b). A normal mode expansion for forced response of rotating Earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 64, 651-675.
- Wahr, J.M., 1985. Deformations induced by polar motion. *J. Geophys. Res.*, 90 (B11), 9363-9368.
- Wahr, J.M., 1988. The Earth rotation. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 16, 231-249.
- Wahr, J.M. y Z. Bergen, 1986. The effect of the mantle anelasticity on nutations, earth tides, and tidal variations in rotation rate. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 87, 633-668.
- Wang, D.P., 1989. Model of mean and tidal flows in the Strait of Gibraltar. *Deep Sea Res.*, 36 (10), 1535-1548.
- Wang, D.P., 1993. The Strait of Gibraltar model: internal tide, diurnal inequality and fortnightly modulation. *Deep Sea Res.*, 40, 1187-1203.
- Wang, R., 1991. Tidal deformations on a rotating, spherically asymmetric, visco-elastic and laterally heterogeneous Earth. *PhD. Tesis, European Univ. Studies, Ser. XVII, Earth Sci.*, 5. *Franfurt am Main*.
- Wang, R., 1994. Effect of rotation and ellipticity on Earth tides. *Geophys. J. Int.*, 117, 562-565.
- Wang, Y., 2004. Ocean tide modelling in the southern ocean. *Dept. Civil and Environmental Engineering and Geodetic Sci. Rept. (471), The Ohio State Univ., Columbus, Ohio*.
- Wendt, A., Dietrich, R., Wendt, J., Fritsche, M., Lukin, V., Yuskevich, A., Kokhanov, A., Senatorov, A., Shibuya, K. y K. Doi, 2005. The response of the subglacial Lake Vostok, Antartica, to tidal and atmospheric pressure forcing. *Geophys. J. Int.*, 161, 41-49.
- Wenzel, H.-G., 1995. The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bull. Inf. Mar. Terr.*, 124, 9425-9439.
- Wessel, P. y W.H.F. Smith, 1996. A global, self-consistent, hierarchical, high resolution shoreline database. *J. Geophys. Res.*, 101 (B4), 8741-8743.
- Widmer, R., Masters, G. y F. Gilbert, 1991. Spherically symmetric attenuation within the Earth from normal mode data. *Geophys. J. Int.*, 104, 541-553.
- Wihlem, H., 1977. Influence of upper mantle structure on Earth tides. *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides*, 774-786.
- Wilcox, D., 2002. Turbulence modelling for CFD. *DCW Industries, Inc., La Cañada, California*.
- Witter, D.L. y D.B. Chelton, 1991. An apparent wave height dependence in the Sea-State Bias in GEOSAT altimeter range. *J. Geophys. Res.*, 96, 8861-8868.
- Woodworth, P.L., 1985. Accuracy of existing ocean tide models. *Conf. on the use of Satellite Data in Ulimatte Models, ESA SP2Jd, Alpbach, Austria*.
- Wöppelmann, G., 2004. SONEL: Système d'Observation du Niveau des Eaux Littorales. *Actes de l'atelier Expérimentation et Instrumentation IFREMER, INSU, Météo-France, Paris*, 23-24 mars 2004, 6

- Wöppelmann, G., Zerbini, S. y M. Marcos, 2006. Tide gauges and geodesy: a secular synergy illustrated by three present-day case studies. *C.R. Geoscience*, 338, 980-991.
- Wunsch, C. 1972. Bermuda sea level in relation to tides, weather and baroclinic fluctuations. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10, 1-49.
- Wunsch, C. 1996. The ocean circulation inverse problem. *Cambridge Univ. Press, New York*, 442pp.
- Wunsch, C., Haidvogel, D.B., Iskandarani, M. y R. Hughes, 1997. Dynamics of the long period tides. *Prog. Oceanog.*, 40, 81-108.
- Xian-qing, L., Zi-ku, W., Yi, G. y T. Ji-wei, 2004. Study of the adjoint method in data assimilation and the related problems. *Applied Mathematics and Mechanics, English Edition*, 25 (6), 636-646.
- Ye, S., Canales, J.P., Rihm, R., Dañobeitia, J.J. y J. Gallart, 1999. A crustal transect through the northeastern part of the volcanic edifice of Gran Canaria, Canary Islands. *Geodynamics*, 28, 3-26.
- Yosida, K., 1980. Functionals Analysis. 6<sup>th</sup> Ed., *Springer-Verlag, Berlin*, 500pp.
- Zahel, W., 1973. The diurnal K1 tide in the world ocean. A numerical investigation. *Pure Appl. Geophys.*, 109, 1819-1825.
- Zahel, W., 1977. A global hydrodynamical numerical 1° model of the ocean tides; the oscillations system of the M<sub>2</sub> tide and its distribution of energy dissipation. *Ann. Geophys.*, 33, fas.1/2, 31.
- Zahel, W., 1978. The influence of solid Earth deformations on semi-diurnal ocean tides. En: Brosche, P. y J. Suendermann (Eds.), *Tidal friction and the Earth's rotation*, 31. Springer, Berlin.
- Zahel, W., 1990. Mathematical Modelling of Global Interaction between Ocean Tides and Earth Tides. *Phys. Earth Planet. Int.*, 21, 202—217.
- Zahel, W., 1991. Modeling ocean tides with and without assimilating data. *J. Geophys. Res.*, 96, 20379-20391.
- Zahrán, K.H., Jentzsch, G. y G. Seeber, 2005. World-wide synthetic tide parameters for gravity and vertical and horizontal displacements. *J. Geod.*, 79, 293-299, doi:10.1007/s00190-005-0460-3.
- Zahrán, K.H., Jentzsch, G. y G. Seeber, 2006. Accuracy assessment of ocean tide loading computations for precise geodetic observations. *J. Geodyn.*, 42 (4-5), 159-174.
- Zaron, E.D., 2006. A Comparison of Data Assimilation Methods Using a Planetary Geostrophic Model. *Monthly Weather Rev.*, 134, 1316-1328.
- Zaron, E.D. y G.D. Egbert, 2006. Verification studies for a z-coordinate primitive-equation model: Tidal conversion at a mid-ocean ridge. *Ocean Modelling*, 14, 257-278. doi:10.1016/j.ocemod.2006.05.007.
- Zerbini, S., Negusini, M., Romagnoli, C., Domenichini, F., Richter, B. y D. Simon, 2002. Multi-parameter Continuous Observations to Detect Ground Deformations and to Study Environmental Variability Impacts. *Global Planet. Change*, 34, 37-58.
- Zhang, A., Wei, E. y B.B. Parker, 2003. Optimal estimation of tidal open boundary conditions using predicted tides and adjoint data assimilation technique. *Cont. Shelf Res.*, 23, 1055-1070.
- Zhang, H.W., Xu, H.Z. y X.H. Zhou, 2004. A theoretical research of the influence of ocean loading tide on the time variation of gravitational field. *Chinese Astr. Astrophys.*, 28, 348-355.
- Zhou, J.C. y H.P. Sun, 1995. Influence of the modified global ocean tide model with local tides of East and South China Seas on load gravity in China and its neighbour area. *Acta Seismol. Sinica*, 18 (3), 354-360.
- Zschau, J., 1977. Phase shifts of tidal sea load deformation of the Earth's surface due to low viscosity layers in the interior. En: Bonatz, M. y P. Melchior (Eds.), *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Institut für Theoretische Geodäsie der Univ. Bonn, FRG*, 372-398. Bonn FRG Sept. 19-24.
- Zschau, J., 1978. Tidal friction in the solid Earth: loading tides versus body tides. En: Brosche, P. y J. Sundermann (Eds.), *Tidal Friction and Earth Rotation*, 62-94. Springer Verlag, Berlin.
- Zschau, J., 1986. Tidal friction in the solid Earth as deduced from the Chandler Wobble period. En: R. Vieira (Ed.), *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 433-448. CSIC.
- Zschau, J. y R. Wang, 1986. Imperfect elasticity in the earth's mantle: implications for earth tides and long period deformations. En: R. Vieira (Ed.), *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Symp. Earth Tides, Madrid 1985*, 379-384. CSIC.
- Zumberge, M.A., Rinker, R.L. y J.E. Faller, 1982. A portable apparatus for absolute measurements of the Earth's gravity field. *Metrologia*, 18, 145-152.
- Zürn, W., 1997. Earth Tide Observations and Interpretation. En: Wilheml, H., Zürn, W. y Wenzel, H.G. (Eds.), *Tidal Phenomena*, 66, 77-94. Lecture Notes in Earth Science, Springer, Berlin.





# Apéndice 1

## A. Operadores Diferenciales

### A.1 Operadores Vectoriales en Coordenadas Rectangulares

Sean  $(x, y, z)$  un sistema de coordenadas rectangulares,  $f = f(x, y, z)$  una función escalar y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$  una función vectorial dada por  $\mathbf{u} = u_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + u_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + u_z(x, y, z)\mathbf{e}_z$ , siendo  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  y  $\mathbf{e}_z$  los vectores base unitarios. Se definen los siguientes operadores:

Gradiente de una Función Escalar:

$$\nabla f = \mathbf{e}_x \partial f / \partial x + \mathbf{e}_y \partial f / \partial y + \mathbf{e}_z \partial f / \partial z = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z) \quad [\text{A.1}]$$

Laplaciano de una Función Escalar:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2 \quad [\text{A.2}]$$

Gradiente de una Función Vectorial:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_x / \partial x & \partial u_y / \partial x & \partial u_z / \partial x \\ \partial u_x / \partial y & \partial u_y / \partial y & \partial u_z / \partial y \\ \partial u_x / \partial z & \partial u_y / \partial z & \partial u_z / \partial z \end{pmatrix} \quad [\text{A.3}]$$

Divergencia de una Función Vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z \quad [\text{A.4}]$$

Rotacional de una Función Vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{u} = [\partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z] \mathbf{e}_x + [\partial u_x / \partial z - \partial u_z / \partial x] \mathbf{e}_y + [\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y] \mathbf{e}_z \quad [\text{A.5}]$$

Laplaciano de una Función Vectorial:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{e}_x \nabla^2 u_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 u_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 u_z = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \\ &= \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad [\text{A.6}]$$

### A.2 Operadores Vectoriales en Coordenadas Esféricas

Sean  $(r, \theta, \lambda)$  un sistema de coordenadas esféricas (Fig. A.1),  $f = f(r, \theta, \lambda)$  una función escalar y  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, \lambda)$  una función vectorial dada por  $\mathbf{u} = u_r(r, \theta, \lambda)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta, \lambda)\mathbf{e}_\theta + u_\lambda(r, \theta, \lambda)\mathbf{e}_\lambda$ , con  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\lambda$  los vectores base unitarios. Se definen los siguientes operadores:

Gradiente de una Función Escalar:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda \\ \nabla_\psi &\equiv \mathbf{e}_\theta \partial / \partial \theta + \mathbf{e}_\lambda (1 / \sin \theta) \partial / \partial \lambda \end{aligned} \quad [\text{A.7}]$$

Laplaciano de una Función Escalar:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \quad [\text{A.8}]$$

Gradiente de una Función Vectorial:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} (\nabla \mathbf{u})_{rr} & (\nabla \mathbf{u})_{r\theta} & (\nabla \mathbf{u})_{r\lambda} \\ (\nabla \mathbf{u})_{\theta r} & (\nabla \mathbf{u})_{\theta\theta} & (\nabla \mathbf{u})_{\theta\lambda} \\ (\nabla \mathbf{u})_{\lambda r} & (\nabla \mathbf{u})_{\lambda\theta} & (\nabla \mathbf{u})_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda \cos \theta}{r \sin \theta} \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad [\text{A.9}]$$

Divergencia de una Función Vectorial:

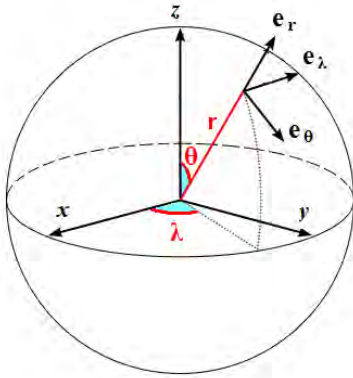
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = (1/r^2) \partial(r^2 u_r) / \partial r + (1/r \sin \theta) \partial(u_\theta \sin \theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) \partial u_\lambda / \partial \lambda \quad [\text{A.10}]$$

Rotacional de una Función Vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{\partial (r u_\lambda)}{\partial r^2} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\lambda \quad [\text{A.11}]$$

Laplaciano de una Función Vectorial:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = & \left[ \nabla^2 u_r - (2/r^2) (u_r + \cot \theta u_\theta + \operatorname{cosec} \theta (\partial u_\lambda / \partial \lambda) + \partial u_\theta / \partial \theta) \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \left[ \nabla^2 u_\theta - (1/r^2) (\operatorname{cosec}^2 \theta u_\theta - 2(\partial u_r / \partial \theta) + 2 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta (\partial u_\lambda / \partial \lambda)) \right] \mathbf{e}_\theta + \\ & + \left[ \nabla^2 u_\lambda - (1/r^2) (\operatorname{cosec}^2 \theta u_\lambda - 2 \operatorname{cosec} \theta (\partial u_r / \partial \lambda) - 2 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta (\partial u_\theta / \partial \lambda)) \right] \mathbf{e}_\lambda. \end{aligned} \quad [\text{A.12}]$$



**FIGURA A.1:**

Sistema de coordenadas esféricas ( $r, \theta, \lambda$ ).

## A.3 Tensores de Deformación y de Esfuerzo Elástico

Tensor de Deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1/2) \left[ \nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T \right] \quad [\text{A.13}]$$

En coordenadas cartesianas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \partial u_x / \partial x & (1/2)(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) & (1/2)(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) \\ (1/2)(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) & \partial u_y / \partial y & (1/2)(\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) \\ (1/2)(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) & (1/2)(\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) & \partial u_z / \partial z \end{pmatrix} \quad [\text{A.14}]$$

En coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 2\varepsilon_{r\lambda} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda}{r} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \\ 2\varepsilon_{\theta r} = 2\varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & 2\varepsilon_{\theta\lambda} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda}{r \tan \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} \\ 2\varepsilon_{\lambda r} = 2\varepsilon_{r\lambda} & 2\varepsilon_{\lambda\theta} = 2\varepsilon_{\theta\lambda} & \varepsilon_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r \tan \theta} \end{pmatrix} \quad [\text{A.15}]$$

El primer invariante del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , que representa el cambio de volumen o dilatación, es

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &\equiv \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\lambda\lambda} = \\ &= \partial u_r / \partial r + 2u_r / r + (1/r) \partial u_\theta / \partial \theta + u_\theta \cos \theta / r \sin \theta + (1/r \sin \theta) \partial u_\lambda / \partial \lambda = \\ &= (1/r^2) \partial (r^2 u_r) / \partial r + (1/r \sin \theta) \partial (u_\theta \sin \theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) \partial u_\lambda / \partial \lambda = \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad [\text{A.16}]$$

Tensor de Esfuerzo Elástico: Definido por la relación constitutiva elástica (Ranalli, 1995)

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda D\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad [\text{A.17}]$$

En coordenadas cartesianas

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad [\text{A.18}]$$

En coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \tau_{r\lambda} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\lambda}{r} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \right) \\ \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \tau_{\theta\lambda} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} - \frac{u_\lambda}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} \right) \\ \tau_{\lambda r} = \tau_{r\lambda} & \tau_{\lambda\theta} = \tau_{\theta\lambda} & \tau_{\lambda\lambda} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \right) \end{pmatrix} \quad [\text{A.19}]$$

con  $\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} = \lambda (2u_r / r + \partial u_r / \partial r + (1/r) \partial u_\theta / \partial \theta + u_\theta \cot \theta / r + (1/r \sin \theta) \partial u_\lambda / \partial \lambda)$ .

Divergencia del Tensor de Esfuerzo (Vector de Tensiones de Contacto):

En coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \quad [\text{A.20}]$$

En coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \left[ (1/r^2 \sin \theta) \left( \partial (r^2 \sin \theta \tau_{rr}) / \partial r + \partial (r \sin \theta \tau_{\theta r}) / \partial \theta + \partial (r \tau_{\lambda r}) / \partial \lambda \right) - (\tau_{\theta\theta} + \tau_{\lambda\lambda}) / r \right] \mathbf{e}_r + \\ &+ \left[ (1/r^2 \sin \theta) \left( \partial (r^2 \sin \theta \tau_{r\theta}) / \partial r + \partial (r \sin \theta \tau_{\theta\theta}) / \partial \theta + \partial (r \tau_{\lambda\theta}) / \partial \lambda \right) + (\tau_{r\theta} - \tau_{\lambda\lambda} \cot \theta) / r \right] \mathbf{e}_\theta + \\ &+ \left[ (1/r^2 \sin \theta) \left( \partial (r^2 \sin \theta \tau_{r\lambda}) / \partial r + \partial (r \sin \theta \tau_{\theta\lambda}) / \partial \theta + \partial (r \tau_{\lambda\lambda}) / \partial \lambda \right) + (\tau_{r\lambda} + \tau_{\theta\lambda} \cot \theta) / r \right] \mathbf{e}_\lambda \end{aligned} \quad [\text{A.21}]$$

El primer invariante del tensor  $\boldsymbol{\tau}$  es

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &\equiv \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} + \tau_{\lambda\lambda} = \\ &= 3\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \left[ \partial u_r / \partial r + 2u_r / r + (1/r) \partial u_\theta / \partial \theta + u_\theta \cos \theta / r \sin \theta + (1/r \sin \theta) \partial u_\lambda / \partial \lambda \right] = \\ &= 3\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{u} = (3\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u} = 3K \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad [\text{A.22}]$$

## B. Expresiones Analíticas de las Sumas de las Series de Legendre

Se denota por  $P_n$  el polinomio de Legendre de grado  $n$  y por  $P_n^m$  las funciones de Legendre asociadas de primera especie, de grado  $n$  y orden  $m$ . Además,  $x = r/R_T$  y  $l = (1 + x^2 - 2x\cos\psi)^{1/2}$ . Se introducen algunas sumas de las series de Legendre utilizadas en esta memoria para acelerar la convergencia de las funciones de Green:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\psi) = 1/2\text{sen}(\psi/2) \quad [\text{B.1}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(\cos\psi) = -1/4\text{sen}(\psi/2) \quad [\text{B.2}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/n)P_n(\cos\psi) = -\log[\text{sen}(\psi/2) + \text{sen}^2(\psi/2)] \quad [\text{B.3}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial P_n(\cos\psi)/\partial\psi = -\cos(\psi/2)/4\text{sen}^2(\psi/2) \quad [\text{B.4}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\partial P_n(\cos\psi)/\partial\psi = -\cos(\psi/2)[1 + 2\text{sen}(\psi/2)]/2\text{sen}(\psi/2)[1 + \text{sen}(\psi/2)] \quad [\text{B.5}]$$

Las siguientes expresiones, más generales, son necesarias para el cálculo de la componente Newtoniana de las funciones de Green, (Hobson, 1931)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi) = 1/l \quad [\text{B.6}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n P_n(\cos\psi) = -(x^2 - x\cos\psi)/l^3 \quad [\text{B.7}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n)P_n(\cos\psi) = \ln(2/(l+1-x\cos\psi)) \quad [\text{B.8}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \partial P_n(\cos\psi)/\partial\psi = -x\text{sen}\psi/l^3 \quad [\text{B.9}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n)\partial P_n(\cos\psi)/\partial\psi = -x\text{sen}\psi(1/l+1)/(l+1-x\cos\psi) \quad [\text{B.10}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \frac{\partial P_n(\cos\psi)}{\partial\psi} = -\frac{1}{\text{sen}\psi} \ln \frac{(x-l+1)^2(1-\cos\psi)}{2(l-1+x\cos\psi)(1+\cos\psi)} - \frac{\cos\psi}{\text{sen}\psi} \ln \frac{x^2 \text{sen}^2\psi}{2(l-1+x\cos\psi)} \quad [\text{B.11}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \frac{\partial^2 P_n(\cos\psi)}{\partial\psi^2} = \frac{-lx\cos\psi(l+1-x\cos\psi) + x^2 \text{sen}\psi(1+l)}{l(l+1-x\cos\psi)^2} \left(\frac{1}{l} + 1\right) + \frac{x^2 \text{sen}^2\psi}{l^3(l+1-x\cos\psi)} \quad [\text{B.12}]$$

## C. Obtención de un Modelo Clásico de Aguas Someras: Fundamentos y Justificación

*En esta Sección del Apéndice se resumen los fundamentos esenciales para la obtención de un modelo clásico de aguas someras, prestando especial atención a las simplificaciones e hipótesis empleadas para su deducción. Con este fin se exponen, inicialmente, los modelos tridimensionales de Euler y de Navier-Stokes que describen la dinámica de un fluido no viscoso y viscoso, respectivamente. Para describir el fenómeno de marea oceánica, puesto que la profundidad característica del océano es muy inferior a su dimensión horizontal, se utilizan habitualmente modelos bidimensionales de aguas someras. Una aproximación clásica para la obtención de un modelo de aguas someras 2D, seguida por numerosos autores, se basa en las ecuaciones de Reynolds que describen el movimiento en régimen turbulento de un fluido incompresible, o bajo la aproximación de Boussinesq, obtenidas promediando en el tiempo las ecuaciones de Navier-Stokes 3D. El sistema de ecuaciones así obtenido se denomina ecuaciones de Reynolds 3D provenientes de flujos turbulentos (RANS<sup>1</sup>). Bajo la consideración esencial de que las dimensiones horizontales del flujo turbulento son predominantes y que sus aceleraciones verticales son despreciables, además de una serie de hipótesis adicionales, las RANS 3D pueden integrarse en la dirección vertical desde el fondo oceánico hasta la superficie. El sistema de ecuaciones 2D a que da lugar, una vez especificados los términos de la fricción con el fondo oceánico y la viscosidad turbulenta horizontal, constituye un modelo de aguas someras.*

*La bibliografía consultada para la confección de esta Sección corresponde, principalmente, a las siguientes publicaciones (por orden cronológico): Somigliana-Bacchialoni y Spallanzani (1976), Schwiderski (1978, 1980, 1980b, 1980c), Hendershott, (1981), Body y Hardy (1997), Montero (1999), Broomans (2002), Fe Marqués (2005) y Taboada (2006).*

### C.1 Ecuaciones de Euler del Movimiento Relativo

La modelización de la marea oceánica involucra cálculos que abarcan una gran porción de la superficie terrestre, por tanto, es conveniente expresar las ecuaciones que rigen su movimiento en un sistema de coordenadas esféricas solidario con la Tierra. En este apartado, por simplicidad, se consideran las ecuaciones expresadas en forma cartesiana. Para ello, se consideran un **sistema de referencia inercial o sistema absoluto** con origen el centro de masas de la Tierra y un **sistema de coordenadas fijo a la Tierra**. En este último, denominado **sistema relativo**<sup>2</sup> por estar en movimiento relativo al sistema inercial, se consideran el eje  $x$  positivo hacia el Este, el eje  $y$  positivo hacia el Norte y el eje  $z$  en la dirección de la línea de acción de la fuerza gravitacional, positivo hacia el exterior.

---

<sup>1</sup> RANS acrónimo del inglés *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*.

<sup>2</sup> Cuando el movimiento se refiere a un sistema de referencia inercial se dice **movimiento absoluto**. Cuando el movimiento se refiere al sistema relativo se dice **movimiento relativo**.

Se considera un volumen de control<sup>3</sup>,  $V$ , de una partícula de fluido de masa total  $M$  y elemento de masa  $dm$ . Sea, además,  $\rho$  la densidad de  $dm$  en el elemento de volumen  $dV$ . Denotando por  $\mathbf{u}_a$  y  $\mathbf{a}_a = D\mathbf{u}_a/Dt$  la velocidad y la aceleración con respecto al sistema de referencia absoluto<sup>4</sup>, el **cambio con respecto al tiempo del momento** de la parcela de fluido de densidad  $\rho$  y masa  $dm$  viene dado por

$$\mathbf{a}_a dm = \rho dV D\mathbf{u}_a/Dt \quad [\text{C.1}]$$

La ecuación de movimiento absoluto del volumen  $V$  se obtiene a partir de la **ley de conservación del momento o de la cantidad de movimiento** (segunda ley de Newton). Este principio establece que el cambio de momento debe ser igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre  $V$ . De esta forma, considerando  $dm$  la unidad de masa, la conservación del momento se expresa de la forma

$$D\mathbf{u}_a/Dt = (1/\rho) \sum_i \mathbf{F}_i \quad [\text{C.2}]$$

donde el sumatorio  $\sum_i \mathbf{F}_i$  representa la fuerza total que actúa sobre el volumen. Por tanto, para aplicar este principio es necesario establecer las fuerzas que actúan sobre el sistema fluido. Básicamente, las fuerzas que afectan al movimiento de un fluido se dividen en dos clases: las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie. Las **fuerzas de volumen** o **másicas** son aquellas que afectan a todo el volumen de la parcela de fluido y se deben a campos de fuerzas externas, mientras que las **fuerzas de superficie** sólo afectan a la superficie de la parcela de fluido cuando ésta está en contacto con otras, con las cuales interactúa. Inicialmente, se considera que las fuerzas que actúan sobre el fluido son:

- Una única fuerza de volumen: la gravedad.
- Una única fuerza de superficie: la presión.

Esto es, se considera un fluido ideal (no viscoso<sup>5</sup>) en el que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la presión y la gravedad. Debe señalarse que, esta es sólo una forma muy básica. Progresivamente, se ampliará para incluir otras fuerzas externas (como las fuerzas derivadas del potencial astronómico de marea) y las fuerzas de fricción viscosas.

- **La fuerza de la gravedad:** El principal campo externo de fuerzas que actúa sobre una partícula de fluido es el gravitatorio terrestre. La fuerza es la aceleración de la gravedad absoluta, determinada por la densidad de la partícula de fluido y la aceleración gravitacional,  $\mathbf{g}_a$

$$\mathbf{F}_1 = \rho \mathbf{g}_a \quad [\text{C.3}]$$

- **La fuerza de presión:** La fuerza de presión viene dada por<sup>6</sup>

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla p \quad [\text{C.4}]$$

Establecidas las fuerzas que actúan sobre el fluido, la **ecuación del movimiento absoluto** por unidad de masa, denominada frecuentemente como **ecuación de Euler**, se expresa de la forma

<sup>3</sup> Se dice **volumen de control** al de una **parcela de fluido** en la que se establecen las condiciones de conservación de una magnitud física igualando los flujos netos a través de su superficie con la variación temporal de la cantidad a conservar en su interior.

<sup>4</sup>  $D(\cdot)/Dt$  denota la derivada material cuando el movimiento se considera en el sistema de referencia inercial.

<sup>5</sup> Un **flujo no viscoso** es aquel para el que la fuerza de fricción interna es despreciable en comparación con otras fuerzas. En este tipo de flujo no hay transporte de cantidad de movimiento entre sus partículas.

<sup>6</sup> En coordenadas cartesianas, el gradiente de la presión se escribe como  $\nabla p = (\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial p/\partial z)^T$ .

$$D\mathbf{u}_a/Dt = \mathbf{g}_a - (1/\rho)\nabla p \quad [\text{C.5}]$$

Pero, puesto que el movimiento del océano está siempre referido a un punto fijo sobre la superficie terrestre en rotación, este movimiento es siempre relativo. Denotando por  $\mathbf{u}_r$  la velocidad de la parcela de fluido con respecto al sistema de referencia relativo, la relación entre las velocidades absoluta y relativa de la parcela de fluido viene dada por:

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad [\text{C.6}]$$

donde el segundo sumando es la velocidad de la parcela con respecto al centro de masas de la Tierra, esto es, la **velocidad lineal de rotación terrestre**.  $\mathbf{R}$  representa el vector distancia de la parcela de fluido al centro de la Tierra y  $\boldsymbol{\omega}$  denota el **vector velocidad angular de rotación de la Tierra**<sup>7</sup> con

$$\omega \approx 2\pi / (3.600 \cdot 23,9333) = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

La aceleración absoluta resulta

$$D\mathbf{u}_a/Dt = d\mathbf{u}_r/dt + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad [\text{C.7}]$$

siendo:

$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$  la **aceleración relativa**<sup>8</sup>, medida en el sistema en rotación, y que resulta de la suma de una **aceleración local** y una **aceleración convectiva**, esto es

$$d\mathbf{u}_r/dt = \partial\mathbf{u}_r/\partial t + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u}_r \quad [\text{C.8}]$$

$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_r$  es la aceleración de Coriolis.

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$  es la aceleración centrípeta, dirigida hacia el eje de rotación.

Reemplazando la aceleración absoluta por [C.8] en la ecuación del movimiento absoluto [C.5] y reordenados los términos, se tiene que

$$d\mathbf{u}_r/dt = \mathbf{g}_a - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_r - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - (1/\rho)\nabla p \quad [\text{C.9}]$$

En esta expresión la gravedad absoluta menos las aceleraciones de Coriolis y centrípeta expresa la restauración del equilibrio de fuerzas en el sistema relativo. Por otra parte, la fuerza por unidad de masa de la gravitación  $\mathbf{g}_a$  no se puede medir pero sí la **gravedad aparente (fuerza de gravedad o aceleración de la gravedad)**, que resulta de

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad [\text{C.10}]$$

Sustituyendo  $\mathbf{g}$  en [C.9], se tiene la **ecuación de movimiento relativo**:

$$d\mathbf{u}_r/dt = -\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_r - (1/\rho)\nabla p \quad [\text{C.11}]$$

A continuación, se analizan los términos correspondientes a la aceleración de Coriolis y a la gravedad aparente en [C.11]:

- **El término de la aceleración de Coriolis:** El vector velocidad angular de la Tierra,  $\boldsymbol{\omega}$ , es

<sup>7</sup> El periodo del efecto Coriolis es  $T_\omega = 1/\omega$ .

<sup>8</sup>  $d(\cdot)/dt$  denota derivación respecto al sistema de referencia rotante. El término  $d\mathbf{u}_r/dt$  corresponde a las **fuerzas de inercia de reacción** (por unidad de masa) que el entorno del flujo ejerce sobre la partícula fluida. En coordenadas cartesianas, las partes local y convectiva de la aceleración relativa se expresan de la forma:

- Aceleración local:  $\partial\mathbf{u}_r/\partial t = (\partial u/\partial t, \partial v/\partial t, \partial w/\partial t)^T$

- Aceleración convectiva:  $\mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u}_r = (u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z, u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z, u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z)^T$  siendo  $(u, v, w)$  las componentes en las direcciones  $x, y, z$  del vector  $\mathbf{u}_r$ , respectivamente.



$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e} \quad [\text{C.12}]$$

con

$$\mathbf{e} = \sin \phi \mathbf{k} + \cos \phi \mathbf{j} \quad [\text{C.13}]$$

donde  $\phi$  es la latitud e  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son los vectores unitarios dirigidos al Este, al Norte y al cénit, respectivamente. Por tanto, la aceleración de Coriolis se expresa de la forma

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 2\omega(w \cos \phi - v \sin \phi, u \sin \phi, -u \cos \phi) \quad [\text{C.14}]$$

Si se considera, además, que:

- La componente vertical de la velocidad,  $w$ , es muy pequeña. Entonces podrá despreciarse en la aceleración de Coriolis el término  $w \cos \phi$ .
- El término  $-2\omega u \cos \phi$  en la aceleración de Coriolis puede despreciarse, ya que su magnitud es varios órdenes inferior al resto de términos en las ecuaciones<sup>9</sup>. Esto se denota frecuentemente en la literatura por *hipótesis oceanográfica* y, para ello, se toma

$$g = g - 2\omega u \cos \phi \quad [\text{C.15}]$$

- **Los términos de la aceleración de la gravedad y de la aceleración centrípeta:** Se considera que la fuerza centrípeta, que resulta de la transformación al sistema de ejes fijos en la Tierra, se engloba dentro de la fuerza gravitatoria (Pedlonsky, 1987). Así,  $\mathbf{g}$  dado por [A13] es sólo función de la posición geográfica. Pero como se tiene que  $|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})| \ll |\mathbf{g}|$  y, además, que las variaciones de  $\mathbf{g}$  son muy pequeñas (inferiores a un 0,5%),  $\mathbf{g}$  se considera constante (es decir, se desprecia la aceleración centrífuga) y resulta

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{k} \quad [\text{C.16}]$$

con la magnitud de  $g$  igual a  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

Con las consideraciones expuestas anteriormente, se obtienen las ecuaciones del movimiento relativo [C.11] en coordenadas cartesianas, esto es:

### ***LAS ECUACIONES DE EULER DEL MOVIMIENTO RELATIVO. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO***

*Para un fluido ideal (no viscoso), donde las únicas fuerzas que afectan a su movimiento son la presión y la gravedad, y asumiendo las siguientes hipótesis:*

- **Hip. 1:** La componente vertical de la velocidad,  $w$ , es muy pequeña.
- **Hip. 2 (oceanográfica):** Se desprecia el término  $-2\omega u \cos \phi$  en la aceleración de Coriolis.
- **Hip. 3:**  $\mathbf{g}$  se considera constante,  $\mathbf{g} = -g \mathbf{k}$ .

Las **Ecuaciones de Euler** se expresan de la forma<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\omega v \sin \phi - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -2\omega u \sin \phi - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad [\text{C.17}]$$

donde:

<sup>9</sup> Se dice que una magnitud difiere de otra en un orden de magnitud cuando es mayor o menor por un factor de diez.

<sup>10</sup> Puesto que ya no hay posibilidad de confusión, en adelante se omite el subíndice  $r$  para referir el movimiento relativo.

- $\mathbf{u}$  es el vector velocidad del flujo, con  $u, v, w$  sus componentes en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente (en  $\text{ms}^{-1}$ ).
- $t$  es el tiempo (en  $s$ ).
- $\omega$  es la velocidad angular de rotación terrestre (en  $s^{-1}$ ).
- $\phi$  es la latitud (en grados).
- $p$  es la presión (en  $\text{Nm}^{-2}$ ).
- $\rho$  es la densidad del fluido (en  $\text{kgm}^{-3}$ ). Si se asume constate,  $\rho$  toma el valor  $1.027 \text{ kgm}^{-3}$ .
- $g$  es la aceleración de la gravedad, que toma el valor  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

Equivalentemente, en notación con operadores

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad [\text{C.18}]$$

con  $\nabla$  que indica el operador gradiente.

## C.2 Ecuaciones de Navier-Stokes del Movimiento Relativo

Anteriormente se han establecido las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso. Pero, los fluidos reales son viscosos<sup>11</sup> y en ellos siempre están presentes las fuerzas de fricción viscosas causadas por la interacción entre sus moléculas. Estas fuerzas de viscosidad molecular originan tensiones sobre la superficie de la parcela de fluido, que pueden expresarse mediante el denominado **tensor de esfuerzos viscosos**, representado por el símbolo  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la **fuerza de superficie de fricción viscosa**, que se denota por  $\mathbf{F}_3$ , es proporcional a la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos<sup>12</sup>,  $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{F}_3 = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)^T \quad [\text{C.19}]$$

De esta forma, en el caso de un fluido viscoso, la conservación del momento, expresada mediante la ecuación [C.2], se amplía para considerar que las fuerzas que actúan sobre el fluido son: la fuerza de la gravedad [C.3], la presión [C.4] y la fuerza de fricción viscosa [C.20]. Con esto, la ecuación del movimiento absoluto por unidad de masa, dada por [C.5], se expresa ahora como

$$D\mathbf{u}_a/Dt = \mathbf{g}_a - (1/\rho) \nabla p + (1/\rho) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad [\text{C.20}]$$

y, asimismo, la ecuación de movimiento relativo sujeta a las hipótesis 1, 2 y 3 se escribe de la forma

$$d\mathbf{u}_r/dt = -\mathbf{g} \times \mathbf{r} + -(1/\rho) \nabla p + (1/\rho) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad [\text{C.21}]$$

<sup>11</sup> En un **fluido viscoso** existen interacciones entre las partículas que lo constituyen, que se manifiestan como intercambios de cantidad de movimiento y originan, además, fenómenos de disipación de energía.

<sup>12</sup> La resultante de las fuerzas elementales de superficie (por unidad de volumen) que actúan sobre una partícula de fluido, está determinada por la divergencia del tensor de esfuerzos asociado al punto por el que pasa la partícula. Esta divergencia se denomina **vector de tensiones de contacto** (fuerzas de superficie por unidad de área) sobre la partícula de fluido.

En un determinado punto, el tensor gradiente de la velocidad,  $\nabla \mathbf{u}$ , provoca que las partículas que pasan por dicho punto se deformen con una determinada velocidad. El tensor que marca las velocidades de deformación es el **tensor de velocidades de deformación** y viene dado por el gradiente de velocidad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & 1/2(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) & 1/2(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) \\ 1/2(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) & \partial v / \partial y & 1/2(\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) \\ 1/2(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) & 1/2(\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) & \partial w / \partial z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

Navier-Stokes determinó que este comportamiento lineal simple es el experimentado por determinados fluidos, como es el caso de los fluidos newtonianos. Para este tipo de fluidos, cada componente del tensor de esfuerzos viscosos es función lineal de cada componente del tensor de velocidades de deformación. Si el medio es isótropo, el número de coeficientes de proporción es de 3: uno para la dirección normal, denominado **coeficiente de viscosidad normal** ( $\lambda$ ), y dos para cada dirección tangencial, llamados **coeficientes de viscosidad tangencial** ( $\mu$  y  $\mu'$ ). Por la simetría del tensor se tiene que  $\mu = \mu'$  (parámetro denominado **viscosidad dinámica molecular**, en kg/m·s), con lo que el tensor de esfuerzos viscosos para un fluido Newtoniano se puede expresar mediante la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad [\text{C.22}]$$

La relación [C.22] se conoce como **ley de viscosidad de Newton** (o **hipótesis de fluido Newtoniano** o **hipótesis de Navier-Stokes**<sup>13</sup>) y establece, por tanto, que las tensiones viscosas son linealmente proporcionales a la tasa o variación de deformación angular de una parcela de fluido (esto es, a las velocidades de deformación, [A.18] en Apéndice A). Puesto que, en el caso de un fluido incompresible<sup>14</sup> se verifica que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , por la continuidad (ec. [C.28]), la expresión anterior se reduce a

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad [\text{C.23}]$$

Así, la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos para un fluido Newtoniano, con la restricción de fluido incompresible (o sujeto a la aproximación de Boussinesq<sup>15</sup>), es

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^T \quad [\text{C.24}]$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación [C.21], se obtiene la ecuación de Navier-Stokes para un fluido newtoniano incompresible

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad [\text{C.25}]$$

donde  $\nu = \mu / \rho$  es la **viscosidad cinemática molecular**<sup>16</sup> (en m<sup>2</sup>/s).

<sup>13</sup> Se dicen **fluidos Newtonianos** aquellos cuya viscosidad puede considerarse constante en el tiempo. Más concretamente, los fluidos donde el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la velocidad de deformación.

<sup>14</sup> Un flujo se dice **incompresible** cuando la densidad es constante en todos los puntos y a lo largo del tiempo. Por tanto, la cantidad de volumen y de masa permanecen constantes independientemente de la presión.

<sup>15</sup> La **aproximación de Boussinesq** establece que si las variaciones de densidad del fluido son pequeñas, la densidad puede considerarse constante excepto cuando está multiplicada por la aceleración de la gravedad.

Con las consideraciones expuestas, se obtienen las ecuaciones que describen el movimiento relativo [C.25] de un fluido viscoso en coordenadas cartesianas (C. Navier, 1821 y G. Stokes, 1845).

### **LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DEL MOVIMIENTO RELATIVO. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.**

Para un fluido viscoso, donde las fuerzas que afectan a su movimiento son la presión, la gravedad y la fuerza de fricción viscosa y, asumiendo las siguientes hipótesis:

- **Hip. 1:** La componente vertical de la velocidad,  $w$ , es muy pequeña.
- **Hip. 2 (oceanográfica):** Se desprecia el término  $-2\omega u \cos \phi$  en la aceleración de Coriolis.
- **Hip. 3:**  $g$  se considera constante,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ .
- **Hip. 4:** Fluido incompresible o sujeto a la aproximación de Boussinesq.
- **Hip. 5:** Hipótesis de fluido Newtoniano o de Navier-Stokes.

Las Ecuaciones de Navier-Stokes se expresan de la forma<sup>17</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\omega v \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -2\omega u \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\quad [C.26]$$

donde:

- $\mathbf{u}$  es el vector velocidad del flujo y  $u, v, w$  sus componentes en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente (en  $\text{ms}^{-1}$ ).
- $t$  es el tiempo (en  $s$ ).
- $\omega$  es la velocidad angular de rotación terrestre (en  $s^{-1}$ ).
- $\phi$  es la latitud (en grados).
- $p$  es la presión (en  $\text{Nm}^{-2}$ ).
- $\rho$  es la densidad del fluido (en  $\text{kgm}^{-3}$ ). Si se asume constante  $\rho$  toma el valor  $1.027 \text{ kgm}^{-3}$ .
- $g$  es la aceleración de la gravedad, que toma el valor  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .
- $\nu = \mu/\rho$ ; es el coeficiente de viscosidad cinemática molecular (en  $\text{m}^2/\text{s}$ ).  $\mu$  denota el coeficiente de viscosidad dinámica.

Estas ecuaciones excluyen cualquier posibilidad de fluctuaciones locales y presuponen que el flujo es laminar<sup>18</sup>. En notación con operadores

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad [C.27]$$

con  $\nabla$  que indica el operador gradiente y  $\Delta$  el operador laplaciano.

<sup>16</sup> La **viscosidad cinemática** representa la característica propia del líquido desechando las fuerzas que genera su movimiento, se obtiene a través del cociente entre la viscosidad absoluta y la densidad del fluido.

<sup>17</sup> Nuevamente, puesto que no hay posibilidad de confusión, se omite el subíndice  $r$  para referir el movimiento relativo.

<sup>18</sup> Los **flujos laminares** se caracterizan, por un lado, porque las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas de inercia y, por otro, porque en la interacción viscosa con otras partículas, la partícula de fluido no cambia su trayectoria si no que es arrastrada por la acción del resto de partículas.

### C.3 La Ecuación de Continuidad

La ecuación que completa el sistema de ecuaciones de movimiento, ya sea para un fluido ideal (ecuaciones de Euler) o viscoso (ecuaciones de Navier-Stokes) es la **ecuación de continuidad**, que proviene de la conservación de las masas. La ecuación de conservación de masas establece, desde un punto de vista Euleriano, que el flujo total de masa que atraviesa la superficie cerrada que limita un volumen es cero. En el caso de un fluido incompresible (o bajo la aproximación de Boussineq), puesto que la densidad permanece constante, esta condición se expresa de la forma

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0 \quad [C.28]$$

Esto es, la divergencia de la velocidad, que representa la variación de volumen por unidad de área, es nula. Esto se reescribe en notación vectorial de la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [C.29]$$

### C.4 Las Ecuaciones de Reynolds 3D para Flujos Turbulentos

Las ecuaciones Navier-Stokes obtenidas en el apartado anterior presuponen que el flujo es laminar, pero la realidad es que en la naturaleza los flujos son turbulentos. Cuando un flujo se mueve a una velocidad que excede una cierta velocidad crítica, se producen inestabilidades que provocan la generación de vórtices y remolinos, esto es, el flujo se vuelve turbulento. La turbulencia depende del flujo, que es de donde obtiene su energía. Las fuentes de energía más comunes para la generación de turbulencias son las tensiones de corte en el flujo medio originadas, por una parte, por diferencias de velocidades a través de las capas de fluido y, por otra parte, por la presencia de un contorno, que da lugar a una capa límite<sup>19</sup> (Montero, 1999). En cuanto cesa la producción de energía, el flujo turbulento decae debido a que las fluctuaciones de las velocidades se reducen paulatinamente y la energía asociada se disipa en vórtices cada vez más pequeños, hasta un punto tal que se desvanece por calor debido a la viscosidad del fluido.

La estructura de un **flujo en régimen turbulento** se caracteriza, principalmente, por el movimiento irregular de sus partículas, sin ningún orden establecido. En este tipo de flujos se tiene, por una parte, que las fuerzas de inercia predominan sobre las fuerzas viscosas y, por otra parte, que en la interacción viscosa con otras partículas, la partícula de fluido, además de ser arrastrada, es desplazada de su trayectoria por los intercambios de cantidad de movimiento del resto de partículas. Las trayectorias de las partículas forman pequeños remolinos de diferentes escalas espacio-temporales. Asimismo, la transferencia de cantidad de movimiento de una porción de fluido a otra, en régimen turbulento, ocasiona que se desarrollen mayores esfuerzos cortantes y pérdidas de energía en el fluido. El carácter turbulento de un flujo viene indicado por el **número adimensional de Reynolds** (Re), que representa la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de fricción viscosa. Esto es, en las ecuaciones de Navier-Stokes, la comparación de los términos no lineales inerciales (o

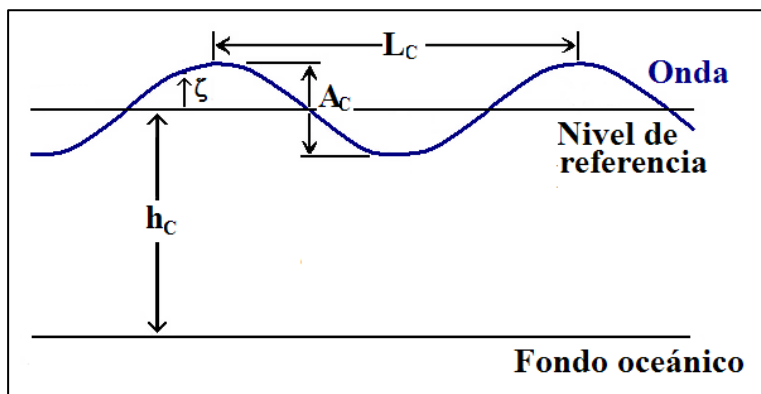
---

<sup>19</sup> Conceptualmente una **capa límite** es aquella región en la que el flujo se ve afectado por la presencia de un contorno.

convectivos) con la fricción molecular proporciona una idea de la importancia de la viscosidad sobre el flujo, de la siguiente forma

$$Re = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza viscosa}} = \frac{U_0^2/L_c}{\mu U_c/\rho L_c^2} = \frac{\rho}{\mu} U_c L_c = \frac{1}{\nu} U_c L_c \quad [C.30]$$

donde  $U_c$  y  $L_c$  representan las escalas características de velocidad horizontal y de longitud horizontal, respectivamente<sup>20</sup>. Un flujo se dice laminar cuando  $Re < 10^3$  y turbulento si  $Re > 10^6$ .



**FIGURA C.1:**

*Magnitudes características de una onda.*

En particular, los movimientos inducidos en el océano por el potencial astronómico, debido a sus grandes dimensiones, deben considerarse como turbulentos.

### Aproximación de Reynolds para un flujo turbulento

Cuando se considera el carácter turbulento del flujo las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento no se pueden resolver, ni analítica ni numéricamente, puesto que las incógnitas son magnitudes instantáneas<sup>21</sup>. Esto es, los valores de las componentes de la velocidad ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) y de la presión  $p$  en las ecuaciones [C.26] dependen del tiempo. Debido a las estructuras internas, por ejemplo de remolino, en los regímenes turbulentos se producen variaciones en las componentes de la velocidad del fluido y la presión. Generalmente, estas variaciones son demasiado pequeñas para representarlas en un esquema numérico, salvo que la resolución espacial de la cuadrícula oceánica sea muy alta. Para tratar este fenómeno se utiliza la **descomposición de Reynolds**, que consiste en considerar las componentes de la velocidad y la presión compuestas de una cantidad promedio en el tiempo (esta es una parte relativamente lenta) más un término de fluctuación turbulenta (que recoge las perturbaciones rápidas de la primera). Esto es<sup>22</sup>

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad p = \bar{p} + p' \quad [C.31]$$

<sup>20</sup>  $T_c$ ,  $L_c$  y  $A_c$  denotan las escalas temporal, de longitud horizontal y longitud vertical características del movimiento, y por  $h_c$  la profundidad de propagación característica (Fig. C.1). La relación  $h_c/L_c$  representa la **profundidad relativa**. Las **ondas largas** se caracterizan por tener una profundidad relativa inferior a  $1/20$ . En el marco de las ondas largas, la teoría de ondas aplicada puede determinarse a partir de:

- $(A_c/h_c) \ll (h_c/L_c)^2$ , corresponde a **ondas de amplitud muy pequeña** y se denomina **teoría lineal de ondas largas**.
- $(A_c/h_c) \gg (h_c/L_c)^2$ , corresponde a **ondas en aguas someras** y se denomina **teoría no lineal de ondas largas**.

Con la notación anterior, se definen  $k = 1/L_c$  (en  $m^{-1}$ ) como **número de onda**,  $f = 1/T_c$  (en  $s^{-1}$ ) la **frecuencia** de la onda.

<sup>21</sup> Generalmente, se dicen **variables instantáneas** aquellas que describen los movimientos instantáneos del fluido. Éstas pueden ser cinemáticas (como la velocidad y la aceleración de las partículas del fluido) o dinámicas (como la presión, las tensiones tangenciales en la superficie de la partícula y las fuerzas por unidad de volumen).

<sup>22</sup> En estas expresiones  $u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z, t) + u'(x, y, z, t)$ , etc.

Los símbolos  $\bar{\phantom{x}}$  y  $\prime$  denotan la cantidad promediada y la fluctuación turbulenta, respectivamente. El promedio temporal puede definirse de diversos modos. En el caso de un flujo no permanente<sup>23</sup>, p. ej.

$$\bar{u}(t) \doteq (1/T) \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau \quad [\text{C.32}]$$

donde  $T$  denota el periodo, que debe ser mayor que la escala de tiempo turbulenta. Debe señalarse que los promedios de las fluctuaciones son cero, esto es,  $\overline{u'}(t) = 0$ .

Sustituyendo [C.31] en las ecuaciones de Navier-Stokes [C.26] y de continuidad [C.28] y, posteriormente, promediando las ecuaciones resultantes en el tiempo se obtendrán las ecuaciones de Reynolds 3D provenientes de flujos turbulentos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right\} &= 2\omega \bar{v} \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right\} &= -2\omega \bar{u} \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right\} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} \end{aligned} \quad [\text{C.33}]$$

En las expresiones anteriores se observa, por un parte, que la ecuación de continuidad es la misma para las variables promediadas en el tiempo. Por otra parte, las ecuaciones del momento resultantes poseen los mismos términos que las ecuaciones de partida, con la adicción de unos nuevos (situados entre corchetes) provenientes de los términos convectivos. Estos nuevos términos, que corresponden a los productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas (desconocidos a priori), son responsables de la perdida de momento en las direcciones del flujo medio y, por tanto, actúan como tensiones sobre el fluido. Se denominan **tensiones de Reynolds** (por unidad de masa y volumen)<sup>24</sup> y se denotan por

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \overline{u'u'} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \overline{u'v'} \\ \tau_{yy} &= \overline{v'v'} & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \overline{u'w'} \\ \tau_{zz} &= \overline{w'w'} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \overline{v'w'} \end{aligned} \quad [\text{C.34}]$$

El problema que surge ahora en las ecuaciones [C.33] es que las tensiones de Reynolds son desconocidas. Por tanto, para resolver el sistema de ecuaciones será necesario obtener expresiones para dichas tensiones. Esto es lo que se conoce como el **problema de cierre de turbulencia**. Existen diferentes modelos de cierre de turbulencia, con diferentes grados de complejidad. La expresión más comúnmente extendida para las tensiones de Reynolds turbulentas es la conocida como hipótesis de Boussinesq, que se basa en la analogía con las tensiones para fluidos newtonianos<sup>25</sup>.

<sup>23</sup> Se dice **flujo estacionario** si las propiedades del flujo no varían con el tiempo, aunque pueden variar de un punto a otro. Por el contrario, el flujo se dice **no permanente o no estacionario** si sus características (como son la velocidad o el calado) en un punto determinado varían de un instante a otro. Un flujo permanente o estacionario se caracteriza, principalmente, por que no existen variaciones en la densidad, la presión o la temperatura.

<sup>24</sup> Estos términos multiplicados por la densidad tienen dimensiones de fuerza por superficie.

<sup>25</sup> Un tratamiento más extenso del problema de cierre de turbulencia está fuera de los objetivos de esta memoria.

## Hipótesis de Boussinesq

Boussinesq (1877) propuso una relación entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y las tensiones de Reynolds análoga a la ley de viscosidad de Newton. Según esta relación, los flujos se suponen proporcionales al gradiente de la magnitud transportada, es decir, la velocidad, a través de un factor de proporcionalidad llamado viscosidad turbulenta

$$\begin{aligned}\overline{u'u'} &= -(\mu_t/\rho)(2\partial\bar{u}/\partial x) + (2/3)k & \overline{u'v'} &= -(\mu_t/\rho)(\partial\bar{u}/\partial y + \partial\bar{v}/\partial x) \\ \overline{v'v'} &= -(\mu_t/\rho)(2\partial\bar{v}/\partial y) + (2/3)k & \overline{u'w'} &= -(\mu_t/\rho)(\partial\bar{u}/\partial z + \partial\bar{w}/\partial x) \\ \overline{w'w'} &= -(\mu_t/\rho)(2\partial\bar{w}/\partial z) + (2/3)k & \overline{v'w'} &= -(\mu_t/\rho)(\partial\bar{v}/\partial z + \partial\bar{w}/\partial y)\end{aligned}\quad [C.35]$$

donde el coeficiente de proporcionalidad  $\mu_t$  se denomina **viscosidad dinámica turbulenta, de remolino o eddy**, que se convierte en la incógnita a determinar. En apartados posteriores se estudiará como calcular este coeficiente. Finalmente,  $k$  es la **energía cinética turbulenta** por unidad de masa, dada por<sup>26</sup>

$$k = (1/2)(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

Con los tensores de Reynolds turbulentos definidos, los términos fluctuantes en [C.33] tienen la forma:

- En la dirección  $x$ <sup>27</sup>

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right\} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(2\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x} = \\ &= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)\right\} - \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)\right\} + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x} = \\ &= -\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{u}) - \nabla \cdot \left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x}\end{aligned}$$

- En la dirección  $y$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial\overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}\right\} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\nu_t\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial y} = \\ &= -\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{v}) - \nabla \cdot \left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial y}\end{aligned}$$

- En la dirección  $z$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial\overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'w'}}{\partial z}\right\} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_t\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial z} = \\ &= -\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{w}) - \nabla \cdot \left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial z}\end{aligned}$$

<sup>26</sup> Con esta definición, la suma de las tensiones de Reynolds normales ( $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{v'v'}$ ,  $\overline{w'w'}$ ) es la energía cinética  $k$ . Esto es, a cada una de las tensiones normales de Reynolds se le asigna una tercera parte de la cantidad  $2\rho k$ . Esto supone asumir una distribución isotropa para estas tensiones, lo que no es cierto en bastantes fluidos.

<sup>27</sup>  $\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(\nu_t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}\right)\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z}\right)\right\}$   
 $\nabla \cdot \left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}\right) = \nabla \cdot \left(\nu_t \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial x}\right)\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial x}\right)\right\}$



donde  $\nu_t = \mu_t/\rho$  representa **viscosidad cinemática turbulenta**. Puesto que  $\nu$  es constante para cada fluido, los términos viscosos en las ecuaciones [C.33] pueden escribirse de la forma  $\nu \Delta \bar{u} = \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{u})$ , y agruparse en  $\nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{u}$  (análogamente para  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$ ). Sustituyendo [C.33]<sup>28</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= 2\omega \bar{v} \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= -2\omega \bar{u} \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu + \nu_t) \nabla \bar{w} + \nabla \cdot \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad [C.36]$$

Finalmente, se consideran las siguientes hipótesis:

- La viscosidad molecular es despreciable frente a la viscosidad turbulenta: Las tensiones de Reynolds turbulentas son mayores que las tensiones viscosas, por tanto, estas últimas se pueden despreciar.
- A diferencia de la viscosidad molecular que, generalmente, se considera isótropa, la viscosidad turbulenta se distingue en las direcciones vertical y horizontal. Esto se justifica por las diferentes escalas del océano en estas dos direcciones<sup>29</sup>. Así, denotando por  $\nu_t^H$  y  $\nu_t^V$ , resulta  $\nu_t \nabla \bar{u} = (\nu_t^H (\partial \bar{u} / \partial x), \nu_t^H (\partial \bar{u} / \partial y), \nu_t^V (\partial \bar{u} / \partial z))$  (análogamente para los restantes términos).
- La variación espacial de  $\nu_t$  es muy pequeña. En ese caso, por la ecuación de continuidad [C.28], el último sumando en las ecuaciones [C.36] desaparece

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) &\approx \nu_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu_t \nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) = \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial z} \right) = 0 \\ \nabla \cdot \left( \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &\approx \nu_t \nabla \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu_t \nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y \partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Con estas tres hipótesis los términos de viscosidad molecular y turbulenta se reducen a  $\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{u})$ ,  $\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{v})$  y  $\nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{w})$  en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Las ecuaciones resultantes son muy similares a las de Navier-Stokes [C.37] para un fluido viscoso, con la diferencia de que los valores instantáneos de la velocidad y de la presión se han sustituido por sus promedios temporales y la viscosidad molecular se ha sustituido por la viscosidad turbulenta.

<sup>28</sup> Los términos que contienen las derivadas parciales de  $k$  respecto de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  proceden de las tensiones normales de Reynolds. Al igual que en el caso de la presión, estas tensiones actúan perpendicularmente a las caras del cubo de control, por lo que estos términos se incluyen en los que contienen las derivadas de la presión.

<sup>29</sup> En el océano, la escala de longitud horizontal característica es mucho mayor que la escala de longitud vertical característica, lo que justifica la distinción entre la viscosidad turbulenta en las direcciones vertical y horizontal.

## LAS ECUACIONES DE REYNOLDS 3D PARA FLUJOS TURBULENTOS

- **Hip. 1:** La componente vertical de la velocidad,  $w$ , es muy pequeña.
- **Hip. 2** (oceanográfica): Se desprecia el término  $-2\omega u \cos \phi$  en la aceleración de Coriolis.
- **Hip. 3:**  $g$  se considera constante,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ .
- **Hip. 4:** Fluido incompresible (o sujeto a la aproximación de Boussinesq).
- **Hip. 5** (Aprox. de Reynolds): Las componentes de la velocidad y la presión se descomponen en una cantidad promediada en el tiempo más la fluctuación turbulenta.
- **Hip. 6** (de Boussinesq): Los flujos turbulentos son proporcionales a la velocidad a través del factor viscosidad turbulenta.
- **Hip. 7:** La viscosidad molecular es despreciable frente a la viscosidad turbulenta.
- **Hip. 8:** La viscosidad turbulenta se distingue en las direcciones vertical y horizontal.
- **Hip. 9:** Se considera la variación espacial de la viscosidad turbulenta muy pequeña.

Las Ecuaciones de Reynolds 3D para un flujo turbulento se expresan de la forma

$$\begin{aligned}\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z &= 0 \\ \partial \bar{u} / \partial t + \bar{u} \partial \bar{u} / \partial x + \bar{v} \partial \bar{u} / \partial y + \bar{w} \partial \bar{u} / \partial z &= 2\omega \bar{v} \sin \phi - (1/\rho) \partial \bar{p} / \partial x + \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \bar{\mathbf{u}}) \\ \partial \bar{v} / \partial t + \bar{u} \partial \bar{v} / \partial x + \bar{v} \partial \bar{v} / \partial y + \bar{w} \partial \bar{v} / \partial z &= -2\omega \bar{u} \sin \phi - (1/\rho) \partial \bar{p} / \partial y + \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \bar{\mathbf{v}}) \\ \partial \bar{w} / \partial t + \bar{u} \partial \bar{w} / \partial x + \bar{v} \partial \bar{w} / \partial y + \bar{w} \partial \bar{w} / \partial z &= -g - (1/\rho) \partial \bar{p} / \partial z + \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \bar{\mathbf{w}})\end{aligned}\quad [\text{C.37}]$$

donde la primera ecuación corresponde a la conservación de masas y las tres restantes a la conservación del momento.

$\bar{\mathbf{u}}$  es el vector velocidad promedio del flujo, y  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  sus componentes en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente (en  $\text{ms}^{-1}$ ).

$t$  es el tiempo (en  $s$ )

$\omega$  es la velocidad angular de rotación terrestre (en  $s^{-1}$ ).

$\phi$  es la latitud (en grados).

$\bar{p}$  es el promedio temporal de la presión (en  $\text{Nm}^{-2}$ ).

$\rho$  es la densidad del fluido (en  $\text{kgm}^{-3}$ ). Si se asume constante  $\rho$  toma el valor  $1.027 \text{ kgm}^{-3}$ .

$g$  es la aceleración de la gravedad, que toma el valor  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

$\mathbf{v}_t$  es el coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta (en  $\text{m}^2/\text{s}$ ).

Equivalentemente, en notación con operadores

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &= 0 \\ \partial \bar{\mathbf{u}} / \partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} &= 2 \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{v}} - (1/\rho) \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \mathbf{v}_t \nabla \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad [\text{C.38}]$$

con  $\nabla$  que indica el operador gradiente. El término correspondiente a la viscosidad turbulenta es

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{u} / \partial x)] / \partial x + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{u} / \partial y)] / \partial y + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{u} / \partial z)] / \partial z \\ \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{v} / \partial x)] / \partial x + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{v} / \partial y)] / \partial y + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{v} / \partial z)] / \partial z \\ \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{w} / \partial x)] / \partial x + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{w} / \partial y)] / \partial y + \partial [\mathbf{v}_t^H (\partial \bar{w} / \partial z)] / \partial z \end{pmatrix} \quad [\text{C.39}]$$

con  $\mathbf{v}_t^H$  y  $\mathbf{v}_t^V$  la viscosidad molecular en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

## C.5 Las Ecuaciones de Reynolds 2D para Flujos Turbulentos

Si las dimensiones horizontales del flujo turbulento son claramente predominantes y si la variación en la dirección vertical de las componentes horizontales de la velocidad es pequeña y apenas existen aceleraciones verticales, entonces el movimiento del fluido puede describirse mediante unas ecuaciones bidimensionales, resultado de integrar en la dirección vertical las ecuaciones 3D de Reynolds [C.37]. El sistema de ecuaciones así obtenido se denomina **ecuaciones de Reynolds 2D provenientes de flujos turbulentos**<sup>30</sup>.

Para la obtención de este nuevo sistema de ecuaciones se consideran las Hipótesis 1 a 9 establecidas para la obtención de las ecuaciones de Reynolds 3D, dadas por [C.37]. Además, en este caso, se consideran una serie de hipótesis adicionales:

- **Hipótesis 10:** El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales.
- **Hipótesis 11:** La aceleración vertical de las partículas de fluido se considera despreciable frente a la gravedad.
- **Hipótesis 12:** Se desprecia la presión atmosférica.
- **Hipótesis 13:** La variación en la vertical de las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  e  $y$  es pequeña. Esta hipótesis permite sustituir los promedios temporales de las componentes horizontales de la velocidad por sus valores medios al integrar en la vertical.
- **Hipótesis 14:** Se considera despreciable la variación de la viscosidad cinemática turbulenta con la profundidad.
- **Hipótesis 15:** La lámina de agua es, aproximadamente, paralela al fondo.
- **Hipótesis 16:** Se desprecia la tensión tangencial sobre la superficie debida al viento.

Con las hipótesis anteriores es posible obtener una expresión del gradiente de presión por unidad de masa, que permite desacoplar las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento.

### Gradiente de presión por unidad de masa

Teniendo en cuenta las Hip. 10, que considera que el movimiento principal de las partículas se produce en planos horizontales, y la Hip. 11, según la cual la aceleración vertical del fluido es despreciable frente a la gravedad, en las ecuaciones del momento [C.37] se pueden despreciar los siguientes términos:

- La aceleración vertical del fluido,  $d\bar{w}/dt$ , que corresponde al primer miembro de la ecuación de conservación del momento en la dirección vertical.
- El gradiente de la componente vertical de la velocidad (es decir,  $\nabla\bar{w}$ ). Anulando, así, el término correspondiente a la fricción turbulenta en la dirección  $z$ <sup>31</sup>.

Por tanto, la ecuación de conservación del momento en la dirección vertical, en [C.37], se reduce a la **distribución de presión hidrostática**<sup>32</sup>

<sup>30</sup> Se hace referencia, siempre, a flujos (en superficie libre) turbulentos (y no permanentes).

<sup>31</sup> Además, la hip. 10, permite despreciar la derivada respecto a  $z$  del vector velocidad, esto es  $\partial\bar{u}/\partial z = \partial\bar{v}/\partial z = \partial\bar{w}/\partial z = 0$ .

$$\partial \bar{p} / \partial z = -\rho g \quad [C.40]$$

Integrando [C.40] en la dirección vertical desde un  $z$  cualquiera hasta la superficie libre, se llega a

$$\bar{p}(x, y, \zeta, t) - \bar{p}(x, y, z, t) = -g \int_z^\zeta \rho dz' \quad [C.41]$$

donde  $\bar{p}(x, y, \zeta, t) \equiv p_a$  es la presión atmosférica (esto es, la presión en la superficie libre). Con esta expresión la ecuación genérica del momento se reduce a sus dos componentes horizontales. Para ello, se sustituye esta expresión en el término de la presión en la ecuación del momento en la dirección  $x$ . Utilizando la regla de integración de Leibnitz, se llega a que (análogamente para la dirección  $y$ )

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( g \int_z^\zeta \rho dz' + p_a \right) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z^\zeta \rho dz' \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} = \\ &= -\frac{g}{\rho_0} \left[ \int_z^\zeta \frac{\partial \rho}{\partial x} dz' + \rho(x, y, \zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} = -\frac{g}{\rho_0} \rho(x, y, \zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^\zeta \frac{\partial \rho}{\partial x} dz' - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} \end{aligned} \quad [C.42]$$

De esta forma, el **gradiente de presión horizontal** se describe por:

- Las diferencias en el nivel del agua, a través del **término barotrópico**  $-(g/\rho_0) \rho(x, y, \zeta, t) \partial \zeta / \partial x$ . Este término se denota por **pendiente de la superficie libre**.
- Las diferencias en la densidad en la dirección horizontal, a través del **término baroclínico**:  $-(g/\rho_0) \int_z^\zeta (\partial \rho / \partial x) dz'$
- La contribución de la presión atmosférica, a través del término  $-(1/\rho_0)(\partial p_a / \partial x)$

Obsérvese que en las expresiones anteriores  $\rho_0$  denota la densidad de referencia constante y  $\rho = \rho_0 + \rho'$  es la densidad que tiene en cuenta la perturbación,  $\rho'$ , cuando esta está multiplicada por la densidad (ya que, por la Hipótesis 4 se ha asumido la aproximación de Boussinesq). Puesto que en adelante no hay posibilidad de confusión, la densidad de referencia se denota por  $\rho \equiv \rho_0 \equiv \rho_w$ . Si, además, se desprecia la presión atmosférica (Hipótesis 12)

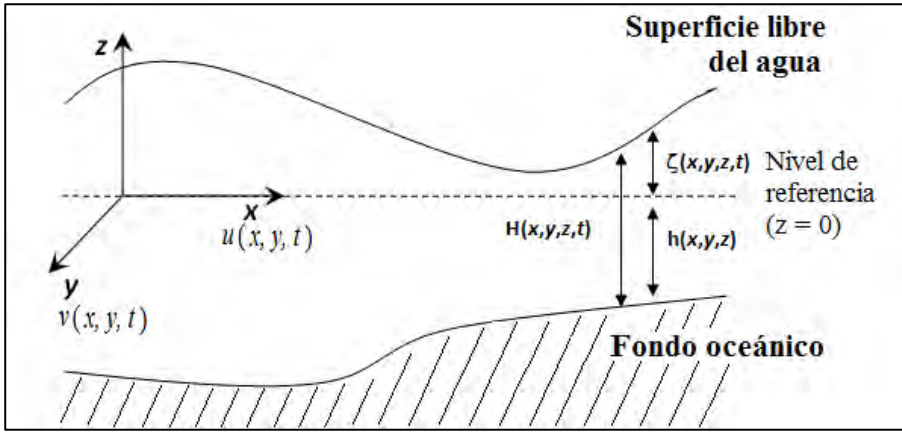
$$-(1/\rho) \partial \bar{p} / \partial x = -g \partial \zeta / \partial x \quad -(1/\rho) \partial \bar{p} / \partial y = -g \partial \zeta / \partial y \quad [C.43]$$

Con el gradiente de presión horizontal definido, se tiene

$$\begin{aligned} \partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z &= 0 \\ \partial \bar{u} / \partial t + \bar{u} \partial \bar{u} / \partial x + \bar{v} \partial \bar{u} / \partial y + \bar{w} \partial \bar{u} / \partial z &= 2\omega \bar{v} \sin \phi - g \partial \zeta / \partial x + \nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{u}) \\ \partial \bar{v} / \partial t + \bar{u} \partial \bar{v} / \partial x + \bar{v} \partial \bar{v} / \partial y + \bar{w} \partial \bar{v} / \partial z &= -2\omega \bar{u} \sin \phi - g \partial \zeta / \partial y + \nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{v}) \end{aligned} \quad [C.44]$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para obtener la superficie libre y las componentes de la velocidad del flujo.

<sup>32</sup> Esto es, las hipótesis señaladas anteriormente justifican la aproximación hidrostática (la presión que actúa sobre el fluido es la hidrostática). Esta es una de las hipótesis clave para obtener un modelo de aguas someras. La aproximación hidrostática puede justificarse también mediante las siguientes hipótesis: (i) la hipótesis de **flujo barotrópico**, que se caracteriza por que la longitud horizontal característica,  $L_c$ , es mucho mayor que la escala de longitud vertical característica,  $H_c$ . (ii) El número de Reynolds horizontal para un flujo turbulento es mucho mayor que uno.



**FIGURA C.2:** Relación entre  $H$ ,  $h$  y  $\zeta$ , en el sistema de coordenadas cartesianas.

### Obtención de la superficie libre. Ecuación de continuidad promediada en la vertical

Integrando la ecuación de continuidad a lo largo del eje vertical, desde el fondo oceánico hasta la superficie libre, se tiene

$$0 = \int_{-h}^{\zeta} (\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z) dz = \int_{-h}^{\zeta} (\partial \bar{u} / \partial x) dz + \int_{-h}^{\zeta} (\partial \bar{v} / \partial y) dz + \bar{w}(x, y, \zeta, t) - \bar{w}(x, y, -h, t) \quad [C.45]$$

donde  $h = h(x, y)$  es la profundidad del agua por debajo del plano  $z = 0$  (Fig. C.2). Teniendo en cuenta las condiciones de contorno cinemáticas sobre la superficie libre y sobre el fondo oceánico<sup>33</sup>.

1) El término  $\bar{w}(x, y, \zeta, t)$ , que es la velocidad en la dirección  $z$  de los puntos de la superficie, es la derivada total de  $\zeta(x, y, t)$

$$\bar{w}(x, y, \zeta, t) = d\zeta / dt = \partial \zeta / \partial t + \bar{u}(x, y, \zeta, t) \partial \zeta / \partial x + \bar{v}(x, y, \zeta, t) \partial \zeta / \partial y \quad [C.46]$$

2) Análogamente para  $\bar{w}(x, y, -h, t)$ , teniendo en cuenta que  $\partial h / \partial t = 0$

$$\bar{w}(x, y, -h, t) = -dh / dt = -\bar{u}(x, y, -h, t) \partial h / \partial x - \bar{v}(x, y, -h, t) \partial h / \partial y \quad [C.47]$$

Sustituyendo [C.46] y [C.47] en [C.45]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}(x, y, \zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \bar{v}(x, y, \zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \bar{u}(x, y, -h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{v}(x, y, -h, t) \frac{\partial h}{\partial y} = - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz$$

Aplicando la regla de Leibnitz a los dos primeros sumandos

$$- \int_{-h}^{\zeta} (\partial \bar{u} / \partial x) dz = - \partial \left( \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz \right) / \partial x + \bar{u}(x, y, \zeta, t) \partial \zeta / \partial x + \bar{u}(x, y, -h, t) \partial h / \partial x \quad [C.48]$$

$$- \int_{-h}^{\zeta} (\partial \bar{v} / \partial y) dz = - \partial \left( \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz \right) / \partial y + \bar{v}(x, y, \zeta, t) \partial \zeta / \partial y + \bar{v}(x, y, -h, t) \partial h / \partial y \quad [C.49]$$

Se llega a

$$\partial \zeta / \partial t = - \partial \left( \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz \right) / \partial x - \partial \left( \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz \right) / \partial y$$

Así, aplicando la Hipótesis 13 y denotando por  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  a los promedios verticales de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  (que en adelante se referirán por **velocidades horizontales promediadas en profundidad**), respectivamente

<sup>33</sup> Las condiciones que se refieren a la cinemática del movimiento, se denominan **condiciones de contorno cinemáticas**, y expresan la compatibilidad que debe existir entre los movimientos del contorno y del fluido en contacto con el mismo. En la superficie libre (no estacionaria), la condición de contorno establece que las partículas en contacto con la superficie deben seguir su movimiento. En el caso de la superficie del fondo oceánico (que se considera estacionario, impermeable y, además, se desprecia la capa límite), la condición de contorno establece que la partícula de agua se desliza paralela al fondo y la componente vertical de la velocidad perpendicular al contorno debe ser nula (**condición de tipo deslizamiento**).

$$\hat{u} = (1/H) \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz \quad \hat{v} = (1/H) \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz \quad [C.50]$$

siendo  $H$  la profundidad total del agua, la **ecuación de continuidad promediada en profundidad** se expresa de la forma

$$\partial \zeta / \partial t = -\partial(\hat{u}H) / \partial x - \partial(\hat{v}H) / \partial y \quad [C.51]$$

### Obtención de las componentes de la velocidad del flujo

En [C.37], multiplicando por  $\bar{u}$  la ecuación de continuidad y sumándolo a la ecuación del momento en la dirección  $x$  dada por [C.44] (el mismo procedimiento se aplicará para la dirección  $y$ )

$$\partial \bar{u} / \partial t + \partial \bar{u}^2 / \partial x + \partial(\bar{u}\bar{v}) / \partial y + \partial(\bar{u}\bar{w}) / \partial z = f\bar{v} - g \partial \zeta / \partial x + \nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{u}) \quad [C.52]$$

Se integran separadamente los términos de la ecuación anterior:

1) Integrando el primer miembro de la ecuación resultante en la dirección vertical, entre el fondo y la superficie libre, y aplicando la regla de Leibnitz

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v}) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w}) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz - \bar{u} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \bar{u} \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2 \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \bar{u}^2 \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} dz - \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \Big|_{z=\zeta} - \bar{u}\bar{w} \Big|_{z=-h} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\partial h / \partial t = 0$  y sustituyendo, además, las condiciones cinemáticas para  $\bar{w}(x, y, \zeta, t)$  y  $\bar{w}(x, y, -h, t)$  dadas por [C.46] y [C.47]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz - \bar{u} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2 \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \bar{u}^2 \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} dz - \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \\ + \bar{u} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}^2 \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \bar{u}^2 \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{u}\bar{v} \Big|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} dz \end{aligned}$$

Al integrar verticalmente, la hip. 12 permite sustituir  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  por sus valores promedios, resultando

$$\int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 dz = \hat{u}^2 H \quad \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} dz = \hat{u}\hat{v}H$$

y así:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial (\bar{u}\bar{w})}{\partial z} dz = \frac{\partial(\hat{u}H)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}^2 H)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}\hat{v}H)}{\partial y} \quad [C.53]$$

2) Integrando los dos primeros sumandos del segundo miembro

$$f \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz - g \int_{-h}^{\zeta} (\partial \zeta / \partial x) dz = f \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz - g (\partial \zeta / \partial x) \int_{-h}^{\zeta} dz = f\hat{v}H - gH \partial \zeta / \partial x \quad [C.54]$$

ya que la cota de la superficie libre no varía respecto a  $z$ .

3) El último término del segundo miembro, con las Hip. 7, 8 y 9 para un flujo turbulento, viene dado por [C.39], de tal forma que la integral se descompone en

$$\int_{-h}^{\zeta} \nabla \cdot (\nu_t \nabla \bar{u}) dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) dz \quad [C.55]$$

Se calculan separadamente cada una de las integrales anteriores (análogamente en la dirección  $y$ ):

- Se aplica la regla de Leibnitz a la primera integral y las Hipótesis 13, 14 y 15

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \left( v_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz - v_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=\zeta} - \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t^H \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}H) \right) \quad [C.56]$$

- Con la segunda integral se procede de manera análoga a la anterior

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t^H \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial y} \left[ v_t^H \frac{\partial}{\partial y} (\hat{u}H) \right] \quad [C.57]$$

- Finalmente, se integra el tercer término

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) dz = \left( v_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta} - \left( v_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} = \frac{1}{\rho} \left( \mu_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} - \mu_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=-h} \right) = \frac{1}{\rho} (\tau_{S_x} - \tau_{-h_x})$$

donde se ha denotado por  $\tau_{S_x}$  y  $\tau_{-h_x}$  a las componentes en la dirección  $x$  de la tensión tangencial que actúa sobre la superficie libre y el fondo oceánico, respectivamente<sup>34</sup>

$$\mu_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \tau_{S_x} \quad \mu_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \tau_{-h_x} \quad [C.58]$$

Si se desprecia la tensión tangencial que actúa sobre la superficie libre debida al viento  $\tau_{S_x}$

(Hip. 16), la integral se reduce a

$$\int_{-h}^{\zeta} \left( \partial \left( v_t^V \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) / \partial z \right) dz = -\tau_{-h_x} / \rho \quad [C.59]$$

Con [C.56], [C.57] y [C.59], la tercera integral en [C.55] queda

$$\int_{-h}^{\zeta} \nabla \cdot (v_t \nabla \bar{u}) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left( v_t^H \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}H) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t^H \frac{\partial}{\partial y} (\hat{u}H) \right) - \frac{\tau_{-h_x}}{\rho} \quad [C.60]$$

Así, con [C.53], [C.54] y [C.60] la ecuación [C.52] resulta

$$\left\{ \partial \left( \hat{u}H \right) / \partial t + \partial \left( \hat{u}^2 H \right) / \partial x + \partial \left( \hat{u} \hat{v} H \right) / \partial y \right\} = \left\{ f \hat{v} H - g H \partial \zeta / \partial x \right\} - \tau_{-h_x} / \rho + \left\{ \partial \left( v_t^H \frac{\partial \left( \hat{u}H \right)}{\partial x} \right) / \partial x + \partial \left( v_t^H \frac{\partial \left( \hat{u}H \right)}{\partial y} \right) / \partial y \right\} \quad [C.61]$$

El sistema de ecuaciones quedará cerrado si se obtiene una expresión para el término de la tensión del fondo (mediante, por ejemplo, una ley cuadrática con un coeficiente empírico dependiente de alguna condición local, como la profundidad o el dominio considerado) y se especifica el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal.

### Obtención del término de la tensión del fondo

La tensión tangencial en el fondo dada por [C.59] puede considerarse, por una parte, como una condición de contorno para los modelos 3D<sup>35</sup> y, por otra parte, como un modelo de cierre de las ecuaciones 2D promediadas en profundidad. En este último caso, se establece la siguiente hipótesis (la numeración sigue la establecida al inicio de este apartado):

**Hipótesis 17:** La tensión tangencial en el fondo (o pérdida de energía por fricción en el flujo no permanente) puede evaluarse mediante fórmulas empíricas válidas para un flujo permanente, como las de tipo Chèzy siguientes

<sup>34</sup> El promedio de la componente vertical de las tensiones de Reynolds se representan como tensiones tangenciales en el fondo y en la superficie libre. Éstas son condiciones de contorno de las ecuaciones 3D (Castanedo y Medina, 2002).

<sup>35</sup> El análisis y exposición de las condiciones de contorno en el fondo oceánico para modelos 3D (Davies et al. 1997; Castanedo y Medina, 2002) se encuentra fuera de los objetivos de esta memoria.

$$\tau_{-h_x} = \rho g \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} / C^2 \quad \tau_{-h_y} = \rho g \hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} / C^2 \quad [\text{C.62}]$$

En las expresiones anteriores  $C$  denota el **coeficiente de Chèzy** que depende, a su vez, del **coeficiente de Manning**  $n$  (dado en  $\text{m}^{-1/3}\text{s}$ ), que es función de la forma del lecho marino y del régimen hidráulico según la relación (Henderson, 1966)

$$C = R_H^{1/6} / n \quad (\text{en } \text{m}^{1/2}/\text{s}) \quad [\text{C.63}]$$

con  $R_H$  que denota el radio hidráulico. Generalmente,  $R_H$  se toma igual a  $H$ , de tal forma que resulta

$$\tau_{-h_x} = \rho g n^2 \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} / H^{1/3} \quad \tau_{-h_y} = \rho g n^2 \hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} / H^{1/3} \quad [\text{C.64}]$$

Si  $C$  se considera constante, entonces denotando por (p. ej. Davies et al., 1997)

$$C_b = g / C^2 = g n^2 / H^{1/3} \quad [\text{C.65}]$$

las tensiones tangenciales evaluadas mediante las fórmulas empíricas de tipo Chèzy se escriben abreviadamente de la forma

$$\tau_{-h_x} = \rho C_b \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} \quad \tau_{-h_y} = \rho C_b \hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} \quad [\text{C.66}]$$

Generalmente, el valor del coeficiente de fricción empírico  $C_b$  se deduce a partir del análisis de observaciones de corrientes de marea o mediante el ajuste de modelos numéricos (p. ej. Lueck y Lu, 1997).

Aplicando la Hipótesis 17 y las definiciones introducidas en [C.62] a [C.66] a la tensión tangencial dada en [C.59], resulta

$$-\tau_{-h_x} / \rho = -C_b \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} \quad [\text{C.67}]$$

y, por tanto, la ecuación del momento en la dirección  $x$  [C.61] se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial(\hat{u}H) / \partial t + \partial(\hat{u}^2 H) / \partial x + \partial(\hat{u}\hat{v}H) / \partial y = f\hat{v}H - gH \partial H / \partial x - \\ - C_b \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} + \left\{ \partial(v_i^H \partial(\hat{u}H) / \partial x) / \partial x + \partial(v_i^H \partial(\hat{u}H) / \partial y) / \partial y \right\} \end{aligned} \quad [\text{C.68}]$$

### Obtención del término de la viscosidad turbulenta horizontal

Para poder estimar el efecto de las tensiones de Reynolds es necesario calcular el coeficiente de viscosidad turbulenta. El cálculo de este coeficiente da lugar, según el esquema seguido, a numerosos tipos de modelos<sup>36</sup>. En los modelos de aguas someras es frecuente considerar la viscosidad turbulenta horizontal,  $\nu_t^H$ , constante<sup>37</sup>. Esto requiere asumir que ésta se disipa donde se genera, es decir, no se toma en consideración el transporte que realiza el flujo de las magnitudes que caracterizan la turbulencia. Aunque físicamente esto no es correcto, ya que se trata de la propiedad de un fluido, en problemas donde la escala de los fenómenos estudiados es mayor en horizontal que en vertical, como es el caso de la marea oceánica, esta simplificación es lo suficientemente precisa. En este tipo de problemas, los términos turbulentos tienen poca importancia, con excepción de la turbulencia generada en el fondo oceánico y que se tiene en cuenta a través de la parametrización de la fricción

<sup>36</sup> Se remite a Fe Marqués (2005) y Wilcox (2002) para una ampliación sobre los diferentes métodos clásicamente utilizados para el cálculo de la viscosidad cinemática de Reynolds.

<sup>37</sup> Debido a las diferentes escalas de la marea oceánica en las direcciones vertical y horizontal, la turbulencia horizontal se resuelve de diferentes formas en cada una de estas direcciones.



con el fondo, como se ha visto anteriormente. Por tanto, los términos turbulentos en este tipo de problemas representan efectos de la corriente que se manifiestan a menor escala (generalmente microescala) y que no pueden resolverse por el tamaño de la cuadrícula oceánica adoptada. Esto es, los fenómenos de tamaño inferior a la resolución horizontal de la malla se filtran y se incluyen en la parametrización de la turbulencia. Por esta razón, el valor del coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal está influenciado por consideraciones numéricas por lo que, generalmente, este término se incluye en la modelización hidrodinámica por estabilidad numérica. Habitualmente se considera un valor para la viscosidad turbulenta horizontal constante en todo el dominio obtenido bien experimentalmente mediante fórmulas empíricas, o bien mediante su relación con la distribución de la velocidad media.

Una vez obtenida una expresión para la tensión tangencia con el fondo y especificado el coeficiente de viscosidad horizontal turbulenta (que se considera constante) el sistema de ecuaciones de Reynolds 2D para flujos turbulentos queda completamente cerrado, y se escribe de la forma:

Véase, p. ej., Tuckey et al. (2006), Zhang et al. (2003), Montero (1999):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}H) + \frac{\partial}{\partial y}(\hat{v}H) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}H) + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}^2H) + \frac{\partial}{\partial y}(\hat{u}\hat{v}H) &= f\hat{v}H - gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C_b \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} + \nu_t^H \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{u}H) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{u}H) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}H) + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}\hat{v}H) + \frac{\partial}{\partial y}(\hat{v}^2H) &= -f\hat{u}H - gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - C_b \hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} + \nu_t^H \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{v}H) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{v}H) \right\} \end{aligned} \quad [C.69]$$

Equivalentemente, en notación con operadores (p. ej., Kolar et al., 1994)

$$\begin{aligned} \zeta_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}H) &= 0 \\ (\hat{\mathbf{u}}H)_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}H) &= -H\mathbf{f} \times \hat{\mathbf{u}} - gH\nabla \zeta - C_b \hat{\mathbf{u}} |\hat{\mathbf{u}}| + \nu_t^H \Delta (\hat{\mathbf{u}}H) \end{aligned} \quad [C.70]$$

En ocasiones, las ecuaciones de Reynolds 2D para flujos turbulentos aparecen en la literatura reescritas de diferentes formas<sup>38</sup>. Es habitual encontrar el sistema [C.69] expresado en términos de las componentes horizontales del transporte del flujo, en lo que se conoce como *forma conservativa*. Denotando por

$$U = \hat{u}H = \int_{-h}^{\zeta} \bar{u} dz \quad V = \hat{v}H = \int_{-h}^{\zeta} \bar{v} dz \quad (\text{en m}^2/\text{s})$$

Se consigue que la ecuación de continuidad no contenga explícitamente la variable  $H$ .

<sup>38</sup> Para las diferentes formas presentadas de los sistemas de ecuaciones, se citan diversas referencias bibliográficas donde estas pueden encontrarse en forma similar, exceptuando las fuerzas de marea y las parametrizaciones de los términos de fricción con el fondo oceánico y la viscosidad turbulenta horizontal que se trata siempre de manera independiente.

Véase, p. ej., Mc Inerney (2005), Moe y Gjevik (2002), Bode (1997):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{UV}{H} \right) &= fV - gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C_b \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^2} + \nu_t^H \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{UV}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{H} \right) &= -fU - gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - C_b \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^2} + \nu_t^H \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad [C.71]$$

Equivalentemente, en notación con operadores (p. ej., Kolar et al. 1994c)

$$\begin{aligned} \zeta_t + \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{U}_t + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}/H) &= -\mathbf{f} \times \mathbf{U} - gH \nabla \zeta - C_b (\mathbf{U}/H) (|\mathbf{U}|/H) + \nu_t^H \Delta(\mathbf{U}) \end{aligned} \quad [C.72]$$

Otros autores consideran el sistema de ecuaciones [C.69] expresado en su forma no conservativa<sup>39</sup>. Para ello, se desarrollan las derivadas en las ecuaciones del momento y se sustituye la ecuación de continuidad. Con este se llega a:

Véase, p. ej., Kolar et al. (1994), Lardner et al. (1993):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{u}H) + \frac{\partial}{\partial y} (\hat{v}H) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} &= f\hat{v} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C_b \frac{\hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}}{H} + \frac{\nu_t^H}{H} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{u}H) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{u}H) \right\} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= -f\hat{u} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - C_b \frac{\hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}}{H} + \frac{\nu_t^H}{H} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\hat{v}H) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{v}H) \right\} \end{aligned} \quad [C.73]$$

Equivalentemente, en notación con operadores (p. ej., Zahel, 1980)

$$\begin{aligned} \zeta_t + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}H) &= 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} &= -\mathbf{f} \times \hat{\mathbf{u}} - g \nabla \zeta - C_b \hat{\mathbf{u}} |\hat{\mathbf{u}}|/H + \nabla (\nu_t^H H \nabla \hat{\mathbf{u}})/H \end{aligned} \quad [C.74]$$

Finalmente, algunas de las hipótesis anteriores pueden agruparse y resumirse, de tal forma que:

## ***LAS ECUACIONES DE REYNOLDS 2D PARA FLUJOS TURBULENTOS***

*Asumiendo las siguientes hipótesis:*

- *Las fuerzas de masa que actúan sobre el fluido, la gravedad y la de Coriolis, se expresan como  $\mathbf{F} = (f_v, -fu, -g)^{40}$ , con  $f$  el **parámetro de Coriolis** (en  $s^{-1}$ ). Esto se justifica con las Hip. 1, 2 y 3.*
- ***Aproximación hidrostática** para un movimiento de un fluido barotrópico. El hecho de que la ecuación del momento en la dirección vertical se reduzca a la distribución de presión hidrostática implica la restricción del estudio a flujos cuya circulación es predominantemente horizontal, esto es flujos planos, lo que supone que las aceleraciones verticales son depreciables frente a la gravedad. Esto es, las hip. 10 y 11 pueden agruparse en una, bajo el*

<sup>39</sup> Se dice que el sistema de ecuaciones se encuentra en **forma conservativa**, si éstas se obtienen a partir de las leyes de conservación para el movimiento de un fluido que atraviesa un volumen de control fijo en el espacio. Por el contrario, cuando el volumen de control se desplaza con el fluido, de manera que siempre contiene las mismas partículas, se dice que el sistema de ecuaciones se expresa en **forma no conservativa**.

<sup>40</sup> En este caso, las incógnitas son cantidades promediadas en el tiempo y en la dirección vertical. Se omite la notación  $\hat{\square}$  ya que no hay posibilidad de confusión.

nombre de aproximación hidrostática. Además, las hip. 4 y 12 conllevan que el gradiente de presión horizontal se reduzca al término barotrópico. Por tanto, estas condiciones pueden resumirse como aproximación hidrostática para el movimiento de un fluido barotrópico.

- **Aproximación de Reynolds:** Las componentes de la velocidad y la presión se descomponen en una cantidad promediada en el tiempo más la fluctuación turbulenta. (Hip. 5)
- **Hipótesis de Boussinesq:** Los flujos turbulentos son proporcionales a la velocidad a través del factor viscosidad turbulenta. (Hip. 6)
- Se desprecia la viscosidad molecular frente a la turbulenta, se distingue la viscosidad turbulenta en las direcciones vertical y horizontal y se considera despreciable la variación espacial y con la profundidad de la viscosidad turbulenta. (Hip. 7, 8, 9 y 14)
- El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales. (Hip. 10)
- La aceleración vertical de las partículas de fluido se considera despreciable frente a la gravedad. (Hip. 11)
- Se desprecia la presión atmosférica y la tensión tangencial sobre la superficie debida al viento. (Hip. 12 y 16).
- La distribución en la vertical de las componentes en  $x$  e  $y$  de la velocidad. (Hip. 13)
- La lámina de agua es, aproximadamente, paralela al fondo. (Hip. 15)
- La tensión tangencial en el fondo se evalúa mediante una expresión del tipo

$$\tau_{-h_x} = \rho C_b \hat{u} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} \quad \text{y} \quad \tau_{-h_y} = \rho C_b \hat{v} \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}$$

con  $C_b$  el coeficiente de arrastre adimensional.

Las **Ecuaciones de Reynolds 2D** para un flujo turbulento se expresan de la forma [C.69], [C.71] o [C.73] (equivalentemente en notación con operadores por [C.70], [C.72] o [C.74]). Las incógnitas en el sistema de ecuaciones son la elevación de la marea oceánica,  $\zeta$ , y las componentes horizontales de la velocidad  $u$  y  $v$  (o del transporte  $U$  y  $V$ ). Su solución requiere que se especifiquen unas condiciones iniciales y de contorno apropiadas.

## C.6 Ecuaciones de Aguas Someras en Coordenadas Esféricas y Análisis de Escala

Las ecuaciones de Reynolds 2D para flujos turbulentos obtenidas en el apartado anterior, bajo las hipótesis expuestas, describen el movimiento de las ondas largas en aguas someras y reciben el nombre de **Ecuaciones de Aguas Someras** ( $SWE^{41}$ ). En el régimen de las ondas largas en aguas someras, las variaciones verticales del movimiento del fluido son despreciables (ya que la componente vertical de la velocidad es pequeña en comparación con sus componentes horizontales y es razonable que las aceleraciones verticales sea pequeñas en comparación con el resto de términos

<sup>41</sup> SWE acrónimo del inglés *Shallow Water Equations*.

que intervienen en la ecuación del momento en la dirección vertical) y el movimiento de la onda es esencialmente horizontal (esto es, la escala característica de la longitud horizontal del movimiento es mucho mayor que su longitud vertical<sup>42</sup>). Por otra parte, puesto que para las ondas largas las componentes horizontales de la velocidad no varían con la profundidad, éstas pueden reemplazarse por las correspondientes componentes promediadas en la vertical. Además, debe observarse que:

- En la mayoría de los casos se pueden despreciar los términos inerciales no lineales. Solamente en los casos en los que las velocidades horizontales y sus gradientes sean importantes, estos términos desempeñan un papel preponderante.
- La rotación de la Tierra puede ser un factor importante en el movimiento de las oscilaciones del mar. Si la escala característica temporal del movimiento del fluido,  $T_C$ , es mayor que el periodo del efecto de Coriolis es de esperar que la trayectoria de la partícula esté influenciada por la rotación terrestre. Por tanto, si

$$T_\omega/T_C = 2\pi U_C/\omega L_C < 1 \quad [C.75]$$

con  $U_C$  la escala de velocidad característica del flujo, la rotación es importante en el movimiento del fluido y el efecto Coriolis debe considerarse en las ecuaciones<sup>43</sup>.

El sistema [C.72] puede expresarse en coordenadas esféricas a partir del desarrollo de los operadores gradiente, divergencia y laplaciano, según se presentan en Apéndice A. El sistema así expresado puede encontrarse, por ejemplo, en Luettich y Westerink (1995) y Krohn (1984)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left[ \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} (V \cos \phi) \right] &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{U^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{UV}{H} \cos \phi \right) \right] - \frac{UV}{HR_T} \tan \phi &= fV - \frac{gH}{R_T \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - C_b \frac{U|U|}{H^2} + \nu_t^H \Delta U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{R_T \cos \phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{UV}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{V^2}{H} \cos \phi \right) \right] + \frac{U^2}{HR_T} \tan \phi &= -fU - \frac{gH}{R_T} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - C_b \frac{V|U|}{H^2} + \nu_t^H \Delta V \end{aligned} \quad [C.76]$$

Puesto que las ecuaciones obtenidas en apartados anteriores se basan en la consideración de una superficie plana, las expresiones resultantes no incluyen algunos términos provenientes de la curvatura de la Tierra<sup>44</sup>, denominados **términos de curvatura** (Kolar et al. 1994).

En la parametrización de los términos de viscosidad turbulenta horizontal,  $\nu_t^H \Delta(U)$ , sólo se han considerado los sumandos  $\nu_t^H \Delta U$  y  $\nu_t^H \Delta V$  dados por (p. ej., Kowalik y Polyakov, 1998; Davies et al., 1997)

<sup>42</sup> Es decir, se verifican las Hipótesis 10 y 11 citadas en esta Sección del Apéndice.

<sup>43</sup> Obsérvese que las expresiones obtenidas no se ha tenido en cuenta la curvatura de la Tierra. Esto podría realizarse incluyendo en el miembro izquierdo de las ecuaciones de conservación del momento un término adicional dado por  $(-\tilde{f}vH, \tilde{f}uH)$ , siendo  $\tilde{f} = \left[ (v\delta_x(\Delta y) + u\delta_y(\Delta x)) / (\Delta x \Delta y) \right]$  el término de curvatura (p. ej., Zhang et al., 2003), con  $\Delta x$  e  $\Delta y$  que denotan el espaciado de las celdas de la cuadrícula de integración en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente.

<sup>44</sup> Los términos de curvatura son: uno en la ecuación de continuidad y dos en las ecuaciones del momento. Estos últimos provienen de los términos convectivos y turbulentos.

$$\begin{aligned} v_i^H \Delta U &= v_i^H \left\{ \left( 1/R_T^2 \cos^2 \phi \right) \partial^2 U / \partial \lambda^2 + \left( 1/R_T^2 \cos \phi \right) \partial (\cos \phi \partial U / \partial \phi) / \partial \phi \right\} \\ v_i^H \Delta V &= v_i^H \left\{ \left( 1/R_T^2 \cos^2 \phi \right) \partial^2 V / \partial \lambda^2 + \left( 1/R_T^2 \cos \phi \right) \partial (\cos \phi \partial V / \partial \phi) / \partial \phi \right\} \end{aligned} \quad [C.77]$$

Una parametrización completa de los mismos, mediante el desarrollo del operador laplaciano en coordenadas esféricas (según se presenta en el Apéndice A), incluyendo los términos provenientes de la curvatura de la Tierra, puede encontrarse, por ejemplo, en Zahel (1973) o Kolar et al. (1994).

### Análisis de Escala de las Ecuaciones de Aguas Someras

Un análisis de escala de las SWE permite estudiar la magnitud relativa de sus términos y así, poder realizar las simplificaciones oportunas, en función del problema de interés. En la Tabla C.2 se presenta un análisis de escala simple de las SWE, basado en las magnitudes características de las variables, constantes y parámetros listadas en la Tabla C.1.

**TABLA C.1.** Magnitudes características de las variables, constantes y parámetros utilizados en el análisis de escala de las SWE, para: (1) La onda de marea  $M_2$  en el océano abierto (Kolar et al., 1994) (2) Los movimientos oceánicos de gran escala (GE) sobre plataformas continentales (McIntosh y Bennet, 1984).

Variable/Parámetro	Escala	Descripción	Magnitud ( $M_2$ )	Magnitud (GE) <sup>(*)</sup>
$H$	$h_C$	Profundidad característica	$3 \times 10^3$ m	$10^2$ m
$R_T \cos \phi \partial \lambda, R_T \partial \phi$	$L_C$	Longitud característica <sup>(1)</sup>	$8 \times 10^6$ m	$2 \times 10^5$ m
$T$	$T_C$	Periodo de la onda	$5 \times 10^4$ s	$7 \times 10^5$ m
$u, v$	$U_C$	Velocidad horizontal característica <sup>(2)</sup>	1 m/s	$3 \times 10^{-1}$ m/s
$W$	$W_C$	Velocidad vertical característica <sup>(3)</sup>	$5 \times 10^{-4}$ m/s	$10^{-4}$ m/s
$\zeta$	$\zeta_C$	Elevación característica	1 m	1 m
$\phi$	$\phi$	Latitud	$\phi \leq 85^\circ$	
	$\tan \phi$		Rango de 0 a 10	
$\omega$	$\omega$	Velocidad angular de rotación de la Tierra	$10^{-4} \text{ s}^{-1}$	
$R_T$	$R$	Radio medio terrestre	$6 \times 10^6$ m	
$g$	$g$	Aceleración de la gravedad	$10 \text{ m/s}^2$	
$r$	$r$	Coeficiente de fricción lineal	$3 \times 10^{-2} \text{ m/s}$	$2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
$\kappa$	$\kappa$	$k = r/H$	$10^{-5} \text{ s}^{-1}$	$2 \times 10^{-5} \text{ m/s}$

<sup>(1)</sup> En ambos casos, los parámetros introducidos son consistentes con  $L_C \sim O((g \cdot h_C)^{1/2} T_C)$

<sup>(2)</sup> Para GE, se verifica que  $U_C \sim O((g/h_C)^{1/2} \zeta_C)$

<sup>(3)</sup> En ambos casos,  $W_C \sim O(U_C \cdot h_C / L_C)$

**TABLA C.2.** Análisis de escala de las ecuaciones del momento en la dirección  $\lambda$  y de continuidad dadas por [C.76] para: (1) La onda de marea  $M_2$  en el océano abierto. (2) Los movimientos oceánicos de gran escala (GE) sobre plataformas continentales. En ambos casos, se consideran las magnitudes características de las variables, constantes y parámetros listados en la Tabla C.1. La escala de los términos  $R_T \cos \phi \partial \lambda$  y  $R_T \partial \phi$  se establece igual a la escala de longitud  $L_C$ .

ECUACIÓN DEL MOMENTO EN LA DIRECCIÓN $\lambda$					
1. ACELERACIÓN					
Término		$\partial U / \partial t$	$(1/R_T \cos \phi) \partial / \partial \lambda (U^2 / H)$	$(1/R_T) \partial / \partial \phi (UV / H)$	$-(UV \tan \phi / HR_T)$
Orden		$O( h_C \cdot U_C / T_C )$	$O( h_C \cdot U_C^2 / L_C )$	$O( h_C \cdot U_C^2 / L_C )$	$O( h_C \cdot U_C^2 \cdot \tan \phi / R )$
Magnitud (m/s <sup>2</sup> )	M <sub>2</sub>	$6 \times 10^{-2}$	$3,75 \times 10^{-4}$	$3,75 \times 10^{-4}$	$-5 \times 10^{-4} \cdot \tan \phi$
	GE	$4,29 \times 10^{-5}$	$4,5 \times 10^{-5}$	$4,5 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-6} \cdot \tan \phi$
2. FUERZA DE CORIOLIS					
Término		$-2\omega \text{sen } \phi V$	$2\omega \cos \phi W$	3. GRADIENTE DE PRESIÓN $(gH / R_T \cos \phi) \partial \zeta / \partial \lambda$	4. FRICCIÓN LINEAL $\kappa U$
Orden		$O( 2 \cdot \omega \cdot h_C \cdot U_C \cdot \text{sen } \phi )$	$O( 2 \cdot \omega \cdot h_C \cdot W_C \cdot \cos \phi )$	$O( g \cdot h_C \cdot \zeta_C / L_C )$	$O( \kappa \cdot h_C \cdot U_C )$
Magnitud (m/s <sup>2</sup> )	M <sub>2</sub>	$-3 \times 10^{-1} \cdot \text{sen } \phi$	$1,5 \times 10^{-4} \cdot \cos \phi$	$3,75 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-2}$
	GE	$-3 \times 10^{-3} \cdot \text{sen } \phi$	$1 \times 10^{-6} \cdot \cos \phi$	$5 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-4}$
5. VISCOSIDAD TURBULENTA HORIZONTAL					
Término		$-(A_H / R_T^2 \cos^2 \phi) \partial^2 U / \partial \lambda^2$	$-(A_H / R_T^2) \partial^2 U / \partial \phi^2$	$(A_H \tan \phi / R_T^2) \partial U / \partial \phi$	
Orden		$O( A_H \cdot h_C \cdot U_C / L_C^2 )$	$O( A_H \cdot h_C \cdot U_C / L_C^2 )$	$O( A_H \cdot h_C \cdot U_C \cdot \tan \phi / R \cdot L_C )$	
Magnitud (m/s <sup>2</sup> )	M <sub>2</sub>	$-A_H \cdot 4,69 \times 10^{-11}$	$-A_H \cdot 4,69 \times 10^{-11}$	$A_H \cdot 6,25 \times 10^{-11} \cdot \tan \phi$	
	GE	$-A_H \cdot 7,5 \times 10^{-10}$	$-A_H \cdot 7,5 \times 10^{-10}$	$A_H \cdot 2,5 \times 10^{-11} \cdot \tan \phi$	
ECUACIÓN DE CONTINUIDAD					
Término		$\partial \xi / \partial t$	$(1/R_T \cos \phi) \partial U / \partial \lambda$	$(1/R_T) \partial V / \partial \phi$	$-V \tan \phi / R_T$
Orden		$O( \zeta_C / T_C )$	$O( h_C \cdot U_C / L_C )$	$O( h_C \cdot U_C / L_C )$	$O( h_C \cdot U_C \cdot \tan \phi / R )$
Magnitud (m/s)	M <sub>2</sub>	$2 \times 10^{-4}$	$3,75 \times 10^{-2}$	$3,75 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-4} \cdot \tan \phi$
	GE	$1,43 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-6} \cdot \tan \phi$

## D. Método de los Representantes: Bibliografía Básica

**TABLA D.1:** Referencias bibliográficas fundamentales sobre el método de los representantes, en el marco de las técnicas de asimilación de datos aplicadas para la modelización de la marea oceánica.

Referencia	Metodología / Aplicación
Bennett & McIntosh, 1982	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Desarrollan de un <i>formalismo variacional</i> (denotado por <i>BM</i>), para la obtención de un modelo de marea que satisfaga las ecuaciones hidrodinámicas, las condiciones de frontera y todos los datos observados.</li> <li>- Analizan la elección de pesos (como función de los errores estimados y la escala del modelo).</li> </ul>
McIntosh & Bennett, 1984	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estudian las varianzas de error en la dinámica, mediante un análisis de aproximación de las ecuaciones discretizadas y sus condiciones de frontera.</li> <li>- Aplicación del <i>formalismo BM</i> para <math>M_2</math> en el Estrecho de Bass (Australia).</li> </ul>
Bennett, 1985	Aplicación del <i>formalismo BM</i> para la validación de datos in-situ.
Bennett, 1992	Desarrollan el <i>método de los representantes</i> para su aplicación en la construcción de modelos de marea oceánica.
Egbert et al., 1994	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven las SWE mediante su discretización en el tiempo y el espacio.</li> <li>- Desarrollan el <i>esquema de inversión generalizada</i>, mediante el método de los representantes y una serie de aproximaciones para conjuntos de datos grandes y modelos a escala global.</li> <li>- Estiman las magnitudes de los errores en la dinámica como funciones de la posición en el dominio.</li> <li>- Aplicación a la asimilación de datos altimétricos.</li> </ul>
Egbert & Bennett, 1996. Egbert, 1997	Desarrollan un método de <i>solución iterativa</i> (para el cálculo de los representantes) mediante el uso de <i>gradientes conjugados</i> .
Egbert & Erofeeva, 2002	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Introducen el <i>método de factorización directa de la matriz de coeficientes</i> para la resolución en el dominio de frecuencias de las SWE.</li> <li>- Desarrollan una variante al método de los representantes basada en: El <i>cálculo eficaz de los representantes</i>, que consiste en la eliminación de las componentes horizontales del transporte del flujo como variables. La <i>aproximación de base reducida</i>, que reduce el número de representantes calculados.</li> <li>- Aplicación a la inversión de datos T/P para la construcción de un modelo de marea en la región Indonesia.</li> </ul>
Bennett, 2002	Compendio sobre las técnicas variacionales y el método de los representantes.
Egbert & Erofeeva, 2006	Desarrollan el software OSU Tidal Inversion Software, para el cálculo de modelos de marea mediante la técnica de asimilación de datos, usando el método de los representantes.
Zaron & Egbert, 2006	Aplicación de la inversión generalizada de un modelo regional para estimar la disipación de marea barotrópica en el Ridge Hawaiano.
Otras referencias:	Bennett et al. 1996, 1997, 1998, Chua & Bennett, 2001.

# Listado de Datos Mareográficos Utilizados en el Proceso de Asimilación para la Construcción del Modelo IBER01

**TABLA 1:** Localización de los mareógrafos costeros y sensores de presión de fondo asimilados en el modelo oceánico IBER01. Se indica la procedencia de los datos: fuente, organismo distribuidor de las series de datos (o, en su defecto, de las constantes armónicas) y la red de observación a la que pertenece.

ESTACIONES MAREÓGRAFICAS						
ESTACIÓN		LOCALIZACIÓN			PROCEDENCIA DE LOS DATOS	
Nº	Nombre	Lat (°N)	Lon (°E)	Prof (m)	Fuente/Distribuidor/Referencia	Red de Observación
1	IAPSO-1.1.52	47.8500	-10.3833	3.830	IAPSO No. 35	---
2	IAPSO-1.1.8	47.7500	-7.2333	171	IAPSO No. 35/SCOR (1975)	Intercalibration Experiment
3	RD11 / IAPSO-1.1.68	45.0217	-15.4117	2.830	POL/BODC	BODC36814
4	RY1 / IAPSO-1.1.69	44.9417	-15.5767	3.164	POL/BODC	BODC36979
5	RLCB1	47.7500	-7.2000	174	POL/BODC	BODC33712
6	IAPSO-1.1.9	47.7333	-7.0833	165	IAPSO No. 35/SCOR (1975)	Intercalibration Experiment
7	IAPSO-1.1.6	47.5333	-8.4833	2.010	IAPSO No. 35/SCOR (1975)	Intercalibration Experiment
8	RD1 / IAPSO-1.1.7	47.4433	-8.4333	2.158	POL/BODC/IAPSO No. 35/SCOR (1975)	Intercalibration Experiment, BODC41066
9	T1	45.1333	-2.7167	170	IFREMER/LeCann (1990)	---
10	T2	45.8667	-3.7000	170	IFREMER/LeCann (1990)	---
11	T3	46.8500	-4.8667	150	IFREMER/LeCann (1990)	---
12	T4	47.3833	-6.0333	160	IFREMER/LeCann (1990)	---
13	C1	47.1000	-2.8167	40	IFREMER/LeCann (1990)	---
14	C2	46.9667	-3.0500	70	IFREMER/LeCann (1990)	---
15	C3	46.8333	-3.2833	100	IFREMER/LeCann (1990)	---
16	AUDIERNE (AUDI)	48.0000	-4.5500	---	SHOM/LeCann (1990)	---
17	CONCARNEAU (CONCA)	47.8736	-3.9072	---	SHOM/ESEAS	ESEAS-CONC PSMSL190/096 SHOM160
18	LE GUILVINEC (GUIL)	47.8000	-4.2833	---	SHOM/Fanjul et al. (1997)	---
19	PORT-TUDY (PTUD)	47.6500	-3.4500	---	SHOM/Fanjul et al. (1997)	PSMSL190/103
20	LE CROUESTY (LCROU)	47.5433	-2.8933	---	SHOM/ESEAS	ESEAS-LECY; SHOM185
21	LE PALAIS (LPAL)	47.3500	-3.1500	---	SHOM/LeCann (1990)	---
22	LE CROISIC (CROI)	47.3000	-2.5167	---	SHOM/LeCann (1990)	---
23	SAINT-NAZAIRE (SNAZ)	47.2667	-2.2000	---	SHOM/LeCann (1990)	PSMSL190/111; SHOM-SNAZA
24	SAINT-GILDAS (GILD)	47.1333	-2.2500	---	SHOM/Fanjul et al. (1997)	PSMSL190/113
25	PORT-JOINVILLE (PTJO)	46.7333	-2.3500	---	SHOM/Le Cann (1990)	---
26	LES SABLES d'OLONNE (OLONE)	46.4975	-1.7935	---	SHOM/SONEL	PSMSL190/116; SHOM062
27	PORT-BLOC/POINT DE GRAVE (PBLOC)	45.5682	-1.0618	---	SHOM/ESEAS	ESEAS PORT; PSMSL190/131; SHOM015
28	ARCACHON-EYRAC (EYRAC)	44.6643	-1.1637	---	SHOM/ESEAS	ESEAS-ARCA; SHOM190



29	CAP FERRET (CAFE)	44.6167	-1.2500	---	SHOM/Fanjul et al. (1997)	---
30	BAYONNE-BOUCAU (BOUCA)	43.5272	-1.5147	---	SHOM/SONEL	PSMSL190/139; SHOM094
31	SAINT JEAN DE LUZ / SOCOA (SJLUZ/SOCO)	43.3950	-1.6817	---	SHOM/SONEL	PSMSL190/141; SHOM095
32	PASAJES	43.3333	-1.9333	---	IHME/An. Mareas (1990)	PSMSL200/001
33	BILBAO-1	43.3372	-3.0358	---	PE/ESEAS	ESEAS-BILB; PSMSL200/006; PE3110
34	BILBAO-2	43.3492	-3.0576	---	PE/REDMAR (2005)	PE3111
35	SANTANDER-2	43.4625	-3.7984	---	PE/REDMAR	PSMSL200/013; PE3112
36	GIJÓN	43.5592	-5.6922	---	PE/REDMAR	PSMSL200/022; PE3113
37	AVILÉS	43.5833	-5.9333	---	IHME/An. Mareas (1990)	
38	FERROL	43.4667	-8.2667	---	IHME/An. Mareas (1990)	
39	CORUÑA-2	43.3586	-8.3880	---	PE/REDMAR	PSMSL200/032; PE3216
40	CORUÑA-1	43.3667	-8.4000	---	IEO	PSMSL200/030; GLOSS243; IEO005
41	VILLAGARCÍA DE AROSA	42.5994	-8.7700	---	PE/REDMAR	PSMSL200/036; PE3218
42	MARÍN	42.4000	-8.7000	---	IHME/An. Mareas (1990)	
43	VIGO-2	42.2425	-8.7264	---	PE/REDMAR	PSMSL200/042; PE3222
44	VIGO-1	42.2333	-8.7333	---	IEO	PSMSL200/041; IEO006
45	IAPSO-1.1.74	40.3000	-15.0500	5.475	IAPSO No. 35	---
46	RM2 / IAPSO-1.1.42	36.6767	-14.2450	212	POL/BODC/Cartwright et al. (1980)	BODC41331
47	RM1 / IAPSO-1.1.43	36.6800	-11.2083	145	POL/BODC/Cartwright et al. (1980)	BODC41318
48	RD4 / IAPSO-1.1.44	36.9217	-9.7000	1.983	POL/BODC/Cartwright et al. (1980)	BODC41110
49	LEIXOES	41.1850	-8.7033	---	IHMP/Fortunato et al. (2002)	PSMSL210/012
50	CASCAIS (CASC)	38.6833	-9.4167	---	IPCC/UHSLC	PSMSL210/021; GLOSS246; UHSLC209
51	SINES	37.9467	-8.8867	---	IHMP/Fortunato et al. (2002)	PSMSL210/028
52	LAGOS	37.1000	-8.6667	---	IPCC/BODC/GLOSS	PSMSL210/031; GLOSS103; BODC91996; UHSLC233
53	AYAMONTE	37.2167	-7.4167	---	IHME/An. Mareas (1990)	---
54	HUELVA-3-MINERALES	37.2017	-6.9350	---	PE/REDMAR (2005)	PE3325
55	HUELVA-BARRA	37.1333	-6.8667	---	IHME/An. Mareas (1990)	
56	HUELVA-2-MAZAGON	37.1333	-6.8322	---	PE/REDMAR	PSMSL220/005; PE3326
57	RÍO GUADALQUIVIR	36.7500	-6.4333	---	IHME/An. Mareas (1990)	
58	ROTA	36.6167	-6.3500	---	IHME/An. Mareas (1990)	
59	SEVILLA-BONANZA	36.8039	-6.3361	---	PE/REDMAR	PSMSL220/008; PE3332
60	CÁDIZ	36.5333	-6.2833	---	IHME/An. Mareas (1990)	ESEAS-220/003
61	CABO TRAFALGAR (TR)	36.1717	-6.0300	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	<i>Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar</i>
62	PUNTA GRACIA (GR)	36.0900	-5.8100	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	<i>Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar</i>
63	TARIFA	36.0000	-5.6000	---	IEO	PSMSL220/021; IEO009
64	PUNTA CARNERO (CA)	36.0717	-5.4283	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	<i>Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar</i>
65	ALGECIRAS	36.1167	-5.4333	---	IEO	PSMSL220/011; IEO10
66	GIBRALTAR	36.1167	-5.3500	---	HO-UK/BODC	PSMSL215/001; GLOSS248
67	DW / IAPSO-1.1.86	35.8833	-5.9667	260	IAPSO No. 35/Candela et al. (1990)	<i>Experimento de Gibraltar</i>
68	DN / IAPSO-1.1.87	35.9667	-5.7667	210	IAPSO No. 35/Candela et al. (1990)	<i>Experimento de Gibraltar</i>

69	DS / IAPSO-1.1.88	35.9000	-5.7333	210	IAPSO No. 35/Candela et al. (1990)	Experimento de Gibraltar
70	DP5 / IAPSO-1.1.89	36.0000	-5.5667	160	IAPSO No. 35/Candela et al. (1990)	Experimento de Gibraltar
71	CABO ESPARTEL (ES)	35.7650	-5.9433	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar
72	TANGER	35.7833	-5.8000	---	IHME/An. Mareas (1990)	---
73	PUNTA KANKOUSH (KA)	35.8167	-5.7000	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar
74	PUNTA CIRES (CI)	35.9117	-5.4800	---	IEO/Lafuente et al. (1987)	Red Mareográfica del Estrecho de Gibraltar
75	CEUTA	35.9000	-5.3167	---	IEO	ESEAS-CEUT; PSMSL340008; GLOSS249; IEO019 UHSLC209
76	MÁLAGA-2	36.7139	-4.4144	---	PE/MEDGLOSS	PSMSL220/032; PE3542
77	MOTRIL	36.7231	-3.5295	---	PE/MEDGLOSS	PE3544
78	ALMERÍA	36.8333	-2.4833	---	IGN	PSMSL220041
79	ALICANTE II	38.3333	-0.4833	---	IGN	PSMSL220/052
80	VALENCIA	39.4617	-0.3258	---	PE/REDMAR	PSMSL220/056; PE3652
81	SANT CARLES DE LA RAPITA	40.6140	0.5993	---	GC (LEM-UPC) /Cateura et al. (2007)	---
82	L'AMPOLLA	40.8077	0.7115	---	GC (LEM-UPC) /Cateura et al. (2007)	---
83	BARCELONA	41.3503	2.1614	---	PE/ESEAS	ESEAS-BARC; PSMSL220/061; PE3754
84	TOULON (TOULO)	43.1233	5.9100	---	SHOM/ESEAS	ESEAS-TOUL; PSMSL230/061; SHOM068
85	MARSEILLE (MARSE)	43.2783	5.3533	---	SHOM/ESEAS	ESEAS-MARS; PSMSL230/051; GLOSS205; SHOM524
86	SAN ANTONIO	38.9792	1.3014	---	UIB-IMES/ESEAS	ESEAS-SANA
87	IBIZA	38.9100	1.4433	---	PE/ESEAS	ESEAS-IBIZ; PE3587
88	MALLORCA	39.5500	2.6333	---	IEO	PSMSL225/011; IEO014

**TABLA 2:** Periodo de observación, longitud del registro (en días), intervalo de muestreo (en segundos) y método de análisis de las series. Se indica si las constantes armónicas se han obtenido a partir del análisis de las series temporales.

SERIES TEMPORALES REGISTRADAS POR LOS MAREÓGRAFOS										
Nº	Periodo Registro	L. Registro	I. Muestreo	M. Análisis	<sup>1</sup>	Nº	Periodo Registro	L. Registro	I. Muestreo	M. Análisis <sup>2</sup>
1	1978/04/26-1978/05/03	29	---	R	✗	45	1984/03/02-1984/03/31	29	---	R ✗
2	1973/11/05-1973/12/08	34	---	R	✗	46	1972/07/16-1972/08/17	32	900	A ✓
3	1980/08/14-1980/12/14	123	3600	A	✓	47	1974/11/07-1974/12/02	25	900	A ✓
4	1980/12/15-1981/07/21	218	3600	A	✓	48	1975/01/27-1975/03/11	42	900	A ✓
5	1973/06/01-1973/07/04	33	3600	A	✓	49	---	365	---	A ✗
6	1973/11/05-1973/12/09	35	---	R	✗	50	1959/01/01-2000/06/04	13507.4	3600	A ✓
7	1973/11/04-1973/12/04	31	---	R	✗	51	---	365	---	A ✗
8	1974/02/14-1974/03/26	39	---	R	✗	52	1985/12/30-2000/04/04	3047.5	3600	A ✓
9	1983/02/24-1983/03/15	19	450	A	✗	53	1990	365	---	A ✗

<sup>1</sup> Se especifica sí las series se han analizado en este trabajo (usando el programa VAV). En caso contrario, las constantes armónicas se han tomado de la referencia citada en la Tabla E.1.

<sup>2</sup> Método de Análisis: R = Respuesta, A = Armónico.

10	1983/02/25-1983/03/17	20	450	A	×	54	2005/01/01-2005/12/31/	365	3600	A	×
11	1983/02/26-1983/04/13	46	900	A	×	55	1990	365	---	A	×
12	1983/02/27-1983/04/09	41	600	A	×	56	1997-2000	1461	3600	A	×
13	1983/03/06-1983/04/22	47	450	A	×	57	1990	365	---	A	×
14	1983/03/05-1983/04/23	46	450	A	×	58	1990	365	---	A	×
15	1983/03/05-1983/04/22	48	1800	A	×	59	1993-2000	2922	3600	A	×
16	---	---	---	A	×	60	1990	365	---	A	×
17	1999/06/28-2006/10/19	2664.2	600	A	✓	61	1984/07/23-1985/02/15	208	600	A	×
18	---	489	---	---	×	62	1984/12/15-1985/03/12 1985/08/17-1985/09/23	126	600	A	×
19	---	8084	---	---	×	63	1944/01/01-2005/12/31	21140.3	3600	A	✓
20	2002/02/11-2006/12/31	1785.6	600	A	✓	64	1984/07/25-1984/10/10	77	600	A	×
21	---	---	---	A	×	65	1943/07/01-2002/09/27	17471.6	3600	A	✓
22	---	---	---	A	×	66	1993/03/25-1999/09/21	1623.6	3600	A	✓
23	---	---	---	A	×	67	1985/10/25-1986/03/17	142	3600	A	×
24	---	8524	---	---	×	68	1985/10/26-1986/03/03	128	3600	A	×
25	---	---	---	A	×	69	1985/10/27-1986/03/21	144	3600	A	×
26	1989/06/19-2006/12/31	6216.4	3600	A	✓	70	1985/06/15-1985/09/23	128	3600	A	×
27	2000/04/20-2007/01/21	2150.5	3600	A	✓	71	1985/06/22-1985/09/09	81	600	A	×
28	2001/04/25-2005/11/07	1562.8	600	A	✓	72	1990	365	---	A	×
29	---	116	---	---	×	73	1984/11/22-1985/02/26	97	600	A	×
30	1976/02/16-1997/01/13	7485.5	3600	A	✓	74	1984/11/23-1985/06/11	201	600	A	×
31	1964/01/03-1997/01/07	11686.2	3600	A	✓	75	1944/03/01-2003/11/01	20921.8	3600	A	✓
32	1990	366	---	A	×	76	2005/03/17-2006/09/01	522	300	A	✓
33	1992/07/03-2003/12/30	4208.0	3600	A	✓	77	2005/03/17-2006/09/01	520.6	300	A	✓
34	2005/01/01-2005/12/31	8675.0	3600	A	×	78	2004/01/01-2007/01/01	1097.2	600	A	✓
35	1993-2000	2922	3600	A	×	79	2000/03/21-2007/01/01	2429.0	600	A	✓
36	1996-2000	1827	3600	A	×	80	1996-2000	1827	---	A	×
37	1990	365	---	A	×	81	2006	365	360	A	×
38	1990	365	---	A	×	82	2006	365	360	A	×
39	1993-1999	2556	3600	A	×	83	1992/08/19-2003/12/30	4034.8	3600	A	✓
40	1943/03/01-2002/12/31	22012.9	3600	A	✓	84	1998/03/19-2006/12/11	3031.6	600	A	✓
41	1998-2000	1096	3600	A	×	85	1998/06/18-2004/06/04	2163.3	600	A	✓
42	1990	365	---	A	×	86	2002/02/01-2005/11/02	1099.0	600	A	✓
43	1993-2000	365	3600	A	×	87	2003/01/02-2003/12/30	339.7	3600	A	✓
44	1943/03/09-2004/12/31	22403.0	3600	A	✓	88	1997/04/07-2005/01/01	2713.4	600	A	✓

**TABLA 3:** Amplitudes (en cm) y fases (en grados, con respecto-Greenwich) de la marea oceánica para los constituyentes M<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, S<sub>2</sub> y K<sub>2</sub> (siguiendo el método indicado en la Tabla E.2). Para cada onda de marea se indica, en caso de disponerse, la desviación estándar obtenida en el proceso de análisis.

Nº	M <sub>2</sub>		N <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		K <sub>2</sub>	
	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
1	107.837	107.0	23.5119	87.0	36.6071	140.0	10.5159	136.0
2	128.5714	103.0	27.7778	82.0	44.4444	136.0	12.6984	133.0
3	86.8961±0.0829	92.569±0.055	18.2867±0.0757	76.819±0.237	29.0433±0.0903	121.913±0.178	8.4879±0.1096	120.944±0.748
4	85.2812±0.1157	94.110±0.078	17.7850±0.1131	76.826±0.364	28.5339±0.1169	122.143±0.239	8.1739±0.1396	119.877±0.982
5	130.0281±0.1727	102.523±0.076	25.6902±0.1431	82.532±0.319	44.1313±0.2379	138.377±0.309	---	---
6	130.2579	103.0	27.9762	82.0	45.2381	136.0	12.9960	134.0
7	121.6270	102.0	26.4881	82.0	41.8651	134.0	12.0040	132.0
8	121.9246	102.0	26.5873	81.0	41.6667	134.0	11.9048	131.0
9	133.9	93.9	27.8	72.3	47.0	127.2	---	---
10	132.8	95.1	27.6	73.6	46.7	128.1	---	---
11	135.7	97.3	28.3	75.7	46.9	130.0	---	---
12	136.1	99.7	28.2	78.1	46.5	133.6	---	---
13	155.9	99.8	33.0	80.4	56.4	130.5	---	---
14	151.4	96.6	32.0	77.0	54.5	127.1	---	---
15	147.7	96.5	31.2	77.3	53.0	127.1	---	---
16	150.6	93.9	31.8	75.1	56.4	125.6	---	---
17	148.6291±0.0776	98.995±0.030	31.0231±0.0804	78.487±0.149	54.2426±0.0747	131.964±0.079	15.4410±0.0662	129.588±0.246
18	145.8	99.7	30.5	81.0	53.3	133.1	14.9	131.5
19	148.3	98.6	30.9	78.6	54.1	131.0	15.6	128.7
20	162.9885±0.0950	103.140±0.033	35.3654±0.1023	83.417±0.166	59.0404±0.0912	136.016±0.088	16.7677±0.0733	133.405±0.250
21	153.3	98.1	33.6	77.3	57.2	131.2	---	---
22	158.6	105.7	31.4	88.2	57.5	138.8	---	---
23	171.0	107.4	35.8	88.4	60.5	140.2	---	---
24	168.4	100.6	35.1	81.6	61.5	133.0	17.6	133.8
25	151.9	97.0	34.8	72.3	54.2	131.9	---	---
26	156.2650±0.0709	97.180±0.026	32.4208±0.0730	77.305±0.129	56.0647±0.0689	129.492±0.071	15.9522±0.0669	126.893±0.240
27	152.8153±0.1412	110.026±0.053	30.8705±0.1483	90.945±0.275	50.3660±0.1359	144.271±0.154	14.5080±0.1156	141.678±0.457
28	134.9809±0.1672	117.998±0.071	27.5455±0.1776	101.070±0.369	44.1861±0.1622	157.792±0.210	12.6160±0.1370	153.546±0.622
29	128.1	110.4	25.6	98.5	42.2	151.3	12.1	148.6
30	123.3606±0.0566	96.278±0.026	26.1316±0.0586	76.018±0.129	43.2129±0.0551	128.922±0.073	12.3615±0.0544	126.052±0.252
31	132.7554±0.0450	92.289±0.019	27.8575±0.0463	71.697±0.095	46.3910±0.0435	124.495±0.054	13.1128±0.0407	121.528±0.178
32	131.3000	92.290	24.1000	84.410	52.9000	126.400	14.4000	148.800
33	132.4905±0.0480	92.256±0.021	27.9722±0.0496	71.946±0.102	46.4843±0.0479	124.326±0.059	13.1464±0.0527	122.240±0.230
34	131.1500	92.860	27.7000	73.760	45.6700	124.700	12.9800	121.840

35	134.2900	95.430	28.2000	76.250	46.5600	128.710	13.0800	126.890
36	131.0800	91.200	27.5200	71.450	45.8300	123.430	13.1100	121.410
37	124.0000	90.000	25.0000	72.000	44.0000	121.000	12.0000	122.000
38	118.1000	87.370	29.7000	68.910	40.4000	107.550	11.0000	129.950
39	120.1800	86.680	25.4200	67.730	42.1900	117.970	11.8100	115.670
40	117.8677±0.0403	85.341±0.020	24.8097±0.0415	65.892±0.096	41.2741±0.0395	115.125±0.054	11.7256±0.0373	112.738±0.182
41	114.3300	80.230	24.2800	61.690	40.0200	110.120	11.2400	108.090
42	104.0000	82.000	21.0000	67.000	38.0000	110.000	10.0000	110.000
43	112.0900	76.740	23.7800	58.300	38.9000	106.220	11.0400	104.070
44	109.0622±0.0252	77.263±0.013	23.1017±0.0260	58.517±0.064	38.2140±0.0247	105.933±0.037	10.8073±0.0234	103.531±0.124
45	87.9960	74.0	19.2460	56.0	29.9603	100.0	8.3333	97.0
46	85.5645±0.1279	67.724±0.086	17.1231±0.1542	52.929±0.517	30.8461±0.1156	91.778±0.215	---	---
47	78.9470±2.0338	55.489±1.476	14.1522±2.3860	53.063±9.637	29.3469±2.2923	77.062±4.472	---	---
48	104.4768±1.0222	58.902±0.561	21.8571±0.8689	43.381±2.282	36.7887±0.8191	88.505±1.275	---	---
49	103.2	72.9	21.7	51.9	36.9	102.8	---	---
50	99.1181±0.0280	64.433±0.016	21.1515±0.0288	47.311±0.078	35.2269±0.0277	90.767±0.045	9.9617±0.0267	88.109±0.154
51	98.3	64.1	21.1	46.8	34.7	90.9	---	---
52	100.5897±0.0616	57.207±0.035	21.4972±0.0638	41.601±0.170	36.2511±0.0593	82.898±0.094	10.1246±0.0508	79.690±0.288
53	100.0000	59.000	20.0000	42.000	32.0000	88.000	10.0000	90.000
54	110.1700	60.970	23.2700	46.060	39.4900	88.830	11.2500	86.050
55	102.0000	56.000	23.0000	41.000	38.0000	82.000	10.0000	83.000
56	104.9700	57.990	22.5100	41.830	38.4700	85.160	10.7600	83.010
57	101.0000	52.120	25.9000	37.750	32.2000	74.810	8.8000	97.210
58	99.4000	51.870	20.5000	47.000	35.0000	87.780	9.5000	110.180
59	94.0800	62.920	19.4900	47.290	32.9200	90.140	9.2700	88.200
60	102.6000	55.090	21.5000	37.540	36.5000	80.250	10.7000	84.070
61	76.22±0.25	53.5±0.5	15.99±0.25	37.0±1.0	27.94±0.25	77.0±0.5	7.86±0.25	72.0±2.0
62	64.90±0.22	49.0±0.5	12.35±0.21	44.0±1.0	22.30±0.22	74.0±1.0	---	---
63	41.4871±0.0175	41.645±0.024	8.7613±0.0181	26.494±0.118	15.7437±0.0173	68.352±0.063	4.4357±0.0164	65.366±0.212
64	31.11±0.21	47.5±0.5	6.99±0.22	35.0±2.0	11.45±0.22	71.0±1.0	---	---
65	31.9576±0.0215	48.534±0.039	6.4226±0.0220	33.190±0.197	11.6957±0.0213	74.046±0.104	3.3350±0.0201	72.784±0.346
66	31.8568±0.1143	51.258±0.206	6.8125±0.1214	35.168±1.022	11.7009±0.1167	78.677±0.574	3.3973±0.1450	80.355±2.446
67	77.8770	56.0	---	---	28.7698	82.0	---	---
68	59.6230	52.0	---	---	22.3214	74.0	---	---
69	53.5714	62.0	---	---	20.9325	83.0	---	---
70	44.0476	48.0	---	---	15.9722	74.0	---	---
71	75.83±0.30	67.0±0.5	14.18±0.29	52.0±1.5	25.68±0.29	92.0±1.0	---	---
72	68.0000	67.00	13.0000	56.00	25.0000	90.00	70.0000	92.00

73	51.81±0.40	69.0±0.5	9.37±0.40	54.0±3.0	20.05±0.41	90.0±2.0	---	---
74	36.36±0.21	46.5±0.5	7.69±0.21	38.0±38.0	14.08±0.21	74.0±1.0	3.95±0.22	66.0±3.0
75	30.2070±0.0127	48.738±0.024	6.3116±0.0131	34.689±0.119	11.4169±0.0125	75.555±0.062	3.4550±0.0119	66.600±0.198
76	19.2585±0.0257	49.211±0.076	4.0674±0.0276	36.095±0.388	7.3748±0.0244	74.371±0.190	2.0202±0.0186	70.563±0.527
77	15.6304±0.0486	50.366±0.178	3.4178±0.0519	35.643±0.870	6.1073±0.0464	74.794±0.432	1.6080±0.0352	72.634±1.252
78	9.6522±0.0254	54.961±0.151	2.0393±0.0267	40.843±0.750	4.0231±0.0245	79.200±0.349	1.0632±0.0190	74.573±1.024
79	1.8229±0.0073	60.694±0.229	0.3126±0.0076	47.614±1.393	0.9592±0.0071	78.618±0.417	0.2203±0.0060	73.554±1.573
80	1.7800	195.650	0.4400	184.130	0.5500	139.020	---	---
81	3.1526	198.25	0.6648	184.93	0.9369	208.51	---	---
82	3.5683	196.1	0.6807	187.8	0.9103	216.4	---	---
83	4.6606±0.0078	213.652±0.096	1.0004±0.0080	201.350±0.460	1.6476±0.0078	232.633±0.272	0.4773±0.0085	229.577±1.025
84	69.8814±0.0834	219.378±0.068	14.4648±0.0860	208.211±0.341	26.2063±0.0817	238.496±0.178	7.5934±0.0756	236.135±0.570
85	64.3194±0.2012	222.332±0.179	13.1543±0.2038	211.000±0.888	23.8154±0.1980	240.449±0.474	7.4425±0.1943	236.320±1.497
86	23.1728±0.1828	195.257±0.452	5.5186±0.1981	182.716±2.057	6.8618±0.1768	221.982±1.476	2.8065±0.1468	207.870±2.998
87	17.7785±0.1898	215.265±0.612	4.3268±0.1962	195.928±2.600	5.7917±0.1849	238.797±1.829	1.9987±0.1557	235.730±4.463
88	27.4346±0.0887	207.165±0.185	5.8583±0.0908	194.084±0.888	9.2380±0.0880	228.209±0.544	2.9151±0.0891	226.429±1.752

**TABLA 4:** Amplitudes (en cm) y fases (en grados, con respecto-Greenwich) de la marea oceánica para los constituyentes O<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>, Q<sub>1</sub> y K<sub>1</sub> (siguiendo el método indicado en la Tabla E.2). Para cada onda de marea se indica, en caso de disponerse, la desviación estándar obtenida en el proceso de análisis.

Nº	O <sub>1</sub>		P <sub>1</sub>		Q <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
1	6.8452	332.0	3.2738	65.0	2.1825	299.0	10.6151	72.0
2	6.7460	327.0	2.3810	61.0	1.9841	283.0	7.0437	74.0
3	5.2713±0.0755	334.374±0.821	1.7971±0.0695	76.447±2.216	1.7638±0.0667	284.914±2.166	6.9497±0.0764	87.236±0.620
4	5.1696±0.0858	334.858±0.951	2.2115±0.0780	75.856±2.021	1.715±0.0821	282.377±2.743	6.5238±0.0833	83.040±0.731
5	6.7937±0.1683	326.667±1.420	---	---	1.8778±0.1348	279.432±4.109	7.3787±0.1327	69.493±1.018
6	6.7460	327.0	2.3810	61.0	1.9841	282.0	6.4484	74.0
7	6.8452	329.0	2.4802	63.0	1.9841	285.0	7.4405	75.0
8	7.4405	328.0	2.6786	63.0	2.0833	283.0	7.8373	76.0
9	7.0	325.3	---	---	---	---	6.4	62.3
10	6.6	325.6	---	---	---	---	6.6	66.9
11	7.1	325.6	---	---	---	---	6.4	68.8
12	6.8	326.1	---	---	---	---	6.8	69.0
13	6.8	326.1	---	---	---	---	5.4	73.8
14	6.8	323.4	---	---	---	---	5.6	71.1
15	6.7	322.9	---	---	---	---	5.8	71.1

16	6.1	326.0	---	---	---	---	6.2	73.2
17	6.2102±0.0385	329.570±0.355	1.9203±0.0416	68.768±1.242	1.9929±0.0395	279.890±1.135	5.9172±0.0395	78.431±0.384
18	6.3	327.7	1.8	60.0	---	---	5.9	75.4
19	6.3	328.3	2.0	64.5	---	---	5.8	75.8
20	6.5568±0.0441	330.783±0.386	2.0896±0.0506	63.675±1.387	2.2295±0.0458	280.131±1.177	6.0098±0.0462	77.399±0.442
21	6.1	329.9	---	---	---	---	6.7	67.4
22	6.6	333.2	---	---	---	---	5.8	78.3
23	6.6	333.2	---	---	---	---	5.8	78.3
24	6.9	325.6	2.1	63.5	---	---	6.0	78.5
25	7.2	327.8	---	---	---	---	6.6	59.5
26	6.8618±0.0320	326.666±0.267	1.9469±0.0323	60.096±0.950	2.1350±0.0326	281.136±0.875	6.0860±0.0321	74.175±0.303
27	7.0391±0.0417	331.103±0.340	2.0442±0.0464	73.242±1.298	2.2461±0.0430	285.549±1.098	5.9058±0.0431	79.156±0.421
28	6.7763±0.0487	337.785±0.412	2.2280±0.0549	76.007±1.415	2.1327±0.0503	287.727±1.351	5.5215±0.0515	86.493±0.535
29	6.8	331.1	2.3	74.1	---	---	5.7	77.3
30	6.7830±0.0204	322.205±0.172	1.8585±0.0203	56.662±0.625	2.0675±0.0208	276.591±0.576	5.7119±0.0203	69.635±0.204
31	7.1243±0.0160	319.241±0.129	1.9690±0.0165	54.571±0.480	2.1816±0.0163	273.825±0.427	6.0274±0.0162	67.256±0.154
32	7.5000	334.470	2.1000	75.090	1.9000	304.100	6.2000	68.020
33	7.1002±0.0267	321.249±0.216	2.0556±0.0246	56.854±0.685	2.1416±0.0273	271.698±0.730	6.4572±0.0258	68.781±0.229
34	6.9600	322.440	2.1500	54.150	2.5100	275.570	6.3500	68.820
35	7.1500	324.020	2.0400	59.060	2.2400	277.080	6.6000	71.490
36	7.0300	323.960	2.2400	59.220	2.1000	280.540	6.8300	70.690
37	7.0000	328.000	3.0000	80.000	1.0000	272.000	8.0000	80.000
38	6.8000	326.090	2.3000	83.010	2.3000	260.610	7.0000	75.940
39	6.7700	324.740	2.3800	60.770	2.1800	271.190	7.6700	73.210
40	6.5967±0.0149	324.117±0.130	2.3424±0.0151	59.250±0.370	2.0955±0.0152	272.318±0.416	7.2148±0.0150	70.655±0.119
41	6.6400	319.650	2.4300	56.620	1.8900	275.910	7.5600	65.170
42	8.0000	318.000	3.0000	43.000	2.0000	276.000	8.0000	43.000
43	6.6500	318.660	2.4200	48.840	2.0400	265.850	7.5300	60.030
44	6.3950±0.0132	319.462±0.118	2.3249±0.0134	52.301±0.331	1.9327±0.0135	268.061±0.400	7.2116±0.0133	61.649±0.105
45	5.1587	323.0	2.0833	56.0	1.2897	272.0	6.4484	66.0
46	5.3235±0.0864	318.247±0.928	---	---	1.4167±0.1052	272.352±4.245	6.7564±0.0843	56.216±0.717
47	5.3258±1.3938	327.413±14.992	---	---	---	---	5.9964±1.1202	61.343±10.665
48	8.5320±1.3034	321.588±8.750	---	---	2.2211±1.0441	212.187±26.910	9.8857±1.4145	47.102±8.251
49	6.2	313.9	---	---	---	---	6.8	60.3
50	6.0853±0.0129	312.993±0.121	2.2070±0.0129	43.526±0.334	1.8247±0.0131	262.157±0.412	6.9373±0.0129	54.030±0.106
51	6.2	313.3	---	---	---	---	7.0	57.0
52	6.1196±0.0267	308.479±0.250	2.2254±0.0292	37.025±0.753	1.8884±0.0272	258.980±0.826	6.9432±0.0276	48.710±0.228
53	6.0000	320.000	2.0000	53.000	1.0000	274.000	6.0000	53.000

54	5.8600	313.480	2.2000	46.500	1.9600	264.890	6.3800	50.160
55	6.0000	309.000	2.0000	49.000	1.0000	259.000	7.0000	49.000
56	6.1200	311.520	2.5100	42.280	1.8300	265.120	6.8100	50.380
57	5.5000	321.150	2.0000	39.780	1.4000	248.230	6.1000	32.710
58	6.9000	302.710	2.2000	51.320	3.4000	284.830	6.6000	44.250
59	6.2800	321.070	2.4200	49.680	1.8200	267.290	6.5500	60.170
60	6.7000	301.980	2.4000	32.320	2.2000	250.760	6.8000	44.120
61	2.47±0.25	298.0±6.0	0.65±0.24	50.0±21.0	0.87±0.24	239.0±16.0	2.74±0.24	59.0±5.0
62	1.84±0.23	313.0±8.0	---	---	0.70±0.22	250.0±19.0	3.75±0.22	75.0±75.0
63	0.4388±0.0108	118.379±1.412	0.6619±0.0109	137.588±0.943	0.4574±0.0110	218.518±1.381	2.6251±0.0108	128.922±0.236
64	0.73±0.22	181.0±17.0	---	---	0.27±0.21	227.0±47.0	2.30±0.21	145.0±5.0
65	0.8161±0.0089	162.094±0.623	0.6963±0.0090	135.903±0.740	0.3512±0.0090	197.781±1.472	2.3251±0.0089	131.067±0.219
66	0.6602±0.0507	159.668±4.399	0.8822±0.0428	130.126±2.781	0.4470±0.0521	196.729±6.681	2.1961±0.0478	131.614±1.245
67	---	---	---	---	---	---	---	---
68	1.4881	292.0	---	---	---	---	2.4802	83.0
69	2.7778	336.0	---	---	---	---	4.3651	76.0
70	1.6865	225.0	---	---	---	---	0.7937	92.0
71	4.79±0.30	324.0±4.0	---	---	1.06±0.30	259.0±16.0	6.07±0.30	60.0±3.0
72	5.0000	327.00	2.0000	80.00	1.0000	272.00	6.0000	80.00
73	2.90±0.40	343.0±8.0	---	---	0.93±0.41	260.0±25.0	4.58±0.40	88.0±5.0
74	1.21±0.21	81.0±10.0	1.32±0.21	127.0±9.0	---	---	3.23±0.21	133.0±4.0
75	2.0332±0.0094	100.706±0.266	1.0501±0.0095	144.058±0.520	0.1137± 0.0096	145.810±4.839	3.7813±0.0094	142.622±0.143
76	1.8236±0.0291	124.662±0.913	1.0164±0.0358	144.032±2.019	0.2055±0.0295	126.459±8.231	3.3051±0.0315	150.721±0.547
77	1.8968±0.0310	121.474±0.937	1.0534±0.0382	148.646±2.060	0.1816±0.0313	110.834±9.883	3.3524±0.0335	154.089±0.571
78	2.2865±0.0333	121.595±0.834	1.2653±0.0393	151.486±1.779	0.2525±0.0339	109.720±7.691	3.6126±0.0352	159.616±0.559
79	2.3196±0.0177	112.456±0.437	1.2542±0.0189	157.205±0.862	0.2377±0.0184	73.782±4.435	3.6215±0.0178	164.482±0.281
80	2.5400	106.070	1.3500	153.540	0.3900	66.520	3.8100	160.440
81	2.5362	92.53	1.4834	143.40	---	---	3.4858	155.76
82	2.5022	97.7	1.2434	148.3	---	---	3.5121	153.7
83	2.3648±0.0180	102.510±0.436	1.1416±0.0166	160.668±0.832	0.3149±0.0183	52.650±3.332	3.7515±0.0174	166.587±0.266
84	19.1591±0.1659	104.042±0.496	11.4966±0.1720	173.127±0.859	2.4787±0.1700	44.680±3.931	35.0983±0.1685	178.984±0.274
85	18.0007±0.2638	106.085±0.840	11.4415±0.2647	168.461±1.323	2.3544±0.2678	35.076±6.516	33.6590±0.2627	179.653±0.447
86	22.5018±0.3023	102.466±0.770	14.7968±0.3417	157.124±1.333	1.9120±0.3116	63.881±9.336	37.7477±0.3185	163.204±0.488
87	21.9195±0.4366	109.812±1.142	12.2607±0.5014	159.447±2.324	2.2857±0.4272	46.769±10.708	39.0081±0.4611	168.408±0.674
88	21.3001±0.2035	104.706±0.548	12.1347±0.1991	159.663±0.938	2.5884±0.2075	50.998±4.593	36.1825±0.2022	168.575±0.321



# **Listado de Datos Mareográficos Utilizados en el Proceso de Asimilación para la Construcción del Modelo CIAM2**

**TABLA 5:** Localización de los mareógrafos costeros y sensores de presión de fondo asimilados en el modelo de marea oceánica CIAM2 (Fig. 6.3). Se indica la procedencia de los datos: fuente, organismo distribuidor de las series de datos (o, en su defecto, se referencia la fuente de las constantes armónicas facilitadas) y la red de observación (nacional o internacional) a la que pertenece (junto con el código de estación asociado a dicha red).

ESTACIONES MAREÓGRAFICAS						
ESTACIÓN		LOCALIZACIÓN			PROCEDENCIA DE LOS DATOS	
Nº	Nombre	Isla	Lat (°N)	Lon (°E)	Fuente/Referencia	Red de Observación
1	LA ESTACA	El Hierro	27.8000	-17.8930	PE/REDMAR (2004)	REDMAR-3460
2	S. C. PALMA	La Palma	28.6797	-17.7664	IEO <sup>(1)</sup>	IEO-017, PSMSL-370/015
3	GRANADILLA	Tenerife	28.0833	-16.5150	PE/REDMAR (2004)	REDMAR-3461
4	S.C. TENERIFE	Tenerife	28.4783	-16.2403	PE/REDMAR (2004)	REDMAR3462, PSMSL370/032
5	ARINAGA	Gran Canaria	27.8500	-15.4000	PE/REDMAR (2004)	REDMAR-3466
6	LAS PALMAS	Gran Canaria	28.1481	-15.4064	PE/REDMAR (2004)	REDMAR-3464, GLOSS-251
7	PTO. LUZ	Gran Canaria	28.1480	-15.4075	IEO	IEO016, ESEAS-PLUZ, PSMSL370/04X, GLOSS251
8	ROSARIO	Fuerteventura	28.5000	-13.8517	PE/REDMAR (2004)	REDMAR-3468
9	ARRECIFE-IEO	Lanzarote	28.9717	-13.5300	IEO <sup>(1)</sup>	IEO-015, PSMSL-370/004

(1) Fanjul et al. (1997) y /García et al. (1992)

**TABLA 6:** Periodo de observación, longitud del registro (en días), intervalo de muestreo (en segundos) y método de análisis empleado para la obtención de las constantes armónicas en las correspondientes estaciones mareográficas. Se indica si las constantes armónicas han sido obtenidas a partir del análisis de las series temporales disponibles (en caso contrario, las constantes armónicas corresponden a las publicadas por la referencia citada en la Tabla 5).

SERIES TEMPORALES REGISTRADAS POR LOS MAREÓGRAFOS						
Nº	Nombre	Periodo	Longitud	Int. Muestreo	Método Análisis	<sup>3</sup>
1	LA ESTACA	2004/05/20 a 2004/12/31	225	3600	Armónico	✗
2	S. C. PALMA	---	366	---	---	✗
3	GRANADILLA	2004/01/01 a 2004/31/12	366	3600	Armónico	✗
4	S. C. TENERIFE	2004/01/01 a 2004/31/12	366	3600	Armónico	✗
5	ARINAGA	2004/01/01 a 2004/31/12	366	3600	Armónico	✗
6	LAS PALMAS	2004/01/01 a 2004/31/12	366	3600	Armónico	✗
7	PTO. LUZ	1991/05/07 a 1999/01/12	2806	3600	Armónico	✓
8	ROSARIO	2004/01/01 a 2004/31/12	366	3600	Armónico	✗
9	ARRECIFE-IEO	---	366	---	---	✗

**TABLA 7:** Amplitudes (en cm) y fases (en grados, con respecto a Greenwich) de la marea oceánica para los ocho constituyentes de marea principales. Para cada onda de marea se indica, en caso de disponerse, la desviación estándar estimada en el proceso de análisis.

Nº	M <sub>2</sub>		N <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		K <sub>2</sub>		O <sub>1</sub>		P <sub>1</sub>		Q <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase	Am	Fase
1	59.09	22.61	12.00	8.46	24.05	44.24	6.82	41.14	4.17	292.91	1.81	18.6	1.58	235.93	6.14	35.01
2	63.2	28.7	11.9	18.4	23.4	54.9	5.9	41.0	4.3	294.2	2.7	41.2	---	---	6.1	41.3
3	60.94	26.07	12.60	11.81	24.45	47.09	6.95	43.62	4.69	292.19	1.71	35.08	1.69	232.84	5.96	40.17
4	73.24	29.14	14.99	14.87	27.85	52.30	7.96	48.95	4.68	293.10	2.28	23.05	1.69	235.01	6.44	41.01
5	68.21	28.17	14.05	14.00	26.55	50.37	7.49	46.15	4.69	293.02	1.83	24.55	1.69	234.89	6.10	37.23
6	76.53	28.16	15.75	14.05	28.99	51.81	8.21	48.44	4.79	294.89	1.68	31.53	1.75	235.69	6.23	40.89
7	74.50±0.05	28.50	15.42±0.05	14.25	28.34±0.05	53.00	7.94±0.06	49.73	4.82±0.02	293.26	1.77±0.02	29.81	1.53±0.02	239.45	6.10±0.02	40.81
8	81.02	35.10	16.76	19.65	30.48	57.90	8.72	53.48	5.10	296.51	2.11	35.00	---	---	6.02	41.52
9	79.0	41.5	14.4	28.1	28.9	63.1	9.1	69.0	5.1	300.5	2.1	36.4	---	---	6.7	50.7

<sup>3</sup> Se especifica sí las series temporales han sido analizadas en este trabajo.

**TABLA 8:** Localización y series de datos de los nuevos sensores radar (pertenecientes a PE) instalados en las Islas Canarias, con observaciones disponibles a partir del años 2009. Se indica el periodo de observación de la serie temporal considerada (longitud del registro, en días, e intervalo de muestreo, en segundos) para la determinación de las constantes armónicas en estos emplazamientos. En este caso, todas las series temporales han sido procesadas mediante análisis armónico utilizando el programa VAV.

ESTACIONES MAREÓGRAFICAS								
ESTACIÓN		LOCALIZACIÓN			REDMAR	SERIES TEMPORALES		
Nº	Nombre	Isla	Lat (°N)	Lon (°E)		Periodo	Long.	Muestreo
10	PALMA	La Palma	28.678	-17.768	3465	2009/2/3-2009/12/19	305	300
11	PALMAS-2	Gran Canaria	28.141	-15.412	3450	2009/2/3-2009/12/30	287	300
12	ARRECIFE-PE	Lanzarote	28.967	-13.5300	3470	2009/2/3-2009/12/30	304	300
13	GOMERA	La Gomera	28.0880	-17.1080	3463	2009/2/06-2009/12/18	285	300

**TABLA 9:** Amplitudes (en cm) y fases (en grados, respecto a Greenwich) de la marea oceánica, estimadas a partir del análisis de las series temporales descritas en la Tabla 8, para los constituyentes M<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, S<sub>2</sub> y K<sub>2</sub>.

Nº	Nombre	M <sub>2</sub>		N <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		K <sub>2</sub>	
		Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
10	LA PALMA	65.15±0.07	29.92±0.06	12.99±0.07	16.46±0.33	25.48±0.07	53.37±0.16	7.08±0.06	50.09±0.51
11	LAS PALMAS-2	75.91±0.12	27.94±0.09	14.95±0.12	13.62±0.46	29.23±0.12	53.04±0.23	8.25±0.10	49.69±0.70
12	ARRECIFE-PE	84.43±0.08	34.65±0.06	16.93±0.09	19.34±0.29	31.83±0.08	58.44±0.15	8.97±0.07	54.73±0.46
13	GOMERA	57.92±0.10	23.92±0.10	11.45±0.11	10.21±0.53	23.30±0.10	45.63±0.25	6.53±0.09	41.96±0.77

**TABLA 10:** Amplitudes (en cm) y fases (en grados, respecto a Greenwich) de la marea oceánica, estimadas a partir del análisis de las series temporales descritas en la Tabla 8, para los constituyentes O<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>, Q<sub>1</sub> y K<sub>1</sub>.

Nº	Nombre	O <sub>1</sub>		P <sub>1</sub>		Q <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
		Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
10	LA PALMA	4.62±0.05	292.82±0.60	1.88±0.06	31.76±1.68	1.18±0.05	238.98±2.43	5.84±0.05	41.40±0.51
11	LAS PALMAS-2	4.91±0.05	292.10±0.59	1.74±0.06	24.88±1.92	1.33±0.05	235.70±2.26	6.34±0.05	39.06±0.49
12	ARRECIFE-PE	5.31±0.06	294.85±0.68	2.17±0.07	28.17±1.90	1.33±0.07	242.07±2.83	6.85±0.07	43.21±0.56
13	GOMERA	4.34±0.04	288.48±0.55	1.66±0.05	25.96±1.65	1.18±0.04	234.38±2.10	5.52±0.04	33.39±0.46



**FIGURA 1:** Mareógrafos S. C. PALMA (IEO) y LA PALMA (PE) en La Palma. LA PALMA (de tipo radar) se ubica en el espigón de entrada a la dársena deportiva en el puerto de Santa Cruz de la Palma. Fotografía PE



**FIGURA 2:** Mareógrafos ARRECIFE-IEO (IEO) y ARRECIFE-PE (PE), en Lanzarote. ARRECIFE-PE (de tipo radar) se sitúa al final del muelle de contenedores, mientras que ARRECIFE-IEO al inicio. Fotografía PE



Fotografía PE

**FIGURA 3:** Mareógrafos LAS PALMAS y LAS PALMAS-2 en la isla de Gran Canaria. LAS PALMAS-2 (de tipo radar) se instaló en Marzo de 2008 para sustituir LAS PALMAS (de tipo acústico).

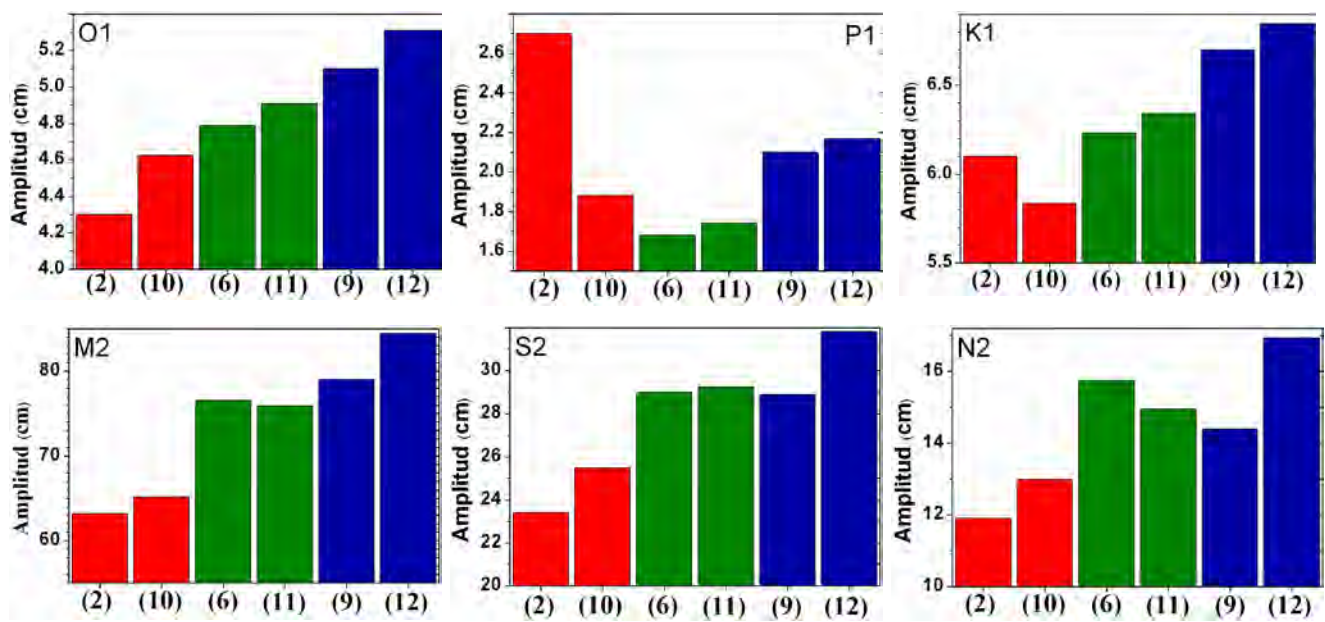


**FIGURA 4:** Mareógrafo GOMERA.

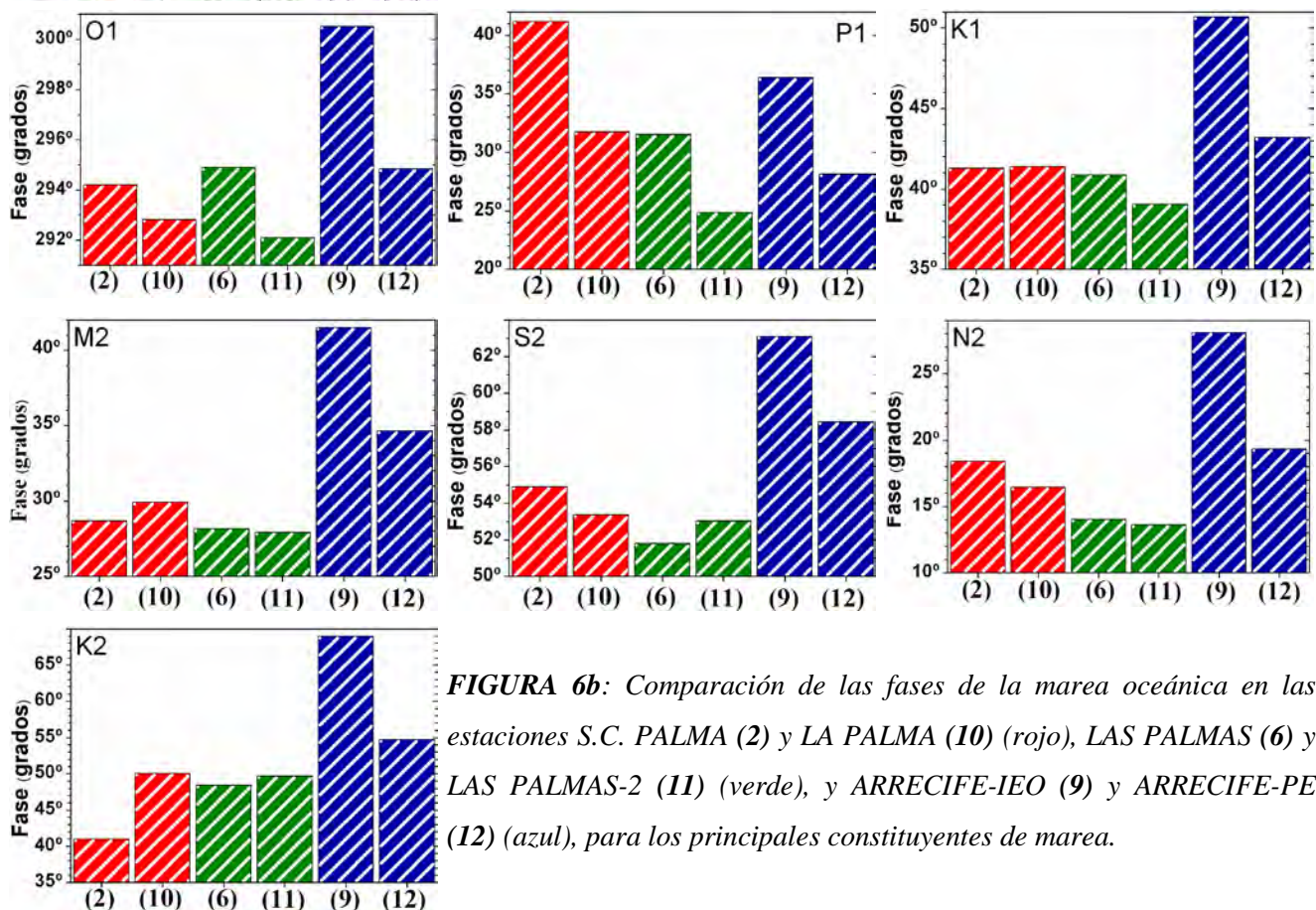


**FIGURA 6:** Localización del mareógrafo GRANADILLA en la isla de Tenerife. El sensor (de tipo presión) se encuentra situado en un pequeño muelle a unos 800 m al noreste del dique del puerto de Granadilla.





**FIGURA 6a:** Comparación de las amplitudes (cm) de la marea oceánica en las estaciones S.C. PALMA (2) y LA PALMA (10) (rojo), LAS PALMAS (6) y LAS PALMAS-2 (11) (verde), y ARRECIFE-IEO (9) y ARRECIFE-PE (12) (azul), para los principales constituyentes de marea.



**FIGURA 6b:** Comparación de las fases de la marea oceánica en las estaciones S.C. PALMA (2) y LA PALMA (10) (rojo), LAS PALMAS (6) y LAS PALMAS-2 (11) (verde), y ARRECIFE-IEO (9) y ARRECIFE-PE (12) (azul), para los principales constituyentes de marea.

# Valores Numéricos del cálculo del EOI en la Península Ibérica, Melilla y el Archipiélago Canario

Todos los cálculos de carga presentados en este Apéndice se han realizado con el programa ECOM V.0.1, descrito en la Sección 2.6.1 (Cap. 2). En primer lugar, se presentan los resultados del EOI (para las variaciones de gravedad y los desplazamientos en la superficie terrestre) obtenidos en la Península Ibérica (estaciones ALG, MEL, V-ABS y P-IAG) y en las estaciones pertenecientes a la Red de Marea Gravimétrica Española. Posteriormente, se presentan los resultados obtenidos en las Islas Canarias las Islas Canarias (estaciones CV, TP y AU).

- En la **Tabla 11** los resultados (para las ondas  $N_2$ ,  $K_2$ ,  $Q_1$  y  $P_1$ ) se obtienen a partir de 6 modelos oceánicos globales<sup>4</sup> suplementados con el modelo regional IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en función de la distancia entre la estación y el océano. Específicamente, la cuadrícula oceánica se refina en un área de  $2^\circ$  en torno a la estación MEL (que se encuentra a menos de 1 km de la costa) y de  $3^\circ$  en torno a la estación ALG (que se encuentra a unos 55 km de la costa). Para las estaciones V-ABS y P-IAG (ambas distan más de 300 km de la costa) la resolución de la cuadrícula oceánica es la propia del modelo IBER01. Las funciones de Green de carga utilizadas son GB-CC, interpoladas mediante una spline cúbica y el valor de la densidad del agua del mar se ha tomado igual a  $1.027 \text{ kg/m}^3$ . Los resultados para las ondas  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $O_1$  y  $K_1$  están listados en las Tablas 6.5 a 6.8 (Cap. 6).
- En la **Tabla 12** se lista, para las estaciones y ondas de marea anteriores, la componente Newtoniana de las variaciones de gravedad causadas por el EOI.
- En la **Tabla 13** se especifica la contribución al EOI total del área delimitada por el modelo IBER01.
- La **Tabla 14** presenta los desplazamientos de la superficie terrestre (NS y EO) causados por el EOI en las estaciones ALG, MEL, V-ABS y P-IAG. En todos los casos, los cálculos se realizan según lo descrito para la Tabla 11, aunque únicamente se presentan los resultados obtenidos para el modelo global FES2004 suplementado con IBER01.
- En la **Tabla 15** se presentan los resultados obtenidos en las estaciones de marea gravimétrica en la Península Ibérica, establecidas con anterioridad a 2005 e incluidas en el banco de datos ICET. Estos resultados se han obtenido empleando en los cálculos el modelo global FES2004, suplementado con el modelo regional IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en función de la distancia entre la estación y el océano. El criterio de refinamiento es que a distancias angulares entre la estación y el océano de

---

<sup>4</sup> Los modelos globales son: GOT00.2 (Ray, 1999), CSR4.0 (Eanes y Bettadpur, 1996), TPX07.1 (Egbert y Erofeeva, 2002), FES2004 (Lyard et al., 2006), GOT4.7 (Ray, comunicación personal), AG2006 (Andersen et al., 2006b). Todos ellos están descritos en la Secc. 3.3.3, Cap. 3.

- 0 – 50 km, el radio de refinamiento es de 2° (estaciones 0403, 0404, 0406, 0411, 0427, 0434, 0480).
- 50 – 150 km, el radio de refinamiento es de 3° (estaciones 0405, 0420 y 0424).
- 150 – 200 km, el radio de refinamiento es de 4° (estaciones 0405, 0417 y 0433).
- Para las restantes estaciones (0406, 0407, 0409, 0410, 0412, 0413, 0414 y 0419), la resolución de la cuadrícula es la propia del modelo IBER01.

Las funciones de Green de carga utilizadas son GB-CC y su interpolación para las distancias correspondientes se realiza mediante una spline cúbica. El valor para la densidad del agua del mar se considera de 1.027 kg/m<sup>3</sup>.

- Análogamente, la **Tabla 16** lista los desplazamientos de la superficie terrestre originados por EOI en las estaciones que conforman la Red de Marea de la Península Ibérica.
- En la **Tabla 17** los resultados (para las ondas N<sub>2</sub>, K<sub>2</sub>, Q<sub>1</sub> y P<sub>1</sub>) obtenidos a partir de 6 modelos oceánicos globales suplementados con el modelo regional CIAM2, con un refinamiento de la cuadrícula oceánica de 0,75° en torno a las estaciones CV y AU y de 1,5° en torno a TP. Las funciones de Green de carga utilizadas son GB-CO, interpoladas mediante una spline cúbica y el valor de la densidad del agua del mar igual a 1.027 kg/m<sup>3</sup>. Los resultados para las ondas M<sub>2</sub>, S<sub>2</sub>, O<sub>1</sub> y K<sub>1</sub> están listados en las Tablas 6.11 a 6.14 (Cap. 6).
- En la **Tabla 18** se lista, para las estaciones y ondas de marea anteriores, la componente Newtoniana de las variaciones de gravedad causadas por el EOI.
- En la **Tabla 19** se especifica la contribución al EOI total del área delimitada por el modelo CIAM2.
- En la **Tabla 20** los desplazamientos de la superficie terrestre (NS y EO) causados por el EOI, para GOT00.2 + IBER01.

**TABLA 11.** Variaciones de gravedad causadas por el EOI (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases, en grados, locales), calculadas a partir de seis modelos oceánicos globales suplementados con el modelo regional IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Onda	Estación	GOT00+IBER01		CSR4.0+IBER01		TPX07.1+IBER01		FES2004+IBER01		GOT4.7+IBER01		AG2006+IBER01	
		L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$
$N_2$	MEL	0.77	127.32	0.77	128.86	0.76	127.62	0.78	129.31	0.77	127.09	0.77	127.70
	ALG	1.05	134.99	1.05	136.23	1.03	135.28	1.05	136.46	1.04	134.79	1.05	135.32
	V-ABS	0.96	119.54	0.96	120.52	0.96	119.76	0.97	121.35	0.97	119.46	0.97	119.86
	P-IAG	0.91	118.70	0.90	119.73	0.90	118.93	0.91	120.62	0.91	118.61	0.91	119.03
$K_2$	MEL	0.32	101.09	0.34	97.86	0.33	95.31	0.33	94.33	0.33	96.89	0.34	96.06
	ALG	0.44	103.33	0.47	101.13	0.46	99.28	0.46	98.35	0.46	100.38	0.47	100.06
	V-ABS	0.38	81.28	0.40	80.16	0.41	77.56	0.41	77.21	0.41	78.77	0.42	79.12
	P-IAG	0.36	81.21	0.38	79.95	0.38	77.16	0.38	76.82	0.38	78.46	0.39	78.77
$Q_1$	MEL	0.06	-73.69	0.07	-78.37	0.07	-70.70	0.05	-97.42	0.06	-74.70	0.06	-69.86
	ALG	0.10	-73.11	0.12	-75.96	0.12	-70.85	0.09	-86.20	0.10	-73.24	0.11	-70.11
	V-ABS	0.10	-85.87	0.11	-87.20	0.11	-82.89	0.09	-101.49	0.09	-87.11	0.10	-81.89
	P-IAG	0.09	-86.27	0.11	-87.70	0.10	-83.21	0.09	-102.81	0.09	-87.71	0.10	-82.22
$P_1$	MEL	0.09	83.42	0.09	91.17	0.09	85.16	0.08	83.01	0.08	81.34	0.08	88.31
	ALG	0.12	111.12	0.13	116.00	0.12	112.30	0.12	111.95	0.12	109.95	0.12	114.45
	V-ABS	0.12	99.41	0.13	104.30	0.12	101.02	0.11	98.30	0.12	97.96	0.12	102.55
	P-IAG	0.12	98.21	0.12	103.37	0.12	99.90	0.11	97.04	0.11	96.70	0.12	101.62

**TABLA 12.** Para el modelo GOT00.2, la componente de atracción Newtoniana EOI ( $A$  = amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y  $F$  = fases, en grados, locales).

Estación	$N_2$		$M_2$		$S_2$		$K_2$		$Q_1$		$O_1$		$P_1$		$K_1$	
	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.
MEL	0.27	124.60	1.21	110.27	0.47	91.57	0.11	105.56	0.03	-84.33	0.09	-123.04	0.02	142.05	0.09	116.87
ALG	0.32	130.84	1.44	116.18	0.53	95.80	0.13	106.18	0.04	-79.77	0.14	-115.94	0.04	152.65	0.12	143.25
V-ABS	0.32	118.35	1.44	102.02	0.51	80.06	0.12	87.85	0.04	-90.49	0.14	-124.61	0.03	142.35	0.11	130.18
P-IAG	0.30	117.45	1.36	101.28	0.48	79.74	0.11	88.11	0.04	-91.21	0.13	-124.72	0.03	144.18	0.10	131.86

**TABLA 13.** Para el modelo GOT00.2, contribución al EOI total (Tabla 11) del área delimitada por el modelo IBER01.

Estación	$N_2$		$M_2$		$S_2$		$K_2$		$Q_1$		$O_1$		$P_1$		$K_1$	
	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.
MEL	0.52	132.63	2.37	115.11	0.87	89.80	0.23	96.83	0.02	-82.07	0.06	155.22	0.06	52.46	0.25	57.17
ALG	0.73	139.47	3.42	122.27	1.21	95.97	0.33	99.97	0.06	-75.68	0.15	-135.95	0.06	111.75	0.22	105.44
V-ABS	0.67	125.44	3.12	107.02	1.09	78.46	0.30	80.39	0.06	-82.84	0.15	-142.55	0.06	110.75	0.21	100.22
P-IAG	0.62	124.82	2.90	106.40	1.02	77.96	0.28	80.07	0.09	-86.27	0.14	-144.06	0.06	107.91	0.20	97.29



**TABLA 14.** Desplazamiento radial causadas por el EOI (amplitudes en mm y fases, en grados, locales), calculadas utilizando el modelo global FES2004 suplementado con el modelo regional IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Onda	Estación	RADIAL		TANGENCIAL NS		TANGENCIAL EO	
		L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$
N <sub>2</sub>	MEL	2.53	119.43	0.36	75.81	0.98	-141.98
	ALG	3.51	130.16	0.36	138.34	1.40	-144.54
	V-ABS	3.20	114.95	0.64	94.04	0.96	-133.53
	P-IAG	3.03	113.83	0.60	94.06	0.94	-133.29
M <sub>2</sub>	MEL	11.65	103.69	1.88	100.07	4.40	-125.63
	ALG	16.25	114.08	2.06	153.98	6.41	-128.21
	V-ABS	14.84	97.14	3.30	114.76	4.35	-115.47
	P-IAG	14.06	96.10	3.11	114.92	4.24	-115.26
S <sub>2</sub>	MEL	4.12	81.33	0.64	140.20	1.52	-104.11
	ALG	5.68	90.45	0.88	-171.84	2.22	-105.24
	V-ABS	5.03	70.60	1.24	150.79	1.40	-91.15
	P-IAG	4.77	69.75	1.16	151.11	1.36	-90.91
K <sub>2</sub>	MEL	1.09	85.22	0.19	144.56	0.41	-108.06
	ALG	1.53	93.14	0.26	-170.57	0.61	-107.81
	V-ABS	1.36	71.77	0.34	152.52	0.38	-91.51
	P-IAG	1.29	71.02	0.32	152.96	0.37	-91.13
Q <sub>1</sub>	MEL	0.18	-31.94	0.10	-42.34	0.07	72.34
	ALG	0.29	-49.77	0.10	-11.06	0.12	73.02
	V-ABS	0.22	-64.98	0.09	-34.07	0.09	89.62
	P-IAG	0.20	-63.56	0.09	-33.43	0.09	89.53
O <sub>1</sub>	MEL	0.38	62.96	0.26	-16.35	0.19	124.91
	ALG	0.07	-165.24	0.23	28.12	0.37	122.97
	V-ABS	0.34	125.34	0.23	9.94	0.28	141.55
	P-IAG	0.35	117.12	0.22	9.20	0.28	140.79
P <sub>1</sub>	MEL	0.67	65.49	0.03	154.18	0.06	-105.40
	ALG	0.76	80.29	0.09	175.15	0.13	-132.74
	V-ABS	0.82	73.37	0.08	151.53	0.12	-127.27
	P-IAG	0.80	72.09	0.08	154.69	0.11	-128.41
K <sub>1</sub>	MEL	2.22	64.98	0.09	174.90	0.25	-100.10
	ALG	2.41	79.34	0.29	172.87	0.42	-131.47
	V-ABS	2.62	71.84	0.26	151.02	0.37	-124.61
	P-IAG	2.56	70.54	0.25	154.02	0.36	-126.11

**TABLA 15.** Variaciones de gravedad causadas por el EOI (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases, en grados, locales), calculadas utilizando el modelo global FES2004 suplementado con IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Estación	M2		S2		O1		K1	
	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$		
0401	4.39	102.15	1.49	75.95	0.26	-145.30	0.38	93.38
0402	4.13	101.35	1.40	75.38	0.24	-146.31	0.36	92.00
0403	3.67	110.88	1.28	87.58	0.19	-139.44	0.31	92.94
0404	8.29	94.30	2.86	64.33	0.46	-147.34	0.61	94.69
0405	5.40	96.14	1.84	67.84	0.31	-148.95	0.45	91.33
0406	6.29	125.52	2.23	101.64	0.38	-125.26	0.49	117.78
0407	4.56	99.02	1.55	72.06	0.27	-147.74	0.39	91.45
0409	5.60	104.21	1.90	77.13	0.33	-143.10	0.48	96.74
0410	4.06	104.14	1.38	78.78	0.24	-143.81	0.36	94.10

0411	2.50	80.21	0.85	54.86	0.14	169.99	0.31	51.59
0412	4.65	101.05	1.58	74.33	0.28	-145.94	0.40	93.20
0413	3.86	106.46	1.33	81.89	0.23	-141.95	0.34	95.04
0414	4.44	100.91	1.51	74.43	0.26	-146.30	0.39	92.57
0417	3.43	97.55	1.17	72.25	0.20	-152.61	0.31	84.31
0419	5.09	110.50	1.74	84.98	0.31	-138.21	0.44	101.00
0420	4.86	89.93	1.66	61.23	0.28	-154.74	0.40	85.67
0424	2.74	80.59	0.93	54.02	0.16	-178.05	0.29	61.34
0427	8.93	109.08	3.04	81.18	0.52	-140.43	0.74	101.55
0433	3.73	92.76	1.26	65.96	0.22	-155.78	0.33	82.89
0434	8.16	99.55	2.80	70.32	0.46	-145.10	0.64	96.60
0480	8.49	116.51	2.91	89.96	0.50	-133.50	0.70	107.56

**TABLA 16a.** Desplazamiento radial causado por el EOI (amplitudes en mm y fases, en grados, locales), calculado para el modelo global FES2004 suplementado con IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Estación	RADIAL							
	M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		O <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ
0401	14.84	97.20	5.03	70.66	0.34	125.41	2.62	71.87
0402	14.06	96.10	4.77	69.75	0.35	117.13	2.56	70.54
0403	12.55	103.93	4.35	80.41	0.29	77.73	2.30	69.02
0404	29.42	92.37	10.18	62.19	0.85	-176.57	3.47	78.12
0405	18.69	92.71	6.37	64.10	0.47	148.43	2.90	72.67
0406	21.71	121.77	7.66	97.87	0.43	-120.52	2.62	89.03
0407	14.84	97.20	5.28	67.22	0.39	129.62	2.69	71.24
0409	19.03	100.54	6.47	73.18	0.42	161.15	2.96	76.68
0410	13.79	98.60	4.68	72.87	0.31	114.42	2.51	71.36
0411	9.27	73.88	3.13	47.59	0.82	85.44	2.54	49.47
0412	15.82	96.55	5.37	69.48	0.37	133.63	2.70	72.45
0413	13.10	100.35	4.47	75.44	0.28	103.41	2.42	71.03
0414	15.07	96.13	5.11	69.29	0.36	126.78	2.64	71.58
0417	11.86	91.33	4.02	65.53	0.44	96.57	2.42	65.08
0419	17.08	106.05	5.82	80.30	0.27	160.29	2.75	77.84
0420	17.20	86.54	5.89	57.48	0.52	133.76	2.78	68.33
0424	9.99	75.05	3.38	47.70	0.73	91.44	2.46	54.03
0427	31.09	107.10	10.62	79.04	0.96	-162.39	3.91	85.62
0433	13.06	87.70	4.43	60.40	0.48	107.48	2.53	65.13
0434	28.60	97.44	9.82	68.02	0.83	-174.46	3.58	80.22
0480	29.72	114.35	10.18	87.63	0.86	-147.66	3.66	89.06

**TABLA 16b.** Desplazamiento tangencial NS y EO originado por el EOI (amplitudes en mm y fases, en grados, locales), calculado para el modelo global FES2004 suplementado con IBER01, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Estación	TANGENCIAL NS								TANGENCIAL EO							
	M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		O <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>		M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		O <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ	L	λ
0401	3.30	114.79	1.23	150.82	0.23	10.01	0.27	151.04	4.35	-115.52	1.40	-91.20	0.28	141.49	0.37	-124.64
0402	3.11	114.91	1.16	151.11	0.22	9.20	0.25	154.01	4.24	-115.25	1.36	-90.91	0.28	140.80	0.36	-126.10
0403	2.03	115.66	0.76	154.35	0.23	1.13	0.19	165.68	4.61	-124.43	1.55	-101.99	0.26	126.54	0.31	-126.86
0404	3.21	-132.91	1.22	-105.45	0.24	89.69	0.39	-156.64	10.77	-97.62	3.63	-67.13	0.59	147.59	0.78	-111.00
0405	1.78	170.59	0.75	-157.06	0.17	52.31	0.29	-176.16	6.79	-102.96	2.23	-74.23	0.40	147.72	0.53	-114.72
0406	2.96	-175.26	1.24	-147.71	0.27	53.73	0.41	-179.36	8.62	-130.31	3.02	-106.77	0.53	119.78	0.59	-139.38
0407	3.30	114.79	1.39	148.26	0.23	5.27	0.26	146.48	4.35	-115.52	1.40	-87.35	0.28	145.75	0.38	-121.24
0409	4.23	113.66	1.58	149.04	0.26	10.27	0.32	139.53	4.78	-116.10	1.56	-91.82	0.30	144.69	0.42	-119.70
0410	2.84	116.57	1.07	153.08	0.22	12.10	0.26	156.58	4.28	-117.76	1.39	-93.96	0.28	137.09	0.36	-129.14
0411	1.86	114.75	0.70	153.81	0.18	-33.99	0.08	-68.68	3.51	-100.77	1.06	-74.83	0.19	-179.32	0.33	-81.59
0412	3.68	113.42	1.37	149.17	0.24	7.95	0.27	146.56	4.41	-114.21	1.42	-89.59	0.28	144.17	0.38	-121.99
0413	2.49	117.71	0.94	154.78	0.21	12.36	0.25	160.89	4.25	-120.14	1.39	-96.86	0.29	132.37	0.35	-134.27
0414	3.46	113.93	1.29	149.82	0.23	8.27	0.26	149.43	4.34	-114.36	1.40	-89.78	0.28	143.16	0.38	-123.33
0417	2.30	117.55	0.87	155.18	0.19	-1.63	0.16	171.13	4.02	-112.39	1.29	-88.30	0.21	152.80	0.32	-103.65
0419	3.16	119.94	1.21	156.08	0.25	19.87	0.31	150.33	5.05	-120.56	1.68	-96.83	0.32	135.77	0.42	-126.58
0420	1.52	-167.69	0.64	-137.68	0.14	61.50	0.27	-161.53	6.86	-98.17	2.25	-68.38	0.40	151.81	0.53	-111.88
0424	1.89	118.41	0.71	156.91	0.15	-25.03	0.07	-119.27	3.83	-97.93	1.16	-70.68	0.21	179.31	0.35	-82.48
0427	3.58	-169.74	1.50	-142.76	0.30	71.80	0.43	-176.09	7.97	-112.80	2.70	-86.89	0.46	144.22	0.68	-115.41
0433	1.56	141.12	0.63	178.50	0.14	18.86	0.19	-170.61	4.86	-104.40	1.55	-77.24	0.28	155.26	0.39	-106.04
0434	2.52	-176.81	1.06	-146.82	0.22	63.69	0.35	-177.85	8.31	-103.70	2.77	-75.22	0.47	148.10	0.67	-112.27
0480	3.87	-170.81	1.58	-144.88	0.34	69.01	0.47	-177.33	8.83	-119.16	2.99	-93.67	0.51	133.22	0.70	-122.83

**TABLA 17.** Variaciones de gravedad causadas por el EOI (amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y fases, en grados, locales), calculadas a partir de seis modelos oceánicos globales suplementados con el modelo regional CIAM2, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Onda	Estación	GOT00+CIAM2		CSR4.0+ CIAM2		TPX07.1+ CIAM2		FES2004 +CIAM2		GOT4.7+ CIAM2		AG2006+ CIAM2	
		L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$
N <sub>2</sub>	CV	1.74	176.72	1.79	178.12	1.73	177.11	1.76	177.20	1.73	176.63	1.75	177.26
	TP	1.93	-168.56	1.96	-167.38	1.91	-168.20	1.95	-168.27	1.92	-168.60	1.94	-168.07
	AU	2.05	-160.15	2.08	-159.06	2.08	-159.06	2.07	-159.97	2.03	-160.14	2.05	-159.67
K <sub>2</sub>	CV	0.87	148.13	0.90	144.08	0.88	144.83	0.85	142.19	0.88	145.55	0.90	144.90
	TP	1.06	164.98	1.07	161.51	1.06	162.14	1.03	160.01	1.07	162.74	1.08	161.96
	AU	1.25	173.12	1.26	169.90	1.26	169.90	1.21	168.66	1.26	171.15	1.26	170.42
Q <sub>1</sub>	CV	0.22	-45.06	0.25	-49.35	0.24	-43.05	0.20	-49.40	0.22	-42.65	0.23	-42.29
	TP	0.30	-40.36	0.33	-42.87	0.32	-38.53	0.28	-42.92	0.30	-38.07	0.31	-37.96
	AU	0.31	-38.66	0.34	-40.99	0.34	-40.99	0.29	-40.80	0.32	-36.07	0.32	-35.79
P <sub>1</sub>	CV	0.22	152.56	0.24	155.47	0.23	153.11	0.23	152.87	0.22	152.29	0.24	156.25
	TP	0.28	163.76	0.29	166.02	0.28	163.94	0.28	164.31	0.27	163.76	0.29	167.02
	AU	0.32	169.22	0.34	171.17	0.34	171.17	0.33	169.53	0.32	169.27	0.33	172.36

**TABLA 18.** Para el modelo GOT00.2, la componente de atracción Newtoniana EOI ( $A$  = amplitudes en  $\mu\text{Gal}$  y  $F$  = fases, en grados, locales).

Estación	N <sub>2</sub>		M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		K <sub>2</sub>		Q <sub>1</sub>		O <sub>1</sub>		P <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.
CV	0.46	172.74	2.68	162.67	1.09	141.07	0.24	149.03	0.07	-45.25	0.28	-93.36	0.07	170.26	0.29	162.55
TP	0.83	-167.60	4.03	-179.46	1.67	158.69	0.47	166.38	0.13	-41.53	0.39	-89.18	0.12	174.79	0.44	163.04
AU	1.02	-157.73	5.33	-170.44	2.13	167.66	0.65	174.62	0.15	-41.79	0.51	-85.88	0.17	178.60	0.56	165.87

**TABLA 19.** Para el modelo GOT00.2, contribución al EOI total (Tabla 11) del área delimitada por el modelo CIAM2.

Estación	N <sub>2</sub>		M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		K <sub>2</sub>		Q <sub>1</sub>		O <sub>1</sub>		P <sub>1</sub>		K <sub>1</sub>	
	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.	A.	F.
CV	0.78	-172.38	4.16	175.75	1.57	155.77	0.39	155.43	0.09	-42.58	0.23	-103.53	0.08	157.36	0.33	155.56
TP	1.12	-171.03	5.70	-177.61	2.21	172.29	0.63	174.07	0.12	-20.11	0.18	-105.77	0.14	174.86	0.47	168.65
AU	1.21	-163.78	6.69	-173.58	2.59	173.83	0.80	176.39	0.13	-29.47	0.27	-94.65	0.18	176.39	0.59	167.98

**TABLA 20.** Desplazamientos causados por el EOI (amplitudes en mm y fases, en grados, locales), calculados para el modelo global FES2004 suplementado con CIAM2, con refinamiento de la cuadrícula oceánica en el entorno de los puntos de cálculo.

Onda	Estación	RADIAL		TANGENCIAL NS		TANGENCIAL EO	
		L	$\lambda$	L	$\lambda$	L	$\lambda$
<b>N<sub>2</sub></b>	CV	5.64	171.72	0.92	43.80	0.82	175.54
	TP	4.68	-176.48	0.80	55.11	0.71	158.86
	AU	4.30	-169.81	1.09	37.18	0.33	122.52
<b>M<sub>2</sub></b>	CV	26.00	159.88	4.43	64.60	3.92	-172.57
	TP	22.28	173.52	3.89	80.24	3.69	172.39
	AU	21.15	-178.86	4.99	60.67	1.92	141.88
<b>S<sub>2</sub></b>	CV	10.39	138.26	1.43	98.27	1.71	-150.32
	TP	9.29	153.05	1.39	120.05	1.68	-163.96
	AU	8.95	160.50	1.67	93.76	0.91	173.07
<b>K<sub>2</sub></b>	CV	2.76	137.79	0.37	105.27	0.47	-152.83
	TP	2.50	153.62	0.39	126.14	0.47	-166.36
	AU	2.47	161.06	0.43	99.53	0.27	175.33
<b>Q<sub>1</sub></b>	CV	0.75	-34.64	0.15	-32.46	0.13	40.30
	TP	0.81	-28.77	0.18	-15.10	0.14	35.46
	AU	0.81	-24.68	0.16	-31.52	0.08	26.59
<b>O<sub>1</sub></b>	CV	1.62	-79.69	0.46	1.96	0.46	81.88
	TP	1.73	-68.82	0.52	17.88	0.47	74.05
	AU	1.88	-64.44	0.55	7.85	0.37	60.89
<b>P<sub>1</sub></b>	CV	0.86	122.97	0.13	107.12	0.10	164.65
	TP	0.80	131.23	0.17	120.86	0.11	150.05
	AU	0.81	135.63	0.17	107.48	0.08	120.59
<b>K<sub>1</sub></b>	CV	2.85	123.24	0.39	111.24	0.31	176.34
	TP	2.77	128.78	0.46	128.26	0.30	164.99
	AU	2.74	132.86	0.49	109.53	0.21	120.89